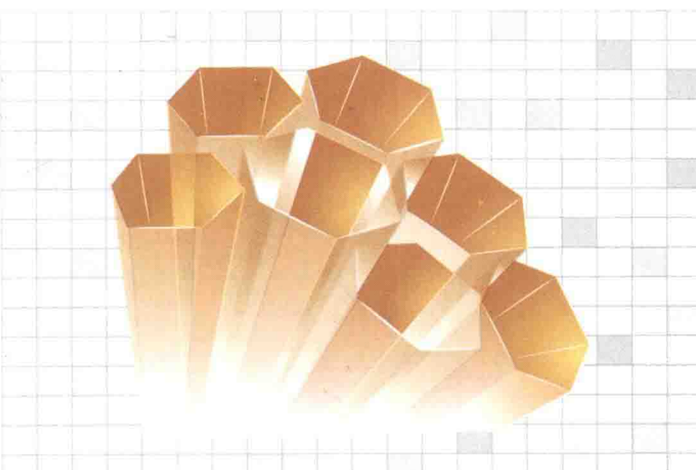
信息环境下大学数学课程改革系列教材
高等学校应用型创新型人才培养系列教材

线性代数及应用

（经管类）

苏燕玲　许　静　张鹏鸽　编著



西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

信息环境下大学数学课程改革系列教材
高等学校应用型创新型人才培养系列教材

线性代数及应用

(经管类)

苏燕玲　许　静　张鹏鸽　编著

西安电子科技大学出版社

内容简介

全书共分4章，第1、2章以矩阵和向量为主线展开讨论，第3章讨论了线性方程组及最小二乘解，第4章以矩阵的特征值、特征向量、矩阵的相似对角化和化二次型为标准形为主线展开讨论。

全书在体系安排上突出矩阵方法，从始至终贯穿初等变换的作用；内容安排上从问题入手，配以几何图形解释，形象直观；理论部分从具体到抽象、由易到难，分散了难点；重要计算都给出了通过MATLAB实现的例子，每章最后一节都给出了应用案例。

本书可供高等学校经济管理类专业学生选用，也可供理工科学生及有关经济管理人员参考。

★ 本书配有电子教案，需要者可登录出版社网站，免费下载。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及应用：经管类/苏燕玲，许静，张鹏鸽编著. 一西安：西安电子科技大学出版社，2014.1

高等学校应用型创新型人才培养系列教材

ISBN 978-7-5606-3052-6

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①苏… ②许… ③张… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第239022号

策　　划　毛红兵

责任编辑　许青青　毛红兵

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071

网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com

经　　销　新华书店

印刷单位　陕西天意印务有限责任公司

版　　次　2014年1月第1版　2014年1月第1次印刷

开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印　张　14.5

字　　数　341千字

印　　数　1～3000册

定　　价　24.00元

ISBN 978-7-5606-3052-6/O

XDUP 3344001-1

*****如有印装问题可调换*****

前　　言

从现代科学的观点出发，线性代数是组织海量数据进行科学计算的最好工具，它的重要性正是由于计算机的应用而日益提高的。

2009 年 1 月，由西安电子科技大学牵头实施使用 MATLAB 和建模实践改造工科线性代数课程项目。该项目在经济管理类学校的实施由对外经济贸易大学承担。经过两年的实施，通过与经济、金融等专业教师的交流，作者发现经济类学科越来越重视建立数学模型并进行定量分析，而目前大学生普遍缺乏应用数学工具的能力。因此，财经类院校应该重视培养大学生运用数学工具的能力，要把科学分析、计算问题作为经济类学生的培养目标之一。

