

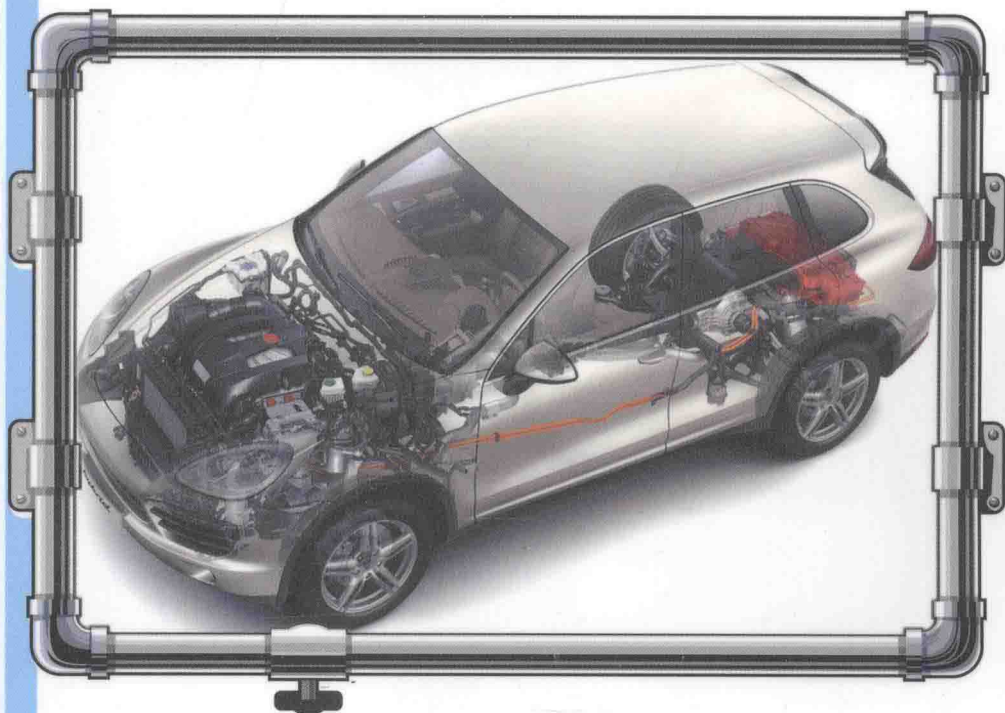


21世纪全国高等院校汽车类**创新型**应用人才培养规划教材

车辆底盘建模与分析

顾 林 朱 跃 主 编

- ✓ 深入地研究车辆的力学性能
- ✓ 注重整车和部件的简化与建模
- ✓ 为整车性能预测与分析打基础



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪全国高等院校汽车类创新型应用人才培养规划教材

车辆底盘建模与分析

主 编 顾 林 朱 跃



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书主要介绍车辆动力学基本理论及其建模和求解的一般方法,分析车辆的加速性、制动性、行驶平顺性和操纵稳定性,研究影响车辆动力学性能的主要因素。特别对影响车辆行驶平顺性的悬架机构和轮胎,研究建模的理论和方法,通过实例进行验证,为整车设计和性能优化提供依据。绪论是建模基础和一般方法的介绍,附录引导读者进一步学习轮胎精确建模技术,获取相关参数。

本书可作为高等学校本科高年级开设《车辆动力学基础》的教学用书,同时可作为研究生的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

车辆底盘建模与分析/顾林,朱跃主编. —北京:北京大学出版社,2014.1

(21世纪全国高等院校汽车类创新型应用人才培养规划教材)

ISBN 978-7-301-23332-0

I. ①车 II. ①顾…②朱… III. ①汽车—底盘—建模系统—高等学校—教材 IV. ①U463.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第242677号

书 名: 车辆底盘建模与分析

著作责任者: 顾 林 朱 跃 主编

策 划 编 辑: 童君鑫

责 任 编 辑: 宋亚玲

标 准 书 号: ISBN 978-7-301-23332-0/TH·0373

出 版 发 行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路205号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 新浪官方微博: @北京大学出版社

电 子 信 箱: pup_6@163.com

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62750667 出版部 62754962

印 刷 者: 三河市博文印刷厂

经 销 者: 新华书店

787毫米×1092毫米 16开本 12.5印张 287千字

2014年1月第1版 2014年1月第1次印刷

定 价: 30.00元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话: 010-62752024 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn

前 言

“车辆动力学基础”是为机械类专业学生开设的一门选修课。本课程的教学目的是，使学生对车辆动力学有一定的了解，初步学会车辆动力学分析方法，掌握有关的基本概念、基本理论、基本方法及其应用，掌握汽车多体动力学仿真的方法，以便增强其研究和解决车辆动力学问题的能力。本课程的任务是以数学力学模型为基础，结合虚拟样机仿真技术，讲授汽车的垂直动力学、横向动力学、纵向动力学，为继续学习和掌握汽车新科技创造条件。

