最新智能天线

设计与应用新技术指导手册

◎主　编：张　斌

科学技术出版社

最新智能天线

设计与应用新技术指导手册

最新智能天线设计与应用新技术指导手册

主编　张　斌

第三卷

科学技术出版社

二、后向线性预测滤波器

前向预测是根据 $x(n-1),\cdots,x(n-m)$预测 $x(n)$。相应地,由 $x(n-m+1),\cdots,x(n)$预测 $x(n-m)$,就称为后向预测。这两种预测如图 3－2 所示。

对 $x(n-m)$的后向线性预测可表示为.

$$\hat{x}(n-m)=-\sum_{k=1}^{m}b_{mk}x(n-m+k) \tag{3-13}$$

相应的后向线性预测误差为

$$\begin{aligned} e_m^b(n) &= x(n-m)-\hat{x}(n-m) \\ &= x(n-m)+\sum_{k=1}^{m}b_{mk}x(n-m+k) \end{aligned} \tag{3-14}$$

类似地,可画出后向线性预测滤波器和后向线性预测误差滤波器的框图,如图 3－3 所示。

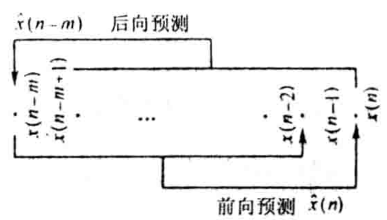

图 3－2　前向预测和后向预测

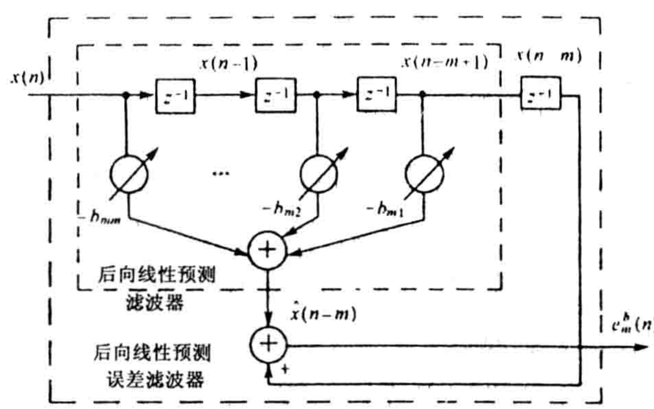

图 3－3　后向线性预测滤波器

对于最佳的 b_{mk}值有

$$\frac{\partial E\{[e_m^b(n)]^2\}}{\partial b_{mk}}=0 \quad 1\leqslant k\leqslant m \tag{3-15}$$

从而有

$$E\{e_m^b(n)x(n-m+k)\}=0 \quad 1\leqslant k\leqslant m \tag{3-16}$$

这就是后向线性预测的正交原理。

将 $e_m^b(n)$ 的表达式(3－13)代入式(3－16)得

$$r(k)+\sum_{i=1}^{m}b_{mi}r(k-i)=0 \quad 1\leqslant k\leqslant m \tag{3-17}$$

比较式(3－17)和(3－10)可看出，最佳的 a_{mk} 触和 b_{mk} 满足同样的方程组。所以

$$a_{mk}=b_{mk} \quad 1\leqslant k\leqslant m \tag{3-18}$$

后向预测误差滤波器的传输函数为

$$H_m^b(z)=E_m^b(z)/X(z)=z^{-m}(1+\sum_{k=1}^{m}b_{mk}z^k) \tag{3-19}$$

其中 $E_m^b(z)$ 为 $e_m^b(n)$ 的 z 变换。因对于最佳预测式(3－18)成立，所以由式(3－19)及式(3－4)可得

$$H_m^b(z)=z^{-m}H_m^f(z^{-1}) \tag{3-20}$$

对于最佳后向预测，由式(3－16)可得最小后向预测误差功率为

$$\varepsilon_m^b=r(0)+\sum_{i=1}^{m}b_{mi}r(i) \tag{3-21}$$

根据式(3－18)，式(3－21)和式(3－11)相同，所以可令其为 ε_m，即

$$\varepsilon_m=\varepsilon_m^f=\varepsilon_m^b$$

(3－22)结合式(3－18)和式(3－21)，可得类似于式(3－12)的矩阵方程

$$\left\{\begin{matrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r(m-1) & r(m-2) & \cdots & r(1) \\ r(m) & r(m-1) & \cdots & r(0)\end{matrix}\right] \begin{bmatrix} b_{mm} \\ \vdots \\ b_{m1} \\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon_m\end{bmatrix} \tag{3-23}$$