为此，我们在项目实施以及调查研究和充分讨论的基础上，编写了本教材。本教材从经济管理类学生的特点出发，较好地处理了线性代数经典内容与计算机应用的关系。考虑到许多学生更容易接受形象化的概念，教材中对主要概念都给出了几何解释，有利于学生理解相关知识点；重要的计算都给出了通过 MATLAB 实现的例子，以使学生不仅会笔算，也会机算；内容安排上以矩阵为主线，辅以向量空间，重点研究矩阵、线性方程组的解法和在经济中的应用，围绕矩阵的等价、相似，把线性方程组、向量组和二次型与矩阵相对应，并引入向量空间、子空间的概念，将向量组的秩和矩阵的秩在线性关系下统一处理，加强了教学内容的系统性。最后通过大量的应用实例，说明了该课程的重要性，以提高学生学习的主动性；同时手算习题与机算习题的搭配，也为提高学生探究式的学习能力提供了丰富素材。

该教材的编写为经济管理类线性代数课程改革探索出了一条途径。使用该教材，能够提高当今大学生学习的积极性与主动性，提高他们的创新性与解决实际问题的能力，拓展他们的知识面。

本教材在编写过程中得到了各参与院校特别是西安电子科技大学的大力支持，在此表示衷心的感谢。

限于编者水平，书中难免有不妥之处，敬请读者不吝指正。

作　者
2013 年 7 月

目　　录

第 1 章　矩阵与行列式

矩阵是线性代数的主要研究对象之一，它在自然科学、工程技术、经济管理、社会科学等领域都具有广泛的应用．本章从实际问题出发，引出矩阵的概念，介绍矩阵的各种运算和行列式的有关内容．

1.1　消元法与矩阵的概念

1.1.1　消元法

引例　某食品厂收到某种食品的订单，要求该食品由甲、乙、丙、丁四种原料组成，且该食品中含蛋白质、脂肪和碳水化合物的比例分别为 15%、5%和 12%．甲、乙、丙、丁原料中含蛋白质、脂肪和碳水化合物的百分比由表 1.1 给出．

表 1.1　原 料 成 分

	甲	乙	丙	丁	成品
蛋白质(%)	20	16	10	15	15
脂肪(%)	3	8	2	5	5
碳水化合物(%)	10	25	20	5	12

那么，如何用这四种原料配置出满足要求的食品呢？

分析：设所需要的原料甲、乙、丙、丁占食品的百分比分别为 x_1，x_2，x_3，x_4，根据题意可以得到方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 20x_1 + 16x_2 + 10x_3 + 15x_4 = 15 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 5 \\ 10x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases} \tag{1-1}$$

方程组(1-1)的每一个方程中，左端是未知量 x_1，x_2，x_3，x_4 的一次齐次式，右端是常数，这样的方程组称为**线性方程组**.

对于方程组(1-1)如何求解呢？在此，不妨以 m 个方程 n 个未知量的线性方程组为例进行讨论．设 m 个方程 n 个未知量的线性方程组的一般形式如下：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1-2}$$

式(1-2)称为 **n 元线性方程组**. 其中，x_1，x_2，…，x_n 是未知量；m 是方程个数；a_{ij} ($i=1$，2，…，m；$j=1$，2，…，n)称为方程组的系数；b_j($j=1$，2，…，m)称为方程组的常数项. 系数 a_{ij} 的第一个下标 i 表示它在第 i 个方程中，第二个下标 j 表示它是未知量 x_j 的系数. 一般情况下，n 与 m 不一定相等.

若 b_1，b_2，…，b_m 全为 0，称式(1-2)为齐次线性方程组；否则，b_1，b_2，…，b_m 不全为 0，称式(1-2)为非齐次线性方程组.

线性方程组(1-2)中解的全体构成的集合称为它的解集合. 解方程组就是求其全部解，亦即求出其解集合. 如果两个方程组有相同的解集合，就称它们是**同解**.

在中学已讲到了用消元法(也称高斯消元法)求解线性方程组. 消元法的基本思想是：通过消元变换把方程组化为容易求解的同解方程组. 下面通过一个例子来复习消元法.