传统车辆设计以几何空间的结构设计、运动学分析和静力学分析为主，随着技术的进步，现代车辆越来越关注舒适性、安全性和环保。这就需要更深入地研究车辆的力学性能，结合新材料、新工艺，设计出符合现代要求的车辆。

近年来，用计算机模型进行分析越来越重要。因为计算机及相应仿真软件的成本越来越低，仿真计算的效率越来越高。与此相反，在试验台上的试验从时间和成本来看依然保持不变，但车辆的计算模型不是既有的，必须建立计算模型。

本书以编者多年讲授“车辆动力学基础”课程的讲义为蓝本，结合有关科研成果编写而成，注重整车和部件在不同工程背景下的简化和建模，为车辆开发过程的整车性能预测与分析打下了基础。

全书分8章，第1~5章以力学为基础，阐述汽车的主要性能——加速性、制动性、行驶平顺性和操纵稳定性，并以此为基础介绍车辆的纵向动力学、垂向动力学和横向动力学的相关内容；第6章讲述底盘部件的机构建模，主要介绍车辆底盘中如变速器、悬架导向机构和万向传动装置的建模；第7章介绍轮胎建模，轮胎在车辆动力学的研究中占有很重要的位置，车辆的性能几乎都与轮胎有着千丝万缕的联系；第8章以轮胎建模为基础建整车模型。本书第1章由朱跃编写，其余内容由顾林、朱跃编写并统稿，肖茂华和傅秀清绘制了部分插图。

本书的部分研究内容得到了江苏省农机局科研启动基金项目（Gxz07009）的资助，编者在教学和科研中一直得到朱思洪教授的关心和指导，此外在编写本书过程中还参考了许多学者的著作、文献，在此一并表示感谢。

由于编者的学识和水平有限，书中错误和不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

编 者
2013年4月

目 录

第 1 章 绪论	1	3.2 轮胎与路面摩擦	42
1.1 车辆动力学简介	2	3.2.1 制动器制动力	42
1.2 建模的基本知识	2	3.2.2 地面制动力	43
1.2.1 牛顿第二定律	2	3.2.3 制动器制动力、地面制动力 及附着力之间的关系	43
1.2.2 拉格朗日方法	5	3.2.4 附着系数与滑动率 的关系	43
1.3 建模中参数的获取	9	3.3 制动力分配	44
1.3.1 模型的简化	9	3.3.1 制动时前后轮的地面法向 反作用力	44
1.3.2 车辆固定坐标系	9	3.3.2 理想的前后轮制动器制 动力分配曲线	46
1.3.3 运动变量	10	3.3.3 具有固定比值的前后制动器 制动力及同步附着系数	47
1.3.4 地面固定坐标系	10	3.4 防抱死制动系统	48
1.3.5 欧拉角	11	3.5 制动力学单轮模型	49
1.3.6 作用力	12	3.6 制动时车辆的方向稳定性	49
1.4 动态轮胎载荷	12	3.6.1 制动跑偏	49
1.5 机构的动态静力分析	16	3.6.2 制动侧滑	50
习题	18	3.6.3 转向能力的丧失	51
第 2 章 车辆的加速性	20	3.6.4 建模与仿真	51
2.1 受功率和附着力限制的加速性	21	习题	53
2.1.1 受功率限制的加速性	21	第 4 章 车辆行驶平顺性	55
2.1.2 受附着力限制的加速性	27	4.1 激振源	56
2.2 空气阻力	28	4.1.1 路面不平度	56
2.2.1 SAE 标准坐标系	28	4.1.2 发动机激励	57
2.2.2 空气阻力系数	29	4.1.3 传动系统扭转和弯曲 振动	64
2.3 建模工具介绍	30	4.2 车辆响应	67
2.3.1 ADVISOR 的文件 类型说明	31	4.3 乘坐舒适性	72
2.3.2 ADVISOR 的系统结构	32	4.3.1 坐姿振动的承受界限	72
2.3.3 ADVISOR 的仿真过程	32	4.3.2 对乘坐舒适性的评价	73
2.3.4 ADVISOR 仿真软件的 功能和用途	33	习题	76
2.3.5 ADVISOR 仿真软件 的应用	33	第 5 章 车辆的稳态转向与侧倾	78
习题	36	5.1 低速转向	79
第 3 章 车辆的制动性	40		
3.1 制动器	41		



