

Anwendungen der linearen parametrischen Optimierung

0224
L1

7966850

ANWENDUNGEN DER LINEAREN PARAMETRISCHEN OPTIMIERUNG

Herausgegeben von
Dr. sc. KLAUS LOMMATZSCH
Humboldt-Universität Berlin

Mit 11 Abbildungen



E7966850



AKADEMIE-VERLAG · BERLIN
1979

Erschienen im Akademie-Verlag, DDR-108 Berlin, Leipziger Straße 3—4
Lektor: Dr. Reinhard Höppner
© Akademie-Verlag Berlin 1979
Lizenznummer: 202 · 100/544/79
Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“, 582 Bad Langensalza
Bestellnummer: 762 4718 (6442) · LSV 1085
Printed in GDR
DDR 38,— M

ANWENDUNGEN DER LINEAREN PARAMETRISCHEN OPTIMIERUNG

MATHEMATISCHE LEHRBÜCHER UND MONOGRAPHIEN

HERAUSGEGEBEN VON DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER DDR
ZENTRALINSTITUT FÜR MATHEMATIK UND MECHANIK

II. ABTEILUNG

MATHEMATISCHE MONOGRAPHIEN

BAND 51

ANWENDUNGEN DER LINEAREN
PARAMETRISCHEN OPTIMIERUNG

VON

B. BANK, H. DAMM, J. GUDDAT, D. KLATTE, T. KOPIELSKI,
K. LOMMATZSCH, R. MANDEL, D. MELZER, D. NOWACK,
F. NOŽIČKA, K. TAMMER, K. WENDLER



AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

1979

*Unserem
Lehrer und Freunde,
Professor Dr. František Nožička*

INHALT

Einführung	1
Kapitel 1. Begriffe und Ergebnisse der linearen parametrischen Optimierung	5
(K. LOMMATZSCH)	
1.1. Einleitung	5
1.2. Bezeichnungen, Vereinbarungen, Begriffe	7
1.3. Vollparametrisierte lineare Aufgaben	10
1.3.1. Zulässige Parameterbereiche	11
1.3.2. Lösungsbereiche	11
1.3.3. Lokale Stabilitätsmengen	12
1.3.4. Die Lösungsfunktion	19
1.3.5. Die Optimalmengenabbildung $\psi(\lambda, \mu)$	20
1.4. Andere parametrische Aufgaben	20
Literatur	22
Kapitel 2. Lineare Optimierungsprobleme mit Parametern in der Koeffizientenmatrix der Restriktionen	23
(D. KLATTE)	
2.1. Einleitung	23
2.2. Das vollparametrische lineare Optimierungsproblem in Gleichungsform	25
2.2.1. Problemstellung	25
2.2.2. Zulässige Parametermenge, Lösbarkeitsmenge, Lösungsfunktion und Optimalmengenabbildung	26
2.2.3. Lokale Stabilitätsmengen und ihre Eigenschaften	34
2.2.4. Zusammenhang zu parametrischen Optimierungsaufgaben mit fester Restriktionsmatrix	36
2.3. Lineare Optimierungsprobleme mit Parametern in einer Zeile bzw. Spalte der Koeffizientenmatrix der Restriktionen	41
2.3.1. Problemstellung und Motivation	41
2.3.2. Zulässige Parametermengen für lineare Ungleichungssysteme mit variablen Koeffizienten	43
2.3.3. Zerlegung der Lösbarkeitsmenge in lokale Stabilitätsmengen	46
2.3.4. Beispiel	50
2.3.5. Schlußbemerkungen	51
Literatur	52
Kapitel 3. Parametrische Optimierung und Vektoroptimierung	54
(J. GUDDAT)	
3.1. Einleitung	54

3.2. Über den Zusammenhang zwischen Vektoroptimierung und parametrischer Optimierung	55
3.3. Eine topologische Eigenschaft der Menge der eigentlich effizienten Punkte	64
3.4. Lösung von linearen und speziellen quadratischen Vektoroptimierungsproblemen mit der Simplextechnik	66
3.4.1. Reduktion von Parametern	66
3.4.2. Lineare Vektoroptimierungsprobleme	67
3.4.3. Ein spezielles quadratisches Vektoroptimierungsproblem	70
Literatur	73

Kapitel 4. Über den Zusammenhang von parametrischer Optimierung und Entscheidungsproblemen der stochastischen Optimierung 76

(K. TAMMER)