例 1-1 解线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2 \qquad\quad +6x_4=-2 \\ 2x_1-\ x_2+2x_3+4x_4=-2 \\ 3x_1-\ x_2+4x_3+4x_4=-3 \\ \ x_1+\ x_2+\ x_3+8x_4=2 \end{cases} \tag{1-3}$$

解 将式(1-3)中的第一个方程两端分别乘以-1、-1.5、-0.5，加到第二、三、四个方程上，消去第二、三、四个方程中的未知量 x_1，得：

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2 \qquad\quad +6x_4=-2 \\ \qquad\ x_2+2x_3-2x_4=0 \\ \qquad 2x_2+4x_3-5x_4=0 \\ \qquad 2x_2+\ x_3+5x_3=3 \end{cases} \tag{1-4}$$

将式(1-4)中的第二个方程两端分别乘以-2，加到第三、四个方程中消去 x_2，得：

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2 \qquad\quad +6x_4=-2 \\ \qquad\ x_2+2x_3-2x_4=0 \\ \qquad\qquad\qquad -\ x_4=0 \\ \qquad\qquad -3x_3+9x_4=3 \end{cases} \tag{1-5}$$

将式(1-5)中的第三个方程和第四个方程交换位置，得：

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2 \qquad\quad +6x_4=-2 \\ \qquad\ x_2+2x_3-2x_4=0 \\ \qquad\qquad -3x_3+9x_4=3 \\ \qquad\qquad\qquad -\ x_4=0 \end{cases} \tag{1-6}$$

再将式(1-6)中的第一个方程两端乘以 0.5，第三个方程两端乘以$-\dfrac{1}{3}$，第四个方程两端乘以-1，得到下面的行阶梯形方程组：

$$\begin{cases} x_1-x_2 \qquad\quad +3x_4=-1 \\ \qquad x_2+2x_3-2x_4=0 \\ \qquad\qquad\ x_3-3x_4=-1 \\ \qquad\qquad\qquad\ x_4=0 \end{cases} \tag{1-7}$$

可以进一步对方程组(1-7)进行回代：由式(1-7)中的第四个方程知 $x_4=0$，将其回代到第三个方程得 $x_3=-1$，再将 x_4 和 x_3 回代到第二、第一个方程中，分别得 $x_2=2$，$x_1=1$. 所以原方程组(1-3)的解为

$$\begin{cases} x_1 & & & & =1 \\ & x_2 & & & =2 \\ & & x_3 & & =-1 \\ & & & x_4 & =0 \end{cases} \tag{1-8}$$

这是原方程组(1-3)的解，而且是唯一的.

以上由方程组(1-3)到方程组(1-8)的变换均为同解变换. 上述过程对线性方程组作了如下三种形式的同解变换：

(1) 交换两方程的位置；

(2) 方程两边乘以不为零的数；

(3) 将一个方程的 k 倍加到另一个方程上.

方程组(1-6)的特点是自上而下的各个方程所含未知量的个数依次减少，这种形式的线性方程组称为**行阶梯形方程组**. 由原方程组化为行阶梯形方程组的过程称为**消元过程**. 由行阶梯形方程组逐次求得各未知量的过程称为**回代过程**.

从以上过程可以看出，线性方程组的解取决于其系数和常数项，若将方程的系数和常数项按照它们在方程中的相对位置不变，可以排成一个矩形的“数表”. 例如，方程组(1-3)可以对应数表

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right]$$

为了区别系数和常数项，我们可以用虚线隔开. 显然，各方程组都可以和一个数表对应，因此，对方程组进行同解变换就可转化为对这些数表进行变换. 这种矩形数表称为矩阵. 矩阵是线性代数的主要研究对象，下面介绍矩阵的概念.

1.1.2　矩阵的概念

线性代数中的很多问题在不同的数域上讨论会有不同的结论，所以下面首先介绍数域的概念.

定义 1.1　F 是由一些数组成的集合，其中 $0\in F$，$1\in F$，若 F 中任意两个数(可相同)的和、差、积、商(除数不为 0)仍然是 F 中的数，则称 F 为一个**数域**，也称 F 对加、减、乘、除运算封闭.

例如，全体有理数的集合 $\mathbf{Q}$、全体实数的集合 $\mathbf{R}$、全体复数的集合 $\mathbf{C}$ 都是数域，分别称为有理数域、实数域和复数域. 我们主要在实数域上讨论问题，个别地方扩大到复数域.