5.2 高速转向	80	7.1 子午线轮胎结构	135
5.2.1 侧偏角	80	7.2 尺寸与载荷等级	137
5.2.2 线性二自由度车辆模型 的运动微分方程	82	7.3 坐标系统	138
5.3 车辆的稳态响应	85	7.4 作用力产生的机理	139
5.4 刚性车辆的模型与准静态侧翻 分析	87	7.4.1 作用在轮胎上的力	139
5.5 悬架车辆的模型简介	89	7.4.2 作用力的产生	139
习题	93	7.5 转向特性	144
第6章 机构建模与分析	96	7.5.1 侧偏角	144
6.1 悬架导向机构类型与简化	98	7.5.2 外倾角	145
6.2 悬架机构建模与分析	101	7.5.3 回正力矩	146
6.3 传动系统建模	106	7.6 附着椭圆	147
6.3.1 实际系统的简化	106	7.7 轮胎的力学特性和模型	148
6.3.2 典型部件转动惯量和刚度的 确定	107	7.8 魔术公式	149
6.3.3 刚性体和弹性体当量 模型	108	7.9 SWIFT 轮胎模型	150
6.4 齿轮机构建模与分析	109	7.9.1 轮胎刚性环模型和轮胎 包容特性模型	150
6.4.1 齿轮机构简化与运动 分析	109	7.9.2 SWIFT 轮胎模型的 定义	151
6.4.2 齿轮副纯扭转分析 模型	110	7.10 路面的数学描述	158
6.4.3 齿轮—转子系统扭转 分析模型	111	7.11 路面模型	161
6.4.4 行星轮系建模	112	习题	163
6.4.5 齿轮机构动力学模型与 啮合力计算	113	第8章 车辆建模	164
6.5 万向传动装置	116	8.1 平面振动模型	165
6.6 离合器建模	120	8.1.1 1/2 车辆模型结构	165
6.6.1 离合器分类	120	8.1.2 基于拉格朗日方程的 建模	165
6.6.2 离合器结构和工作 原理	120	8.2 整车结构与简化	167
6.6.3 缓冲控制	122	8.3 悬挂质量与非悬挂质量	168
6.6.4 离合器摩擦转矩	123	8.4 惯性参数的确定	168
6.6.5 带排转矩的分析	129	8.5 刚度及阻尼参数的确定	169
6.6.6 动力学计算模型	130	8.5.1 前空气弹簧刚度计算	169
6.6.7 滑摩功	131	8.5.2 后空气弹簧刚度计算	171
习题	132	8.5.3 确定减振器的阻尼 系数	171
第7章 轮胎与路面	134	8.6 整车模型的建立	172
		习题	174
		附录 子午线轮胎的结构设计	175
		参考文献	190

第1章

绪论



本章教学要点

知识要点	能力要求	相关知识
车辆动力学	了解车辆动力学的研究内容、研究方法	通过一些实例，了解为什么要研究车辆动力学及哪些问题属于车辆动力学问题
车辆坐标系和欧拉角	掌握车辆坐标系的定义及描述刚体形态的欧拉角的概念	车辆固定坐标系、地面固定坐标系及欧拉角之间的关系
轮胎载荷	掌握静态轮胎载荷及动态轮胎载荷的计算	达朗贝尔原理在整车力分析中的应用
拉格朗日方程	掌握建立拉格朗日方程的方法	广义坐标的选取、系统动能、系统势能的计算



导入案例

柯受良 1997 年 6 月 1 日驾车“飞越”跨度 50m 的黄河壶口瀑布(图 1.1)。素来在地面行驶的汽车何以能“飞”？什么情况下可以腾空“飞越”？



图 1.1 柯受良驾车“飞越”黄河壶口瀑布



1.1 车辆动力学简介

车辆性能包括加速、制动、转向和行驶过程中的表现,是施加在车辆上力的响应,车辆动力学研究的内容是怎样及为什么会产生这些力。

在车辆上影响性能的主要作用力是地面对轮胎产生的反作用力。有一个形象的比喻:控制一辆高速机动车辆的主要作用力产生于4块只有巴掌般大小的区域——车轮与地面的接触区。因此需要密切关注轮胎特性,这些特性由轮胎在各种不同工况下产生的力和力矩所表征。

轮胎的相关特性在本书的前几章将做适当介绍,并在第7章做全面介绍。

1.2 建模的基本知识

车辆动力学这门学科研究的是车辆在路面上的运动,所关心的是车辆的受力和运动的关系。通过对车辆及其部件的研究,考察在特定操纵和平衡点条件下,运动要素会产生何种作用力,以及车辆在这些力作用下的响应。

近年来,用计算机模型进行分析越来越重要。原因是计算机及相应仿真软件的成本越来越低,仿真计算的效率越来越高。与此相反,在试验台上的试验从时间和成本来看依然保持不变。所以工程师必须了解相应的软件,掌握软件的使用方法。