三、Levimon－Durbin 算法

定义前向预测误差 $e_m^f(n)$ 和后向预测误差 $e_m^b(n)$ 的相关系数为

$$\Delta_{m+1}+=E\{e_m^f(n)e_m^b(n-1)\} \tag{3-24}$$

对于最佳预测系数，根据正交原理(式 3－6 和式 3－16)，不难得到

$$\Delta_{m+1}=r(m+1)+\sum_{i=1}^{m}a_{mi}r(m+1-i) \tag{3-25}$$

将式(3－25)加到 $m+1$ 个方程的方程组(3－12)上，得到 $m+2$ 个方程的方程组：

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(m) & r(m+1) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(m-1) & r(m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r(m) & r(m-1) & \cdots & r(0) & r(1) \\ r(m+1) & r(m) & \cdots & r(1) & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mm} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta_{m+1} \end{bmatrix} \tag{3-26}$$

因为这个方程组的系数矩阵是对称的和 *Toeplitz* 的(各对角线的元素相等),所以首先颠倒方程的次序,再颠倒变量的次序,就得到如下的方程组:

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(m) & r(m+1) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(m-1) & r(m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r(m) & r(m-1) & \cdots & r(0) & r(1) \\ r(m+1) & r(m) & \cdots & r(1) & r(0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a_{mm} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{m+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon_m \end{bmatrix} \tag{3-27}$$

引入系数 K_{m+1},并将式(3-26)和式(3-27)组合起来

$$\left\{\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(m) & r(m+1) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(m-1) & r(m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r(m) & r(m-1) & \cdots & r(0) & r(1) \\ r(m+!) & r(m) & \cdots & r(1) & r(0) \end{bmatrix}\right\} \left\{ P \begin{bmatrix} 1 \\ a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mm} \\ 0 \end{bmatrix} + K_{m+1} \begin{bmatrix} 0 \\ a_{mm} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta_{m+1} \end{matrix} \right\} + K_{m+1} \begin{bmatrix} \Delta_{m+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon_m \end{bmatrix} \right\} \tag{3-28}$$

但是,另一方面对于 $m+1$ 阶前向线性预测滤波器有

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(m) & r(m+1) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(m-1) & r(m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r(m) & r(m-1) & \cdots & r(0) & r(1) \\ r(m+1) & r(m) & \cdots & r(1) & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{m+1,1} \\ \vdots \\ a_{m+1,m} \\ a_{m+1,m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{m+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-9}$$

比较式(3－28)和式(3－29)，就得到下列的求解最佳线性预测系数的 Levinson－Durbin 算法：

$$\left.\begin{aligned} & a_{m+1,k} = a_{mk} + K_{m+1} a_{m,m+1-k} \quad 1 \leqslant k \leqslant m \\ & a_{m+1,m+1} = K_{m+1} \\ & \varepsilon_{m+1} = (1 - K_{m+1}^2)\varepsilon_m \\ & K(m+1) = \frac{\Delta_{m+1}}{\varepsilon_m} = -\left[r(m+1) + \sum_{k=1}^{m} a_{mk} r(m+1-k) \right] / \varepsilon_m \end{aligned}\right\} \tag{3-30}$$