定义 1.2　由数域 F 中的 $m\times n$ 个数 a_{ij}($i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$)排成的一个 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为数域 F 上的 $m\times n$ 矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，通常用大写字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，…表示．矩阵简记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}]$，每个 a_{ij} 称为元素．

例如，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$是一个 2×4 矩阵，而 1×1 矩阵$[4]$就是数 4．下面介绍几种特殊矩阵．

（1）行数与列数都等于 n 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$，称为 **$n$ 阶方阵**，也可记做 $\boldsymbol{A}_n$．

（2）只有一行的矩阵$[a_1，a_2，\cdots，a_n]$，称为**行向量**，只有一列的矩阵$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$称为**列向量**．

（3）形如$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$的方阵（主对角线以上的元素全为 0），称为**下三角形矩阵**；形如$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$的方阵（主对角线以下的元素全为 0），称为**上三角形矩阵**．

（4）形如$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$的方阵（主对角线之外的元素全是 0，主对角线上的元素不全为 0），称为**对角矩阵**，记做 $\mathrm{diag}(a_1，a_2，\cdots，a_n)$；主对角线上元素全相等的对角矩阵 $\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}_n$ 称为**数量矩阵**；主对角线上元素全是 1 的 n 阶对角矩阵

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_n$ 称为 n 阶**单位矩阵**，记做 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{E}_n$. 显然，$\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} = a\boldsymbol{E}$.

(5) 元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，$m \times n$ 零矩阵记做 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$.

在线性方程组中，由系数和常数项组成的矩阵，称为方程组的**增广矩阵**，记做 $\bar{\boldsymbol{A}}$；仅由系数部分组成的矩阵称为方程组的**系数矩阵**，记做 $\boldsymbol{A}$. 显然，线性方程组与其增广矩阵一一对应. 例如，方程组(1-3)的增广矩阵和系数矩阵分别为

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right], \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

线性方程组的同解变换可以通过矩阵的相应变换完成.

定义 1.3　以下三种变换称为矩阵的**初等行变换**：

(1) 交换两行的位置；

(2) 某一行乘以不等于零的数；

(3) 将某一行的 k 倍加到另一行的对应元素上.

列也有如上变换，称为矩阵的**初等列变换**. 行变换与列变换统称为矩阵的**初等变换**.

在例 1-1 中，方程组(1-3)到方程组(1-8)的同解变换，可以对应下面的矩阵变换：

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

注意：① 连接矩阵初等变换的符号是箭头，而非等号. 规范的消元法是指通过矩阵的初等变换，将增广矩阵化为行阶梯形矩阵(上面第二行的第一个矩阵)，然后继续进行初等变换，完成相应的回代过程.

② 解方程时只能用三种行变换和第一种列变换，这样才能保证相应的线性方程组与原方程组同解，而不能用第二、三种列变换，因为不能保证方程组同解.

定义 1.4　如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换化成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 等价.

矩阵之间的等价关系具有下列性质：

反射性：$\boldsymbol{A}$ 与自身等价.

对称性：若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 等价.

传递性：若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 等价，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 等价.

可见，增广矩阵与经过初等变换后得到的矩阵都是等价的.

1.1.3 线性方程组几种解的情况

例 1-1 的方程组有唯一解. 非齐次方程组也可能有其他解的情况，我们举例说明.

例 1-2 解线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-x_4=6 \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=6 \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4=8 \\ 2x_1+6x_2-2x_3-2x_4=12 \end{cases}$$

解 类似于例 1-1 的做法，我们对该方程组的增广矩阵做初等行变换，化为行阶梯形矩阵：

$$\overline{\mathbf{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & -1 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 8 \\ 2 & 6 & -2 & -2 & 12 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & -10 & 8 & 0 & -12 \\ 0 & -5 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & -10 & 8 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

最后一个矩阵第 3 行对应的方程为 $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=2$，显然这是一个矛盾方程，因而原方程组是无解的.