4.1. Einleitung	76
4.2. Optimierungsprobleme mit zufallsabhängiger Zielfunktion	78
4.2.1. Problemformulierung und allgemeine Lösungsbegriffe	78
4.2.2. Der Zusammenhang zum zugeordneten parametrischen Problem	80
4.3. Aufgaben mit zufälligen rechten Seiten	84
4.3.1. Problemformulierung und Lösungsansätze	84
4.3.2. Die zugeordnete parametrische Aufgabe und ihre Beziehungen zum stochastischen Ausgangsproblem	86
4.4. Beispiele	88
4.5. Schlußbemerkungen	90
Literatur	90

Kapitel 5. Einige Anwendungen der linearen parametrischen Optimierung bei der Untersuchung von optimalen Steuerungsproblemen 92

(H. DAMM, T. KOPIELSKI)

5.1. Einleitung	92
5.2. Einige Ergebnisse aus der linearen parametrischen Optimierung	93
5.3. Erreichbarkeitsmenge und Bang-Bang-Prinzip	94
5.3.1. Eigenschaften der Erreichbarkeitsmenge	94
5.3.2. Zum Bang-Bang-Prinzip	99
5.3.3. Existenz von Lösungen für gewisse optimale Steuerungsprobleme	100
5.4. Eine obere Schranke für die Anzahl der Umschaltunkte einer extremalen Steuerung bei stationären linearen Systemen	100
5.4.1. Einleitung	100
5.4.2. Formulierung der Aufgabe	101
5.4.3. Abschätzung der Anzahl der Umschaltunkte	102
5.5. Über die Endlichkeit der Anzahl der Umschaltunkte einer extremalen Steuerung bei linearen Systemen und zeitabhängigem Steuerbereich	104
Literatur	106

Kapitel 6. Parametrische Optimierung und Aufteilungsverfahren 107

(B. BANK, R. MANDEL, K. TAMMER)

6.1. Die Grundidee	107
6.2. Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierungsaufgaben	109
6.2.1. Problemstellung und Ergebnisse der linearen parametrischen Optimierung	109
6.2.2. Ein iteratives Vorgehen	110

6.2.3. Beispiel	113
6.3. Lösungsmöglichkeiten für eine Klasse von indefiniten quadratischen Optimierungsaufgaben	115
6.3.1. Problemstellung und Vorbemerkungen	115
6.3.2. Transformation des Problems	116
6.3.3. Theoretische Grundlagen der parametrischen quadratischen Optimierung.	117
6.3.4. Zur Realisierung des Lösungsprozesses	118
6.3.5. Bedingungen, unter denen sich der Lösungsprozeß vereinfacht	121
Literatur	122

Kapitel 7. Optimierungsaufgaben mit quadratischer Zielfunktion 124

(K. LOMMATZSCH)

7.1. Einleitung	124
7.2. Die zugeordnete parametrische Aufgabe	124
7.3. Optimalitätsbedingungen für die quadratische Aufgabe	127
7.4. Die Lage der Optimalpunkte quadratischer Optimierungsaufgaben innerhalb der durch die parametrische Aufgabe erzeugten Struktur	129
7.5. Bemerkungen zu Lösungsverfahren	131
Literatur	133

Kapitel 8. Lin-Opt-Spiele 134

(K. LOMMATZSCH, D. NOWACK)

8.1. Aufgabenstellung und Interpretation	134
8.2. Gleichgewichtslösungen	135
8.3. Beschreibung der Menge der Gleichgewichtssituationen des Spieles	138
Literatur	141

Kapitel 9. Das STEINER-WEBER-Problem als eine Optimierungsaufgabe über der zulässigen Parametermenge einer konvexen Optimierungsaufgabe mit Parametern in den rechten Seiten der Restriktionen 142

(D. MELZER)

9.1. Das STEINER-WEBER-Problem	142
9.1.1. Mathematische Modellierung	142
9.1.2. Bekannte Ergebnisse	143
9.2. Das Standortproblem im R^n und ein parametrischer Zugang zu seiner Untersuchung	145
9.2.1. Ein parametrisches Modell	146
9.2.2. Beschreibung der Restriktionsmenge	148
9.2.3. Reduktion der Anzahl der Nebenbedingungen	155
9.3. Ein Lösungsverfahren	164
9.3.1. Optimalitätskriterien	164
9.3.2. Das Verfahren von WEISZFELD	167
Literatur	169

Kapitel 10. Ein lineares parametrisches Optimierungsmodell für die teilmechanisierte Gemüseernte 171