车辆的计算模型不是既有的,首先必须建立计算模型。至于采用何种方法建模,取决于是否有车辆的设计资料或测试结果。目前,车辆动力学建模方法很多,一般有牛顿第二定律、拉格朗日方法、凯恩方法、变分原理等,本书将主要介绍牛顿第二定律和拉格朗日方法。

1.2.1 牛顿第二定律

实际的车辆系统一般很复杂,在研究过程中对系统进行理想化,忽略一些次要因素,将它简化为一个力学模型,这种力学模型主要由惯性元件、弹性元件和阻尼元件组成。这些元件可形成单自由度系统和多自由度系统。以下分别介绍基于牛顿第二定律的单自由度和多自由度系统的建模过程。

车辆动力学分析的基本定律是牛顿第二定律,这个定律适用于平动和转动系统。

平动系统:

$$\sum F_x = M \cdot a_x$$

式中, F_x —— x 方向的力;

M ——物体质量;

a_x —— x 方向的加速度。

转动系统:

$$\sum T_x = I_{xx} \alpha_x$$

式中, T_x ——绕 x 轴的力矩;

I_{xx} ——绕 x 轴的转动惯量;

α_x ——绕 x 轴的角加速度。

1. 单自由度系统建模

系统的自由度定义为能完全描述系统运动所必需的独立的坐标个数。在离散模型中, 最简单的是单自由度线性系统, 它用一个二阶常系数常微分方程来描述。这类模型常用来作为较复杂系统的初步近似描述。

建立单自由度系统的运动微分方程的步骤: 建立坐标系(以离开其静平衡位置方向为正); 将质量块作为分离体进行受力分析, 画受力图; 根据牛顿第二定律列出方程: $m\ddot{x} = \sum F_u$ 。常见单自由度弹簧—质量块如图 1.2 所示。

根据牛顿第二定律, 动力学微分方程如下。

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (1-1)$$

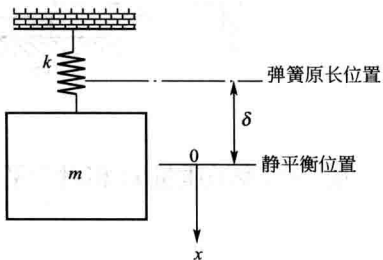


图 1.2 单自由度系统建模

式(1-1)通解: $x(t) = D_1 \cos \omega_n t + D_2 \sin \omega_n t = A \sin(\omega_n t + \varphi_0)$ 。该式物理意义为包含两个频率相同的简谐振动, 而这两个简谐振动的合成仍是一个简谐振动。其中 D_1 、 D_2 为任意常数, 由初始条件决定。弹簧质子的位移变化曲线如图 1.3 所示。振幅: $A = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}$; 初相位: $\varphi_0 = \tan^{-1} \frac{D_1}{D_2}$ 。

【例 1-1】求圆盘(见图 1.4)转动的运动微分方程。

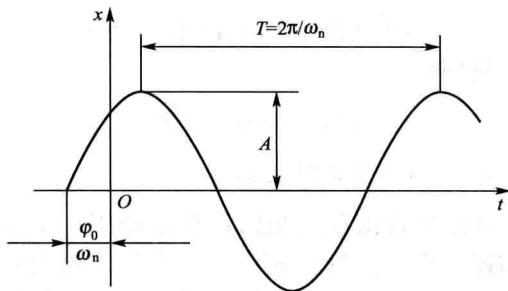


图 1.3 弹簧质子的位移变化曲线

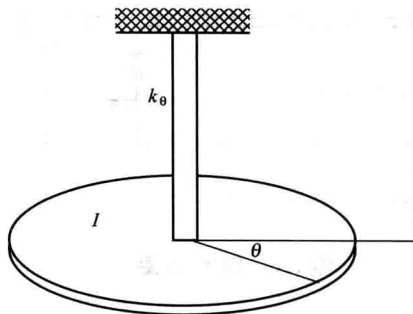


图 1.4 例 1-1 图

解: 设圆盘转动惯量为 I , k_θ 为轴的扭转刚度, 定义为使得圆盘产生单位转角所需的力矩($\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$)。

在圆盘的静平衡位置上任意选一半径作为角位移的起点位置, 由牛顿第二定律可知: $I\ddot{\theta} + k_\theta\theta = 0$, $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$, 扭振固有频率 $\omega_0 = \sqrt{k_\theta/I}$ 。