例 1-3 解线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-4x_4+2x_5=8 \\ x_1+2x_2-3x_3+4x_4-x_5=-1 \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=3 \\ 2x_1-x_2+4x_3-6x_4+5x_5=12 \end{cases}$$

解 对该方程组的增广矩阵做初等行变换，化为行阶梯形矩阵：

$$\overline{\mathbf{A}}=\left[\begin{array}{ccccc:c} 2 & -1 & 3 & -4 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -6 & 5 & 12 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -6 & 5 & 12 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 9 & -12 & 4 & 10 \\ 0 & -5 & 8 & -10 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -14 & 7 & 14 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 9 & -12 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 9 & -12 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

最后一个矩阵对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4-x_5=-1 \\ \quad -5x_2+9x_3-12x_4+4x_5=10 \\ \qquad -x_3+2x_4-2x_5=-4 \\ \qquad\qquad x_5=0 \end{cases}$$

将 $x_5=0$ 代回第三个方程中得 $-x_3+2x_4=-4$. 该方程有两个未知量，不可能唯一确定它们的解，所以其中一个未知量可以任意赋值，称其为自由未知量，另一个则相应确定，不再“自由”，称为非自由未知量. 不妨取 x_4 为自由未知量，其余均为非自由未知量. 继续完成回代，注意用非自由未知量的系数进行回代，目的是用自由未知量表示出非自由未知量. 相应的矩阵的初等变换过程如下：

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 9 & -12 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 9 & -12 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 11 \\ 0 & -5 & 0 & 6 & 0 & -26 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & 2/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -6/5 & 0 & 26/5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

用自由未知量表示出非自由未知量的方程组为

$$\begin{cases} x_1=3/5-(2/5)x_4 \\ x_2=26/5+(6/5)x_4 \\ x_3=4+2x_4 \\ x_5=0 \end{cases}$$

令自由未知量 $x_4=c$（c 为任意常数），得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=3/5-(2/5)c \\ x_2=26/5+(6/5)c \\ x_3=4+2c \\ x_4=c \\ x_5=0 \end{cases}$$

称为方程组的一般解. 显然，该方程有无穷多解.

从以上例题可以看出，非齐次线性方程组有三种解，分别为唯一解、无解和无穷多解. 对齐次线性方程组，由于常数项全是 0，不会出现矛盾方程，所以只有唯一解和无穷多解两种情况，且只需对其系数矩阵做初等行变换即可求解. 关于线性方程组解的一般理论，我们将在第 3 章中详细介绍.

1.2　矩阵的运算

矩阵是线性代数研究的主要对象，这一节介绍矩阵的运算及其运算法则. 在 1.1 节做矩阵的初等变换时，我们是用箭头连接矩阵，而不是等号，那么什么是矩阵相等呢？

定义 1.5　两个矩阵的行数对应相等，列数对应相等时，称为**同型矩阵**. 设同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，如果两矩阵中的对应元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$），称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等，记做 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

1.2.1　矩阵的线性运算

定义 1.6　设有两个同型的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记做 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 记做 $-\boldsymbol{A}$，称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵. 显然有 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

由此可定义矩阵的减法为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

定义 1.7　数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的乘积，简称数乘，记做 $\lambda\boldsymbol{A}$，规定：

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵的加法和数乘统称为矩阵的**线性运算**. 矩阵的线性运算满足下列运算规律（$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 是同型矩阵，λ、μ 是数）：

（1）交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

（2）结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

（3）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$.

（4）$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

（5）$1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

（6）$(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})$.

（7）$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$.

（8）分配律：$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

例 1-4　甲、乙、丙三位学生在期末考试中，四门课程的成绩由表 1.2 给出，而他们的平时成绩则由表 1.3 给出，若期末考试成绩占总成绩的 90%，而平时成绩占 10%，请用矩阵运算来表述这三名学生的总成绩.