(D. KLATTE, F. NOŽIČKA, K. WENDLER)

10.1. Einleitung	171
10.2. Mathematisches Modell einer Gemüseernte	171

10.2.1. Das Modell der Handernte	171
10.2.2. Das Modell der teilmechanisierten Ernte	173
10.2.3. Formulierung des Optimierungsproblems	176
10.3. Das Modell der teilmechanisierten Ernte als lineares Optimierungsproblem mit zwei Parametern in der Koeffizientenmatrix	178
10.3.1. Der ökonomische Hintergrund	178
10.3.2. Ein lineares Optimierungsproblem mit zwei Parametern in der Koeffizienten- matrix	178
10.4. Berechnung der Lösbarkeitsmenge des betrachteten parametrischen Optimie- rungsproblems	179
10.4.1. Ableitung des Verfahrens	179
10.4.2. Beispiel für $n = 2$	186
10.4.3. Beispiel für $n = 3$	187
Literatur	187

EINFÜHRUNG

Mathematische Fragestellungen entstehen ursprünglich aus Aufgaben der gesellschaftlichen Praxis. Auf der Grundlage mathematischer Ansätze lassen sich Modelle der physischen und gesellschaftlichen Umwelt formen, die einer exakten Auswertung zugänglich sind und in deren Ergebnis Rückschlüsse auf die jeweiligen betrachteten Gegenstände gezogen werden können.

Diese mathematischen Modelle werden dabei mannigfachen Untersuchungen, Änderungen und Wandlungen unterworfen; sie gewinnen ein Eigenleben, dessen Qualität von vielerlei Faktoren abhängt. Solche Faktoren können u. a. sein: ein latentes praktisches Interesse der Gesellschaft, die Hoffnung, einer Beantwortung allgemeiner Fragen gesellschafts- bzw. naturwissenschaftlicher Art näherzukommen und nicht zuletzt der Reiz der mathematischen Aufgabenstellung bzw. des einsetzbaren mathematischen Apparates.

Optimierungsaufgaben sind seit langem Gegenstand der mathematischen Forschung. Anregungen boten sich in vielfältiger Weise, es sei hier nur die frühe Beobachtung genannt, daß sich Natur und Gesellschaft auf verschiedene Weisen ‚optimal‘ verhalten. Eine Vielzahl von Aufgaben konnte erfolgreich gelöst werden. Entsprechend den eingesetzten Methoden bzw. vorwiegenden Absichten wurden sie aber allgemeinen mathematischen Fragestellungen untergeordnet: der Analysis, der Kombinatorik, der Numerik u. a. Der allgemeine Optimierungsaspekt blieb oft im Hintergrund, andere Gesichtspunkte, hervorgerufen durch die jeweilige Einordnung, bestimmten die Richtung der Untersuchungen. Dabei wurden wichtige Erkenntnisse gewonnen, es sei nur an die Variationsrechnung erinnert, die tiefgehende und diffizile Probleme lösen konnte. Zunehmend dringend werdende gesellschaftliche Erfordernisse — vor allem auf wirtschaftlichen Gebiet — führten vor etwa 50 Jahren zu einer eigenständigen Betrachtung von Optimierungsaufgaben (es seien hier stellvertretend nur Namen genannt, wie die von L. W. KANTOROWITSCH, D. KÖNIG, J. v. NEUMANN, F. L. HITCHCOCK).

Die Entwicklung verlief dann relativ schnell: einmal konnte man auf ein gut ausgebautes mathematisches Hinterland zurückgreifen (wieder sei hier die Variationsrechnung genannt, jedoch auch die Numerik und Algebra), dessen Stand z. B. den Aufbau der linearen Optimierung eigentlich schon 100 Jahre früher ermöglicht hätte, zum anderen wurden in Erwartung einer besseren Ausnutzung der Ressourcen und einer höheren Produktivität bedeutende Mittel bereitgestellt, und zum dritten bildete sich parallel dazu die moderne Rechentechnik heraus, die erst die praktische Lösung gesellschaftlich relevanter Aufgaben ermöglichte. Diese — bekannten — Gründe führten dazu, daß die mathematische Optimierung heute eine umfassende, in viele Teilgebiete gefächerte, mit einer z. T. eigenständigen Theorie untermauerte und eine große Skala von Anwendungsbereichen erfassende Disziplin ist.