由例 1-1 可看出, 除了选择的坐标不同之外, 角振动与直线振动的数学描述完全相同。如果在弹簧质量系统中将 m 、 k 称为广义质量和广义刚度, 则弹簧质量系统的有关结论完全适用于角振动。以后不加特别声明时, 弹簧质量系统是广义的, 都具有如下式所描述的运动微分方程:



$$m\ddot{x} + kx = 0$$

【例 1-2】求带阻尼元件振动系统的运动微分方程。

解：单自由度弹簧—阻尼器—质量系统如图 1.5(a) 表示。下面用牛顿第二定律来建立系统的运动方程。绘制系统的分离体图，如图 1.5(b) 所示。

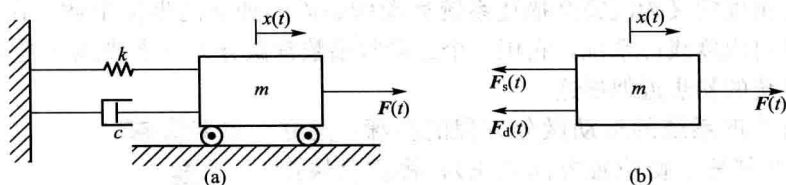


图 1.5 例 1-2 图

用 $x(t)$ 表示质量 m 相对于平衡位置的位移，可得：

$$m\ddot{x} = -F_s - F_d$$

由于

$$F_s(t) = kx(t); \quad F_d(t) = c\dot{x}(t)$$

则上式可知：

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

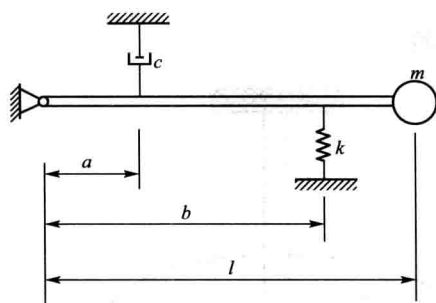


图 1.6 例 1-3 图

【例 1-3】已知小球质量为 m ，杆质量不计，求图 1.6 所示系统的运动微分方程。

解：设 θ 为广义坐标，根据力矩平衡原理有：

$$m\ddot{\theta}l \cdot l + c\dot{\theta}a \cdot a + k\theta b \cdot b = 0$$

整理得

$$ml^2\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + kb^2\theta = 0$$

2. 多自由度系统建模

介绍单自由度系统时，其运动用一个独立坐标描述。实际工程问题中，许多系统仅用一个独立坐标难以描述和分析其运动，如图 1.7 所示为典型多自由度系统，求其运动微分方程。

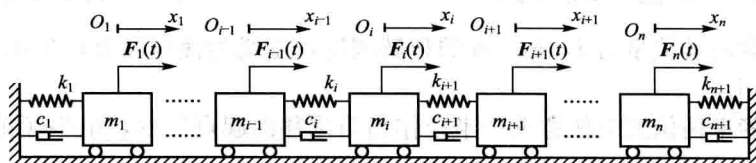


图 1.7 多自由度系统

(1) 建立运动坐标。质量 m_i 的位移为 x_i ，质量 m_i 为静平衡位置为原点，方向向右为正。

(2) 隔离体受力分析; 如图 1.8 所示, 运动位移、速度、加速度均为正。

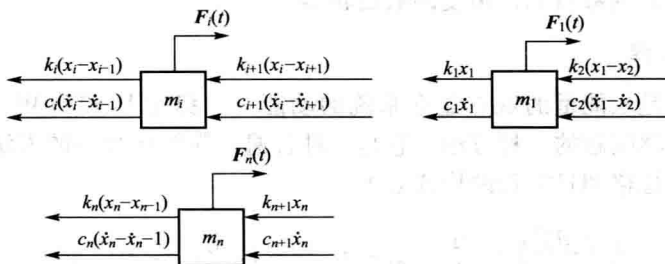


图 1.8 多自由度系统隔离体受力图

(3) 建立方程。

$$F_1(t) - c_1 \dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$F_i(t) - c_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) - c_{i+1}(\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}) - k_i(x_i - x_{i-1}) - k_{i+1}(x_i - x_{i+1}) \\ = m_i \ddot{x}_i \quad (i=2, 3, \dots, n-1)$$

$$F_n(t) - c_n(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}) - c_{n+1} \dot{x}_n - k_n(x_n - x_{n-1}) - k_{n+1} x_n = m_n \ddot{x}_n$$

整理后用矩阵形式表示为:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$$

1.2.2 拉格朗日方法

研究动力学建模问题大体可分为两类: 一是以牛顿第二定律为基础的矢量力学方法; 二是以变分原理为基础的分析力学方法。前一种方法已经介绍过, 本节将重点介绍后一种方法。

概括地讲, 分析力学方法以功和能这样的标量为基本概念, 通过引入广义坐标描述系统的位移, 运用数学分析手段来建立系统的运动微分方程, 本节将重点讲述拉格朗日方程及其应用。