表 1.2　期末考试成绩

课程 / 学生	英语	高数	概率	线性代数
甲	85	85	65	98
乙	75	95	70	95
丙	80	70	76	92

表 1.3　平 时 成 绩

课程 / 学生	英语	高数	概率	线性代数
甲	90	70	80	92
乙	80	90	82	92
丙	85	75	90	90

解　用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来表示期末成绩：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}85 & 85 & 65 & 98\\75 & 95 & 70 & 95\\80 & 70 & 76 & 92\end{bmatrix}$$

用矩阵 $\boldsymbol{B}$ 来表示平时成绩：

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}90 & 70 & 80 & 92\\80 & 90 & 82 & 92\\85 & 75 & 90 & 90\end{bmatrix}$$

根据题意知，三名同学的总成绩可以用矩阵 $\boldsymbol{C}$ 来表示，具体运算如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}=0.9\boldsymbol{A}+0.1\boldsymbol{B}&=\begin{bmatrix}85\times 0.9 & 85\times 0.9 & 65\times 0.9 & 98\times 0.9\\75\times 0.9 & 95\times 0.9 & 70\times 0.9 & 95\times 0.9\\80\times 0.9 & 70\times 0.9 & 76\times 0.9 & 92\times 0.9\end{bmatrix}\\&\quad+\begin{bmatrix}90\times 0.1 & 70\times 0.1 & 80\times 0.1 & 92\times 0.1\\80\times 0.1 & 90\times 0.1 & 82\times 0.1 & 92\times 0.1\\85\times 0.1 & 75\times 0.1 & 90\times 0.1 & 90\times 0.1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}85.5 & 83.5 & 66.5 & 97.4\\75.5 & 94.5 & 71.2 & 94.7\\80.5 & 70.5 & 77.4 & 91.8\end{bmatrix}\end{aligned}$$

1.2.2　矩阵的乘法

定义 1.8　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，那么 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$，记为 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$
$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

记做 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

由定义知，**只有左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘**. 乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 等于左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行各元素与右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列相应元素乘积之和，即

$$AB=i\text{行}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{is}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{ms}\end{bmatrix}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phantom{b_{11}} & & j\text{列} & & \phantom{b_{1n}} \end{array}\\ \begin{bmatrix} b_{11}&\cdots&b_{1j}&\cdots&b_{1n}\\ b_{21}&\cdots&b_{2j}&\cdots&b_{2n}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ b_{s1}&\cdots&b_{sj}&\cdots&b_{sn}\end{bmatrix}\end{array}$$

$$=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phantom{c_{11}} & & j\text{列} & & \phantom{c_{1n}} \end{array}\\ \begin{bmatrix} c_{11}&\cdots&c_{1j}&\cdots&c_{1n}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ c_{i1}&\cdots&c_{ij}&\cdots&c_{in}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ c_{m1}&\cdots&c_{mj}&\vdots&c_{mn}\end{bmatrix}\end{array} i\text{行}=C$$

例 1－5　已知 $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&4&0\\-2&5&6\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}10&20\\-10&30\\-5&8\end{bmatrix}$，求 AB 和 BA.

解　根据矩阵乘法定义，有：

$$AB=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&4&0\\-2&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10&20\\-10&30\\-5&8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times10+2\times(-10)+(-1)\times(-5) & 1\times20+2\times30+(-1)\times8\\ 3\times10+4\times(-10)+0\times(-5) & 3\times20+4\times30+0\times8\\ (-2)\times10+5\times(-10)+6\times(-5) & (-2)\times20+5\times30+6\times8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5&72\\-10&180\\-100&158\end{bmatrix}$$

由于矩阵 B 有 2 列，矩阵 A 有 3 行，所以 B 不能左乘 A.

例 1－6　(1) 设 $A=[1, 2, 3]$，$B=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$，求 AB 和 BA.

解

$$AB=[1, 2, 3]\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}=1\times4+2\times5+3\times6=32$$

当矩阵只有一行一列时，我们往往省去括号，即可以理解为一个数.

$$BA=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}[1, 2, 3]=\begin{bmatrix}4&8&12\\5&10&15\\6&12&18\end{bmatrix}$$

(2) 设 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}$，计算 AB 和 BA.