Zwei für eine Optimierungstheorie bedeutsame Problemkreise blieben dabei lange Zeit im Hintergrund und erfuhren nur eine quantitative bzw. heuristische Behandlung: die Frage nach der Stabilität bzw. Sensitivität optimaler Lösungen (ein in der Mathematik durchaus geläufiges Problem) und die Frage der sogenannten suboptimalen Lösungen. Beide Fragestellungen spiegeln ein wichtiges praktisches Bedürfnis wider. Die für Optimierungsmodelle bereitzustellenden Ausgangsdaten sind oft mit Fehlern behaftet, es sind für sie nur untere und obere Schranken bekannt, sie können auch bestimmten Veränderungen und Zufällen unterliegen: In allen diesen Fällen wäre es von Interesse, Aussagen darüber zu gewinnen, wie z. B. eine für feste Daten berechnete Optimallösung von diesen Größen abhängt bzw. welches Feld von Optimallösungen für eine bestimmte Variation der Ausgangsdaten zustande kommen kann u. ä. Die zweite oben genannte Frage betrifft die Eigenschaft optimaler Lösungen, im allgemeinen Randpunkte der jeweiligen Restriktionsmengen zu repräsentieren. Ein z. B. nicht im Modell erfaßtes Ereignis (eine Havarie, eine Störung) erfordert zu seiner Überwindung Maßnahmen, deren Realisierung bestimmte Reserven erfordert, die aber auf Grund der ‚Extremalität‘ des berechneten Planes nicht vorhanden sind.

Zur Zeit scheint es noch kein allgemeines qualitatives Modell zu geben, welches zu begründeten suboptimalen Lösungen führt (in der Literatur angebotene Ansätze stellen vielfach nur Notlösungen dar, sie sind oft einfach das Ergebnis eines vorzeitig abgebrochenen Rechenverfahrens). Obwohl spieltheoretische Modelle einen grundsätzlich anderen Ausgangspunkt haben, könnten sie noch am ehesten einen Weg weisen, zu brauchbaren Ansätzen zu kommen (vgl. z. B. Minimax-Aussagen).

Es ist das Verdienst von F. NOŽIČKA, die zuerst genannte Frage nach der Stabilität optimaler Lösungen allgemein gestellt und anhand der linearen parametrischen Optimierung für bestimmte Klassen linearer Optimierungsaufgaben qualitativ beantwortet zu haben (zusammengefaßt dargelegt in der Monographie „Theorie der linearen parametrischen Optimierung“, Akademie-Verlag Berlin, 1974).

Dabei lagen Teilergebnisse schon seit längerer Zeit vor, es sei hier stellvertretend für viele andere an Arbeiten von MANNE (bereits 1953) DANTZIG, GASS, SAATY und DINKELBACH erinnert; viele Lehrbücher der linearen und konvexen Optimierung enthalten Kapitel über parametrische Aufgaben. Diese Darstellungen gehen jedoch im wesentlichen von dem verwendeten Lösungsverfahren aus, sie konnten daher schwerlich Ausgangspunkt für allgemeinere Ansätze und Untersuchungen werden. Resultate der parametrischen Optimierung sind auch in einer anderen Gruppe von Arbeiten enthalten, nämlich in der Vielzahl von Arbeiten zu den sogenannten parametrisierten Verfahren in der Optimierungsrechnung, das Literaturverzeichnis der oben genannten Monographie enthält dafür zahlreiche Beispiele.

Die von F. NOŽIČKA geführte qualitative Analyse bietet dagegen — neben ihren durchaus wesentlichen Ergebnissen praktischen Charakters — eine Methodik, mit der viele Fragen der Optimierung in zum Teil neuartiger Weise angegangen werden können. In dem vorliegenden Buch sind eine Reihe von Arbeiten seiner Schüler zusammengefaßt, die das an verschiedenen Themen demonstrieren. Die im Titel des Buches genannten Anwendungen sind ihrem Wesen nach innermathematische Anwendungen: Unter Verwendung von Herangehensweisen und Aussagen der linearen parametrischen Optimierung werden bereits bekannte bzw. teilweise bekannte Zusammenhänge neu hergeleitet, neue Zugänge und Lösungsmöglichkeiten für bestimmte Klassen von Optimierungsaufgaben erschlossen.

Im Kapitel 1 sind zur Information des Lesers Ausgangspunkte, Begriffe und eine Auswahl von Aussagen der (linearen) parametrischen Optimierung zusammengestellt. Es entstand auf Grundlage der oben genannten Monographie und einiger Ergänzungen, die aus einem Vorlesungsmanuskript von K. TAMMER stammen.