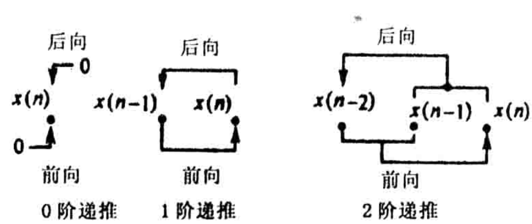

图 3－4　最初的几阶线性预测

对于零阶递推(见图 3－4)有

$$e_0^f(n) = x(n)$$

$$K_0 = 0$$

$$\varepsilon_0 = E\{[e_0^f(n)]^2\} = E\{x^2(n)\} = r(0)$$

对于 1 阶递推，即在式(3－30)中令 $m+1=1$，可得

$$e_1(n) = x(n) + a_{11}x(n-1)$$

$$a_{11} = K_1 = -r(1)/r(0)$$

$$\varepsilon_1 = (1 - K_1^2)\varepsilon_0 = (1 - K_1^2)r(0)$$

对于二阶递推则有

$$E_2^f(n) = x(n) + a_{21}x(n-1) + a_{22}x(n-2)$$

$$a_{21} = a_{11} + K_2 a_{11} = (1 + K_2)a_{11}$$

$$a_{22} = K_2 = -[r(2) + a_{11}r(1)]/\varepsilon_1$$

$$\varepsilon_2 = (1 - K_2^2)\varepsilon_1$$

根据上列的初始值,由给定的相关函数值即可由式(3－30)推出各阶的最佳线性预测滤波器系数。

从 Levin.son－Durbin 递推公式(3－30)可看出,从 m 阶到 $m+1$ 阶时,需要 $2m+3$ 次乘除法和 $2m+1$ 次加减法,或者说运算量为 $O(m)$。因此,对于从 $m=1$ 到 $m+1$ 所有递推的运算量的数量级为 $1+2+\cdots+m = m(m+1)/2$,即 $O(m^2)$,对比高斯消元法和 Cholesky 分解法所要求的 $O(m^3)$运算量,可以看出 IJvinson－Durbin 算法的有效性。

式(3－30)中的 K_m 在线性预测中起着重要作用。这将在后面详叙。这里先简单讨论一下。由式(3－30)可知,$\varepsilon_m(1-K_m^2)\varepsilon_{m-1}$,所以为了保证预测误差 ε_m 愈来愈小(这时的预测误差才是稳定的),就要求

$$|K_m| \leqslant 1 \tag{3-31}$$

这类似于传输线的情况(见图 3－5),则有

$$\varepsilon_{m入} = \varepsilon_{m-1入} - \varepsilon_{M-1反} = (1 - K_m^2)\varepsilon_{m-1入} \tag{3-32}$$

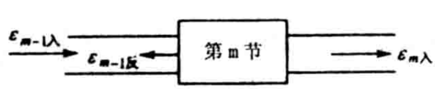

图 3－5　传轴线

其中 K_m 称为反射系数。对照式(3－30)和式(3－32),式(3－30)中的 K_m 也称为反射系数。再有,根据式(3－24)和式(3－30)可得

$$K_{m+1} = -\frac{\Delta_{m+1}}{\varepsilon_m} = -\frac{E\{e_m^f(n)e_m^b(n-1)\}}{E\{e_m^f(n)]^2\}} = \frac{E\{e_m^f(n)e_m^b(n-1)\}}{E\{e_m^b(n-1)]^2\}} \tag{3-33}$$

所以,K_m 又称为偏相关系数(PAROOR)。

第二节　格形滤波器

一、由预测滤波器推导格形滤波器

现在,用 z 变换来求 $H_m^f(z)$ 及 $H_m^b(z)$ 的递推关系。由式(3－4)有

$$H_{m+1}^f(z)=1+\sum_{k-1}^{m+1}a_{m+1,k}z^{-k} \tag{3-34}$$

利用式(3－30)的递推关系可得

$$\begin{aligned}H_{m+1}^f(z)&=1+a_{m+1,m+1}z^{-(m+1)}+\sum_{k=1}^{m}(a_{mk}+K_{m+1}a_{m,m+1-k})z^{-k}\\&=(1+\sum_{k=1}^{m}a_{mk}z^{-k})+K_{m+1}(z^{-(m+)}+\sum_{k=1}^{k}a_{m,m+1-k}z^{-k})\end{aligned} \tag{3-35}$$

利用 $H_m^b(z)$ 的表达式(3－19),并根据 b_{mk} 和 a_{mk} 相等,式(3－35)可写成

$$H_{m+1}^f(z)=H_m^f(z)+K_{m+1}z^{-1}H_m^b(z) \tag{3-36}$$

同理可推出

$$H_{m+1}^b(z)=z^{-1}H_{b_m}(z)+K_{m+1}H_m^f(z) \tag{3-37}$$

根据传输函数 $H_m^f(z)$、$H_m^b(z)$ 的定义,由式(3－36)可得

$$E_{m+1}^f(z)=E_m^f(z)+K^{m+1}z^{-1}E_m^b(z) \tag{3-38}$$

$$E_{m+1}^b(z)=z^{-1}E_m^b(z)+K_{m+1}E_m^f(z) \tag{3-39}$$

相应的时域递推公式为

$$e_{m+1}^f(n)=e_m^f(n)+K_{m+1}e_m^b(n-1) \tag{3-40}$$

$$e_{m+1}^b(n)=e_m^b(n-1)+K_{m+1}e_m^f(n) \tag{3-41}$$

这就是格形滤波器的递推公式。这种格形滤波器对应只有传输零点的横向滤波器,所以称为全零点格形滤波器。根据式(3－40)立即可画出第 $m+1$ 环节全零点格形滤波器的结构,如图 3－6(a)所示。因为对于零阶滤波器有(见图 3－4)