1. 约束与广义坐标

在一个力学体系中常存在着一些限制各质点自由运动的条件, 我们把这些条件叫做约束。约束对各质点位置限制的条件通常可以表示为力学体系中质点的坐标、速度和时间的方程。

约束方程不包含质点的速度, 但约束方程是可以积分的约束称为完整约束; 约束方程包含质点的速度且不可积分的约束称为非完整约束。

对于 n 个质点所形成的力学体系, 如果有 k 个几何约束, 那么独立坐标就减小 $3n - k = s$ 个, 这些独立坐标的数目叫做力学体系的自由度。把 $3n$ 个坐标用 s 个独立参数 $q_1, q_2, \dots, q_s$ 及 t 表示如下

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, n, s < 3n)$$



这 s 个独立参量唯一地确定质点系在空间的构型, 叫做拉格朗日广义坐标。在几何约束情况下, 广义坐标的数目和自由度的数目相等。

2. 拉格朗日方程

拉格朗日方法是从能量的观点建立系统的动能 T 、势能 V 和功 W 之间的标量关系, 研究静力学、动力学问题的一种方法。它是一种普遍、简单和统一的方法, 适用于简单或复杂系统的分析。拉格朗日方程的形式如下:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

式中, T ——系统总动能;

$\dot{q}_i$ ——系统广义坐标, 为广义坐标 q_i 对时间 t 的导数;

Q_i ——对应于广义坐标 q_i 的广义力。

同时, 拉格朗日方程存在以下几种表达方式:

(1) 当系统为保守系统时, 主动力仅为势力, 广义力可表达为 $Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$, 拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

(2) 当系统除了势力作用以外, 还存在其他非势力, 其虚功记为 $\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$, 拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

(3) 如果将因为能量耗散函数 D 引起的阻尼力也从其他的非势力的广义力中分离出来, 并使 Q_i 仅代表外部作用的广义激振力(力或力矩等), 则可将非保守系统的拉格朗日方程改写为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (1-2)$$

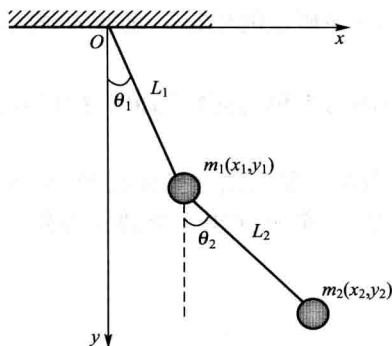


图 1.9 例 1-4 图

式 1-2 可表达为有阻尼振动系统的自由振动微分方程, 是利用能量(动能 T , 势能 V 和能量耗散函数 D)以及其他外部广义力表达的完全的拉格朗日方程。

由基本形式的拉格朗日方程求解问题的方法步骤如下。

(1) 确定系统自由度 s , 选取合适的广义坐标 q_i 。

(2) 求广义力 Q_i , $\delta W = \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} \delta q_{\alpha}$ 。

(3) 方程求解。

【例 1-4】如图 1.9 所示, 两质量分别为 m_1 和

m_2 的重物用长度分别为 L_1 与 L_2 的无质量杆约束, 试用拉格朗日方程建立振动微分方程。

解: 选取 θ_1 和 θ_2 为广义坐标:

$$x_1 = L_1 \sin \theta_1, \quad y_1 = L_1 \cos \theta_1$$

$$x_2 = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2$$

$$y_2 = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2$$

取 x 轴为重力势能零点, 则系统的势能为

$$V = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 = -m_1 g L_1 \cos \theta_1 - m_2 g (L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2)$$

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

因为

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = (L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (-L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2 = (L_1 \dot{\theta}_1)^2$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = (L_1 \dot{\theta}_1)^2 + (L_2 \dot{\theta}_2)^2 + 2L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

所以

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 L_1 L_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2, \text{ 代入拉格朗日方程}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases}$$

代入结果如下。

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) L_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 L_1 L_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2 - m_2 L_1 L_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2) g L_1 \sin \theta_1 = 0 \\ m_2 L_1 L_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1 + m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 L_1 L_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2 + m_2 g L_2 \sin \theta_2 = 0 \end{cases}$$

方程组是非线性的, 在微振动假设下此方程可进一步简化:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) L_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g L_1 \theta_1 = 0 \\ m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g L_2 \theta_2 = 0 \end{cases}$$

由微振动假设, 系统各个广义坐标和广义速度都可以看做一阶小量, 从而导出的微幅振动方程也将精确到一阶小量。利用拉格朗日方程求系统的运动微分方程时, 系统的能量要对广义坐标求一阶导数, 求导后精度将降低一阶, 所以在计算动能和势能的时候必须精确到二阶小量。结果如下。



$$\begin{bmatrix} (m_1+m_2)L_1^2 & m_2L_1L_2 \\ m_2L_1L_2 & m_2L_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1+m_2)gL_1 & 0 \\ 0 & m_2gL_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