Das zweite Kapitel enthält einige neuere Resultate der linearen parametrischen Optimierung, das betrifft einmal Ausführungen über Aufgabenklassen mit parameterabhängigen Matrizen im Restriktionssystem und zum anderen Untersuchungen von Abbildungen des Parameterraumes (die Restriktionsmengenabbildung und die Optimalmengenabbildung).

Möglichkeiten, die die lineare parametrische Optimierung zur Aufhellung und Lösung bestimmter Probleme der Vektoroptimierung und der stochastischen Optimierung bietet, sind in Kapitel 3 und 4 dargestellt, zwischen beiden Kapiteln bestehen auch inhaltliche Zusammenhänge. Im ersteren werden bekannte Ergebnisse der Vektoroptimierung zusammengefaßt, ergänzt und systematisiert und einige Erweiterungen vorgeführt. Durch eine Zuordnung von linearen parametrischen Problemen zu bestimmten stochastischen Optimierungsaufgaben kann, wie im vierten Kapitel gezeigt wird, eine in gewissem Sinne maximale Menge sinnvoller Lösungen stochastischer Aufgaben prinzipiell ermittelt werden. In der stochastischen wie in der Vektoroptimierung können parametrische Aufgaben die Rolle einer allgemeinen Ersatzfunktion übernehmen.

Das Kapitel 5 enthält einige spezielle Ergebnisse aus der Theorie der optimalen Prozesse, zu deren Nachweis Aussagen der parametrischen Optimierung herangezogen werden.

Eine Begründung für die von BENDERS in die Optimierung eingeführten Aufteilungsverfahren aus der Sicht der parametrischen Optimierung findet sich in Kapitel 6. Darauf aufbauend entwickeln die Autoren Lösungsverfahren für bestimmte gemischt-ganzzahlige Aufgaben und für bestimmte quadratische Optimierungsprobleme.

Im Kapitel 7 werden Optimierungsprobleme mit quadratischer Zielfunktion über konvexen und abgeschlossenen, aber nicht notwendig polyedrischen Restriktionsbereichen untersucht. Grundlage dafür bildet eine Raumstruktur, die durch ein zugeordnetes parametrisches Problem erzeugt wird, welches eingangs des Kapitels dargestellt ist.

Die Kopplung zweier spezieller parametrischer Aufgaben führt zu einer Klasse restringierter Bimatrixspiele; einige Eigenschaften dieser sogenannten Lin-Opt-Spiele werden im achten Kapitel behandelt.

Das neunte Kapitel ist dem STEINER-WEBER-Problem gewidmet. Es wird zunächst das klassische Modell diskutiert und diesem dann ein parametrisches Modell gegenübergestellt.

Von einer konkreten Aufgabenstellung gehen die Autoren des letzten Kapitels aus: zu welchem Zeitpunkt ist eine Gemüseerntemaschine einzusetzen. Für das vorgeschlagene Modell wird ein parameterabhängiges Lösungsverfahren entwickelt.

Allen Darlegungen des Buches gemeinsam ist das Zurückgreifen auf die lineare parametrische Optimierung: Zu den Untersuchungen wird entweder das allgemeine Modell herangezogen oder es werden bestimmte Eigenschaften dieses Modells ausgenutzt. Davon abgesehen stellt jedes Kapitel eine in sich begründete und eigenständige Arbeit dar, die ganz deren Autoren gehört und in die der Herausgeber nur in geringem Maße bezüglich einiger formaler Fragen eingegriffen hat. So hat auch jedes

Kapitel seine eigene Literaturübersicht sowie seine eigene Numerierung der Formeln und Aussagen. Nur für einige Begriffe und Symbole wurde einer besseren Lesbarkeit halber Einheitlichkeit angestrebt, diese sind im Abschnitt 1.2 angegeben. Schließlich bleibt anzumerken, daß in fast allen Kapiteln nur Teilkomplexe umfangreicherer Untersuchungen der jeweiligen Problemklassen dargestellt werden konnten, die Arbeiten sind daher vielfach informatorischen und manchmal sogar polemischen Charakters. Der Leser, der an bestimmten Fragestellungen speziell interessiert ist, kann auf die in den Literaturzusammenstellungen angegebenen weiteren Originalartikel der jeweiligen Autoren zurückgreifen bzw. sich an die Autoren wenden.