$$e_0^f(n)=e_0^b(n)=x(n) \tag{3-42}$$

所以,整个 $m+1$ 阶全零点格形滤波器的结构就如图 3－6(b)的形式。

二、格形滤波器的特性

前面已经讨论了一些格形滤波器的特性,比如它的模块式结构。现在继续讨论其性质。

1. 正交性

下面有两个正交关系:

$$E\{e_m^f(n)x(n-k)\}=0\quad 1\leqslant k\leqslant m$$

$$E\{e_m^b(n)x(n+m-k)\}=0\quad 1\leqslant k\leqslant m$$

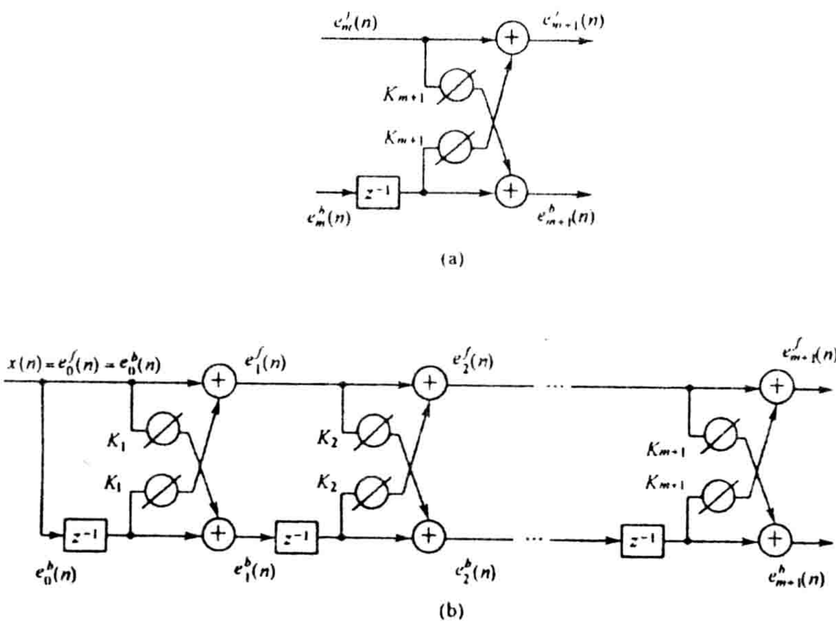

图 3－6　全零点格形滤波器

根据这两式可证明定理 3.1。

<定理 3.1>各阶后向预测误差相互正交,即

$$E\{e_i^g(n)e_j^b(n)\}=0\quad i\neq j \tag{3-43}$$

证:不失一般性,设 $i<j$。根据式(3－15),$e_j^b(n)$与 $x(n-j+1),\cdots,x(n-i),x(n-i+1),\cdots,x(n)$正交。但 $e_i^b(n)$为 $x(n-i),x(n-i+1),\cdots,x(n)$的线性组合,所以 $e_j^b(n)$与 $e_j^b(n)$正交(见图 3－7)。

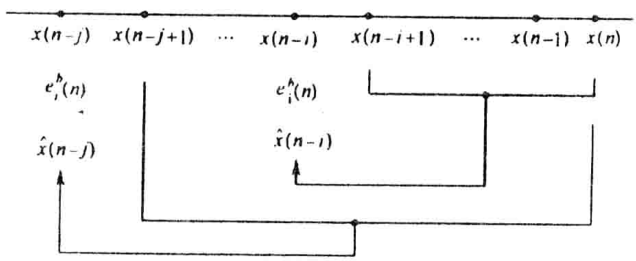

图 3－7　$e_j^b(n)$和 $e_j^b(n)$正交示意图

根据定理 3.1，格形滤波器将输入数据率 $x(n)$，$x(n-1)$，⋯，$x(n-m)$转换成相互正交的数据串 $e_0^b(n)=x(n)$，$e_1^b(n)$，⋯，$e_m^b(n)$。这种转换就是大家熟知的 Gram－Schmidt 正交化变换。