【例 1-5】 如图 1.10 所示为一质量为 M 的小车用刚度为 k 的弹簧与机架相连, 小车上有一个质量为 m 的单摆, 试用拉格朗日方程建立振动微分方程。

解: 取小车的绝对位移 u 和单摆的偏转角 θ 为广义坐标。

计算动能:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{u}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\cos\theta \cdot \dot{\theta}\dot{u} \end{aligned}$$

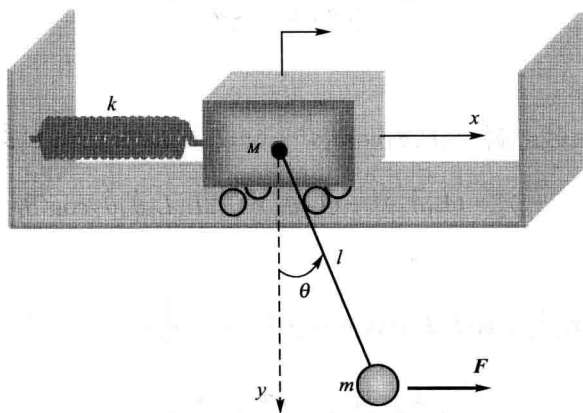


图 1.10 例 1-5 图

计算势能: 取 $u=0, \theta=0$ 为系统的零势能位置, 则此时动能为

$$T_0 = \frac{1}{2}(M+m)\dot{u}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta}\dot{u}$$

势能表达式为

$$V = \frac{1}{2}ku^2 + mgl(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}ku^2 + mgl\frac{\theta^2}{2}$$

求广义力: 让摆锤在水平方向产生一个虚位移 δx , 而 F 在此虚位移下所做的虚功为

$$\delta W = F\delta x$$

$$x = u + l\sin\theta \quad \delta x = \delta u + l\cos\theta \cdot \delta\theta$$

$$\delta W = F\delta u + Fl\cos\theta \cdot \delta\theta$$

代入拉格朗日方程:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}\right) &= (M+m)\ddot{u} + ml\ddot{\theta} & \frac{\partial V}{\partial u} &= ku \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) &= ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{u} & \frac{\partial V}{\partial \theta} &= mgl\theta\end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot{u} + ml\ddot{\theta} + ku &= F \\ ml\ddot{u} + ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta &= Fl\cos\theta\end{aligned}$$

转换为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} M+m & ml \\ ml & ml^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Fl\cos\theta \end{Bmatrix}$$

1.3 建模中参数的获取

从设计资料着手,首先是定义车辆的结构,即零件之间的相互连接(拓扑学)关系。结构定义后,必须定义结构的参数。车辆动力学计算模型的主要元素包括质量、弹簧、阻尼和激振器。

1.3.1 模型的简化

车辆由众多零部件构成。在不同工况、不同研究目的中,对这些零部件有不同的处理方法。例如,在制动过程中,车辆作为整体减速,可以假设整车是一个集中质量块,这个质量块的质心位置与整车质心位置重合,这个质量块拥有与整车相同的质量和惯性特性。实际上,加速、制动和大多数转向分析,把整车作为一个集中质量来研究都可以满足要求。但在乘坐舒适性研究中,不能忽视弹性元件的作用,而必须把整车质量分为“簧载质量”和“非簧载质量”。

每个自由运动的刚体都有6个自由度,如果把整车简化为车身和4个车轮通过悬架系统联系在一起,这样整车就有30个自由度。为了描写车辆运动,要写出相应的微分方程,这些微分方程不是完全独立的,或者通过悬架元件相联系,或者通过分布质量上各点加速度的关系相互关联。

如果进一步考虑车辆上还有其他的运动可能性,自由度的增加使微分方程的数目还要增加。相互关联多个运动方程式,使我们难以全面描写车辆的行驶性能。为了突出特性和本质,往往把整车问题做一些忽略,转变成几个局部问题来考虑,这就是模型的简化。

1.3.2 车辆固定坐标系

以车辆为参考物,车辆运动按右手直角坐标系来定义(图1.11),坐标系以车辆质心为原点,且与车辆一起运动。SAE规则的规定如下:

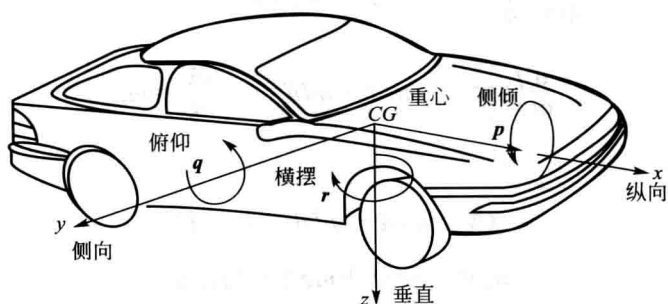


图 1.11 SAE 车辆坐标系

- x ——向前方，在纵向对称面上；
- y ——指向车辆右侧；
- z ——指向车辆下方；
- p ——绕 x 轴的侧倾角速度；
- q ——绕 y 轴的俯仰角速度；
- r ——绕 z 轴的横摆角速度。

1.3.3 运动变量

车辆的运动通常在车辆固定坐标系下由速度来描述，速度的方向参考车辆固定坐标系。

1.3.4 地面固定坐标系

车辆操纵过程的姿态和运行轨迹，参照固定在地面上的右手直角坐标系来确定(见图 1.12)。一般情况下，车辆固定坐标系选择与操纵的起始点相一致。此坐标系的定义如下：

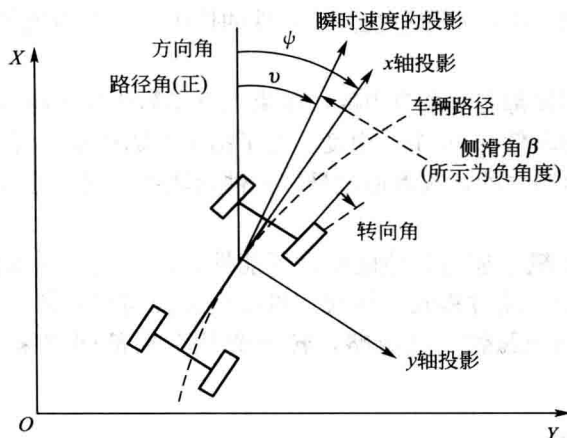


图 1.12 地面固定坐标系下的车辆

- X ——向前运动;
 Y ——向右运动;
 Z ——垂直运动(向下为正方向);
 ψ ——方向角(水平面上 x 轴与 X 轴之间的夹角);
 ν ——路径角(车辆速度向量与 X 轴之间的夹角);
 β ——侧滑角(车辆速度向量与 x 轴之间的夹角)。

1.3.5 欧拉角

用来确定刚体位置的3个一组独立角参量,由欧拉首先提出而得名。它们由3个方向上的依次旋转构成,有多种取法,以不同的顺序转动,同样3个欧拉角得到的变换结果一般是不同的,会导致不同的车辆姿态。常用转动顺序是3—1—3(图1.13~图1.15)。3表示 z 轴,1表示 x 轴。即第一次绕地面固定坐标系 z 轴转动;第二次绕 x 轴转动;第三次绕 z 轴转动。

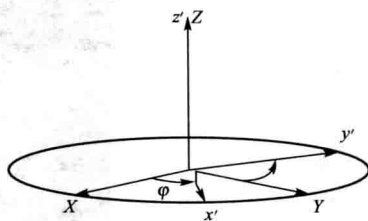


图 1.13 第一欧拉角 φ

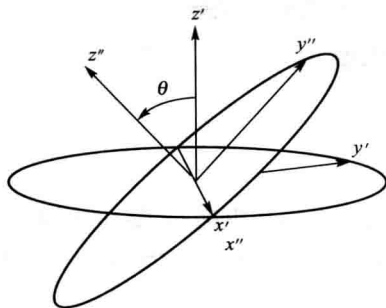


图 1.14 第二欧拉角 θ

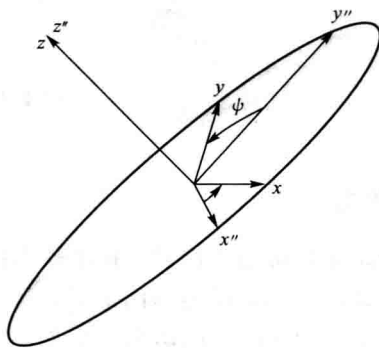


图 1.15 第三欧拉角 ψ

设定刚体取向的旋转矩阵是由3个基本旋转矩阵合成的,旋转矩阵为

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

单独分开作用,每个矩阵各自代表绕着其转动轴的旋转。但是,当它们依照次序相乘,最右边的矩阵代表绕着 z 轴的旋转;最左边的矩阵代表绕着 Z 轴的旋转;在中间的矩阵代表绕着交点线的旋转。 $[R]$ 的逆矩阵是

$$[R]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\gamma - \cos\beta\sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma - \cos\beta\sin\alpha\cos\gamma & \sin\beta\sin\alpha \\ \sin\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma + \cos\beta\cos\alpha\cos\gamma & -\sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta \end{bmatrix}$$