Wenn auch — wie oben festgestellt — die einzelnen Kapitel eigenständige Arbeiten der Autoren darstellen, so sind doch während ihrer Entstehung viele gemeinsame Diskussionen geführt und Anregungen ausgetauscht worden; in diesem oder jenem Maße waren alle Mitglieder unserer Arbeitsgruppe hierin verwickelt, auch diejenigen, die nicht als Autoren dieses Buches auftreten. Wir möchten ihnen für ihre Unterstützung unseren Dank aussprechen.

Besonders hervorheben wollen wir an dieser Stelle jedoch die Leistung unseres Lehrers, Professor Dr. F. NOŽIČKA. Viele Arbeiten verdanken ihre Entstehung seiner Anregung, an allen Untersuchungen nahm er mit Rat und Tat fördernd Anteil. Sein Name hätte eigentlich als Co-Autor unter jedes der Kapitel gehört.

Im April 1978 vollendete Prof. NOŽIČKA sein 60. Lebensjahr; dieses Buch soll auch ein Zeichen des Dankes sein, den wir ihm für sein langjähriges aufopferungsvolles Wirken an unserer Berliner Universität schulden. Mit unserem Dank verbinden wir die Hoffnung auf viele weitere Jahre der für uns so wertvollen Zusammenarbeit mit unserem Lehrer.

Schließlich möchten wir dem Akademie-Verlag für sein Entgegenkommen danken, dieses Buch in sein Programm aufgenommen und seine Herausgabe ermöglicht zu haben. Unser Dank gilt den Mitarbeitern des Verlags und der Druckerei für die sorgfältige Gestaltung und Drucklegung des Buches; insbesondere sind wir Frau HELLE und Herrn Dr. HÖPPNER für ihre tatkräftige Förderung des Projektes sehr verbunden.

BEGRIFFE UND ERGEBNISSE DER PARAMETRISCHEN OPTIMIERUNG

KLAUS LOMMATZSCH

1.1. Einleitung

Optimierungsprobleme OP lassen sich formal in folgender Weise beschreiben:

$$\text{OP: } \max \{f(x) \mid x \in \mathfrak{M}\} \quad (1.1)$$

Dieser Ausdruck symbolisiert die Aufgabe, im Sinne der *Zielfunktion* f optimale Elemente aus der *Restriktionsmenge* $\mathfrak{M}$ zu bestimmen. In diesem Buch wird $\mathfrak{M}$ durchweg als Teilmenge eines endlich-dimensionalen euklidischen Raumes vorausgesetzt und f als eine wenigstens über $\mathfrak{M}$ erklärte Abbildung dieses Raumes in einen anderen endlich-dimensionalen euklidischen Raum. Im Fall eines eindimensionalen Bildraumes sei f eine reellwertige Funktion, im allgemeinen Fall ein Vektor reellwertiger Funktionen (wir sprechen dann von sogenannten Vektroptimierungsproblemen).

Die üblichen zur Untersuchung anstehenden Fragen lassen sich stichwortartig so formulieren: Definition eines Optimalitätsbegriffs, unterschiedliche Möglichkeiten für die Darstellung der Aufgaben, Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung, Verfahren zur Berechnung von Lösungen und deren numerische Eigenschaften, Sensitivität einer Lösung, Zusammenhänge zu anderen mathematischen Fragestellungen, Anwendungsprobleme u. ä.

Aus mathematischer Sicht nimmt die Frage nach dem Optimalitätsbegriff eine Grenzstellung ein: einerseits wird er durch das zu untersuchende Problem „von außen“ eingeführt; andererseits sind mathematische Überlegungen erforderlich, ob der jeweilige „intuitive“ Begriff zu prinzipiell lösbaren, sinnvollen Modellen führt. Beschreibt f eine Punkt-Punkt-Abbildung in einen vollständig geordneten Raum, z. B. in den Raum der reellen Zahlen, so ist man im allgemeinen aller Sorgen enthoben. Problematisch wird es aber, falls f die Menge $\mathfrak{M}$ in einen halbgeordneten Raum abbildet (wie z. B. in der Vektroptimierung), oder falls f und vielleicht auch $\mathfrak{M}$ in dieser oder jener Weise vom Zufall abhängen (wie in der stochastischen Optimierung).