2. 相关函数和反射系数的关系

＜定理 3.2＞　平稳时间序列 $x(n)$的相关函数值 $r(0)$，$r(1)$，⋯$r(M)$由 $r(0)$，K_1，⋯，K_M 完全确定。反之亦然。

证：正命题。设给定 $r(0)$，K_1，⋯，K_M，则由 *Levinson－Durbin* 递推式(3－30)，从 1 阶开始可得各阶预测误差系数 a_{mi1}⋯，A_{mm}($m=1$，⋯，M)。最后可得到 a_{M1}，⋯，a_{MM}，ε_M。根据这 $M+1$ 个值就可由 *Yule－Walker* 方程得到 $r(0)$，$r(1)$，⋯，$r(M)$。

逆命题。给定 $r(0)$，$r(1)$，⋯，$r(M)$则由 Levinson－Durbin 公式(3－30)即可定出 $r(0)$，K_1，⋯，K_M。

定理 3.2 说明，平稳随机序列不但可以由其函数序列 $r(0)$，⋯，$r(M)$表征，还可以由其反射系数序列 $r(0)$，K_1，⋯表征。

＜定理 3.3＞预测误差滤波器 $H_m^f(z)$的零点在单位圆内，即 $H_m^f(z)$为最小相位滤波器。

三、格形滤波器的各种形式

将式(3－40)的各项次序变更一下，可将式(3－40)变成

$$e_{m-1}^f(n)=e_m^f(n)-K_m e_{m-1}^b(n-1) \tag{3-44}$$

$$e_m^b(n)=e_{m-1}^b(n-1)+K_m e_{m-1}^f(n) \tag{3-45}$$

从而得到图 3－8 所示的格形滤波器结构。图 3－8 中还利用了关系式(3－42)。这是从 $e_m^f(n)$到 $e_0^f(n)=x(n)$的传输形式。利用式(3－4)，可得这种方式之传输函数为

$$H(z)=X(z)/E_m^f(z)=\{1+\sum_{k=1}^{m}a_{mk}z^{-k}\}^{-1} \tag{3-45}$$

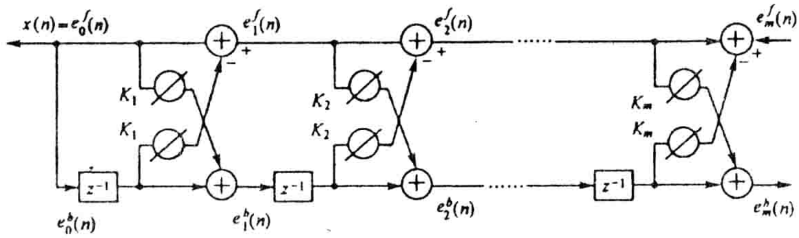

图 3－8

因此这种滤波器称为全极点格形滤波器。它对应的横式滤波器如图 3－9 所示。

由式(3－44)还得到全极点格形滤波器的另一种形式。实际上,将式(3－44)代入式(3－45)得

$$e_m^b(n)=K_me_m^f(n)+(1-K_m^2)e_{m-1}^b(n) \tag{3-46}$$

式(3－46)与式(3－44)结合即构成图 3－10 所示的全极点格形滤波器结构。这种结构除去了交叉连接。

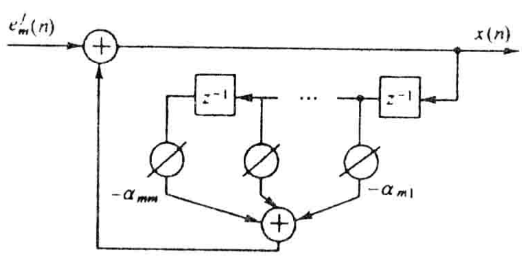

图 3－9　全极点横式滤波器

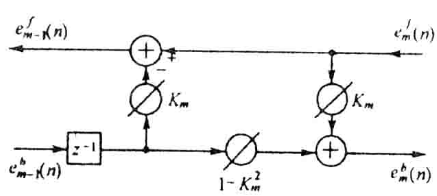

图 3－10　无交叉连接的全极点格形滤波器

对于既有零点又有极点的传输函数

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\alpha_0+\alpha_1z^{-1}+\cdots+a_mz^{-m}}{1+\beta_1z^{-1}+\cdots\beta_mz^{-m}} \tag{3-47}$$