Im Zusammenhang mit den von uns angestrebten Betrachtungen erheischt die erwähnte Sensitivitätsanalyse eine besondere Aufmerksamkeit. In der linearen Optimierung wurde bald beobachtet, daß bestimmte Veränderungen (auch nichtlokaler Art) der Ausgangsdaten des Modells ein einmal erzieltetes Ergebnis nicht beeinflussen; mit Hilfe der Simplextableaus ließen sich solche (Teil-)Bereiche dieser Daten auch quantitativ erfassen. Andererseits wurden auch Ausgangsdaten „extremer Art“ gefunden, bei denen jede Veränderung das erhaltene Resultat sprunghaft umstößt.

Einen tieferen Einblick in die Hintergründe, die zu den eben angedeuteten Eigenschaften führten, bekam man, als begonnen wurde, sogenannte *parametrische Optimierungsaufgaben* zu betrachten. Diese kann man formal in folgender Form schreiben:

$$\text{OP}(z): \max \{f(x, z) \mid x \in \mathfrak{M}(z)\}, \quad z \in \mathfrak{Z}. \quad (1.2)$$

Die Bezeichnung parametrische Optimierung ist zunächst — ähnlich wie viele andere verbale Kennzeichnungen — etwas irreführend: Es geht weder um das Auffinden optimaler Parameter noch überhaupt um das vordergründige Bestimmen irgendwelcher optimaler Elemente. Der Ausdruck (1.2) soll vielmehr andeuten, daß wir es mit einer Klasse von Optimierungsaufgaben zu tun haben; jeder Parameter z aus der Menge $\mathfrak{Z}$, die Teilmenge eines Parameterraumes ist, führt den Ausdruck (1.2) in eine bestimmte Optimierungsaufgabe $OP(z)$ der Art (1.1) über.

Ein Untersuchungsgegenstand der parametrischen Optimierung betrifft die Kennzeichnung bestimmter Teilmengen im Parameterraum bzw. in $\mathfrak{Z}$, für deren Elemente man aus (1.2) Teilklassen von Optimierungsaufgaben mit bestimmten vorgeschriebenen Eigenschaften erhält. Wichtige Beispiele dafür sind die sogenannte *zulässige Parametermenge* $\mathfrak{B}$ der Aufgabe (1.2),

$$\mathfrak{B} = \{z \in \mathfrak{Z} \mid \mathfrak{M}(z) \neq \emptyset\}, \quad (1.3)$$

und die *Lösbarkeitsmenge* $\mathfrak{A}$ der Aufgabe (1.2),

$$\mathfrak{A} = \{z \in \mathfrak{Z} \mid OP(z) \text{ ist lösbar}\}. \quad (1.4)$$

Weitere interessierende Teilmengen des Parameterraumes sind solche, für deren jeweilige Elemente z sich Aufgaben $OP(z)$ mit Optimalmengen gleicher vorgeschriebener Struktur aus dem gegebenen parametrischen Problem (1.2) ableiten (ein Beispiel dafür sind die lokalen Stabilitätsgebiete einer linearen parametrischen Aufgabe, vgl. Abschnitt 1.3).

Unter einer *Lösung einer parametrischen Optimierungsaufgabe* (1.2) versteht man also die Bestimmung von Teilmengen des Parameterraumes, deren jeweilige Parameter das Problem (1.2) in Optimierungsaufgaben überführen, die gegenüber bestimmten Eigenschaften invariant sind. Ein angestrebtes Ergebnis ist damit das Auffinden bestimmter Strukturen im Parameterraum.

Ein weiterer Untersuchungsgegenstand der parametrischen Optimierung betrifft das Studium von Abbildungen des Parameterraumes (möglichst unter Berücksichtigung der oben erwähnten Teilmengen); Beispiele dafür sind die *Restriktionsmengenabbildung* $\mathfrak{M}(z)$, die *Lösungsfunktion*

$$\varphi(z) = \max \{f(x, z) \mid x \in \mathfrak{M}(z)\}, \quad z \in \mathfrak{A}, \quad (1.15)$$

und die *Optimalmengenabbildung*

$$\mathfrak{S}(z) = \{x \in \mathfrak{M}(z) \mid f(x, z) = \varphi(z)\}, \quad z \in \mathfrak{A}. \quad (1.6)$$

Gründe bzw. Anlässe für die Behandlung parametrischer Aufgabenstellungen können vielfacher Art sein, u. a.

- die Frage nach der Stabilität einer Lösung einer Optimierungsaufgabe,
- das Studium der Abhängigkeit der Lösungen von ihren Ausgangsdaten,
- in irgendwelcher Weise nicht gesicherte Ausgangsdaten (es ist z. B. für gewisse Größen nur das Intervall bekannt, in dem sie liegen; bestimmte Größen können zufälliger Art sein),
- das Auffinden leicht berechenbarer Vertreter in einer Klasse von Optimierungsaufgaben,
- das Gewinnen von Hilfsmitteln zur Behandlung bzw. Beurteilung anderer Optimierungsaufgaben,

- das Studium allgemeiner Eigenschaften bestimmter Aufgabenklassen und die Entwicklung einer allgemeinen Methodik.

Diese Aufzählung strebt keine Vollständigkeit an; manche Fragestellungen überlappen sich. Eine beabsichtigte Untersuchung würde in jedem Fall eine Präzisierung der Gründe erfordern (u. a. um einen mathematisch gesicherten Ausgangspunkt zu gewinnen, um den im allgemeinen sehr hohen Rechenaufwand zu mindern usw.).

Die in diesem Buch zusammengefaßten Artikel nehmen vor allen Dingen — wie in der Einführung vermerkt — auf die lineare parametrische Optimierung Bezug. Auf diesem Gebiet liegt eine ausgearbeitete Theorie vor, die angewandten Methoden sind teilweise verallgemeinerungsfähig; manche Eigenschaften bestimmter anderer Optimierungsaufgaben (parametrischer wie nichtparametrischer Art) lassen sich aus ihnen herleiten.

Eine *parametrische Aufgabe* (1.2) heißt *linear*, falls sie darstellbar ist in der Form

$$\tilde{L}(z): \max \{c(z)x \mid x \in \mathfrak{M}(z)\}, \quad z \in \mathfrak{Z},$$

wobei $\mathfrak{M}(z) = \{x \in R^n \mid A(z)x = b(z), x \geq 0\};$ (1.7)

weiter wird vorausgesetzt, daß die Komponenten der Vektoren $c(z)$ und $b(z)$ sowie die Elemente der (m, n) -Matrix $A(z)$ affin-lineare Funktionen des Parametervektors z sind (zur Bezeichnungsweise vgl. Abschnitt 1.2).

Die in diesem Kapitel angestrebte Übersicht bezieht sich auf Aufgaben der Art (1.7), bei denen die Matrix A unabhängig vom Parametervektor z ist: $A(z) \equiv A$, $z \in \mathfrak{Z}$. Auf den Fall parameterabhängiger Matrizen $A(z)$ geht das zweite Kapitel ein.

Die Vorzüge linearer parametrischer Optimierungsaufgaben ergeben sich daraus, daß die Untersuchungen auf die umfassend ausgebaute Theorie der linearen Optimierung zurückgreifen können, daß Aussagen globaler Art möglich sind, und daß schließlich für umfangreiche Problemklassen übersichtliche und prinzipiell berechenbare Strukturen aufgedeckt wurden.

1.2. Bezeichnungen, Vereinbarungen, Begriffe

Die in diesem Buche vorgestellten Untersuchungen erfolgen durchweg in endlich-dimensionalen euklidischen Räumen R^m , der Index m bezeichnet die Dimension. Elemente und Teilmengen dieser Räume werden, falls es zur Unterscheidung erforderlich ist, ebenfalls mit hochgestellten Indizes versehen. Eine Ausnahme hiervon bilden die Elemente des R^1 (also z. B. Komponenten von Vektoren), die untere Indizes erhalten. Ein Beispiel:

$$x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathfrak{M} \subset R^m, \quad \mathfrak{M} \neq R^m.$$

Das Inklusionszeichen $\subset$ wird in dem Sinne verwendet, daß jedes Element der vorstehenden Menge auch Element der nachgestellten Menge ist; besteht ein Anlaß, auf die Verschiedenheit beider Mengen hinzuweisen, so erfolgt das in der im Beispiel angeführten Weise.

Unter dem *relativ Inneren* einer konvexen Menge $\mathfrak{M}$ (Symbol: $\text{rel int } \mathfrak{M}$) wird die Gesamtheit der inneren Punkte von $\mathfrak{M}$ bezüglich der linearen Mannigfaltigkeit kleinster Dimensionen verstanden, die $\mathfrak{M}$ enthält. Beziehen sich die Betrachtungen auf den gesamten Raum, so wird gegebenenfalls das Zeichen ‚int‘ oder zur Hervorhebung auch ‚abs int‘ verwendet. Auf die Beiworte „abgeschlossen“ bzw. „offen“ wird