其横式滤波器结构如图 3－11 所示。相应的格形滤波器结构如图 3－12 所示。2 阶零极

点横式滤波器与格形滤波器的转换关系列与表 3 – 1。

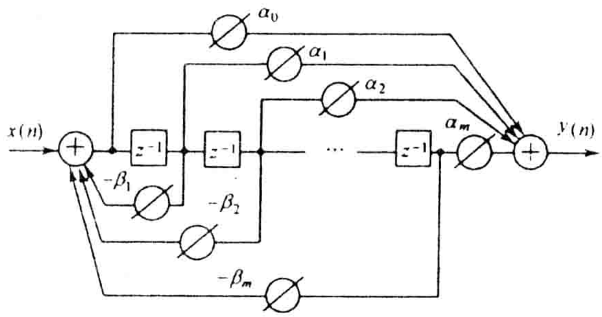

图 3 – 11　零极点横式滤波器

表 3 – 1　二阶零极点滤波器的换算

横式到格形	$\gamma_0=\alpha_0-\dfrac{\beta_1(\alpha_1-\alpha_2\beta_1)}{1+\beta_2}-\alpha_2\beta_2$ $\gamma_1=\alpha_1-\alpha_2\beta_1$ $\gamma_2=\alpha_2$ $K_1=\dfrac{\beta_1}{1+\beta_2}$ $K_2=\beta_2$
格形到横式	$\alpha_0=\gamma_0+\gamma_1K_1+\gamma_2K2$ $\alpha_1=\gamma_1+\gamma_2K_1(1+K_2)$ $\alpha_2=\gamma_2$ $\beta_1=K_1(1+K_2)$ $\beta_2=K_2$

四、复信号的预测滤波器和格形滤波器

当信号 $x(n)$ 为复信号时，前向线性预测误差仍为式(3 – 2)。$E_m^f(z)$ 的表达式(3 – 3)及传输函数表达式(3 – 4)也仍然成立。

a_{mk} 的最佳值应求满足方程

$$\frac{\partial E\{|e_m^f(n)|^2\}}{\partial a_{mk}}=0 \quad 1\leqslant k\leqslant m \tag{3-48}$$

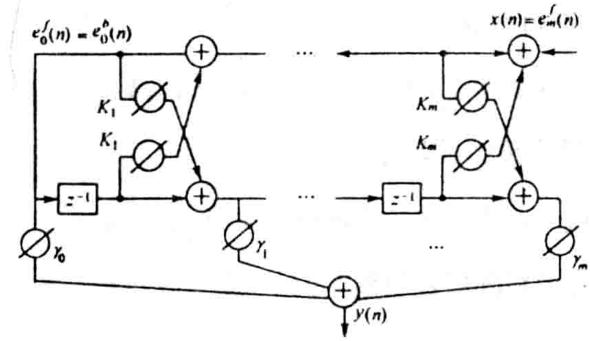

图 3－12　零极点格形滤波器

的 a_{mk}值。为此将有关分量分成实部和虚部

$$x(n)=\mathrm{Re}x(n)+\mathrm{jIm}x(n) \tag{3-49}$$

$$a_{mk}=\mathrm{Re}a_{mk}+\mathrm{jIm}a_{mk} \tag{3-50}$$

$$e_m^f(n)=A+\mathrm{j}B=x(n)+\sum_{k=1}^{m}a_{mk}x(n-k) \tag{3-51}$$

其中 Re、Im 分别表示实部与虚部。

将式(3－49)和式(3－50)代入式(3－51)得

$$A=\mathrm{Re}x(n)+\sum_{k=1}^{m}[\mathrm{Re}a_{mk}\mathrm{Re}x(n-k)-\mathrm{Im}a_{mk}\mathrm{Im}x(n-k)] \tag{3-52a}$$

$$B=\mathrm{Im}x(n)+\sum_{k=1}^{m}[\mathrm{Re}a_{mk}\mathrm{Im}x(n-k)+\mathrm{Re}x(n-k)\mathrm{Im}a_{mk}] \tag{3-52b}$$

根据附录 A 所定义的实函数 $E\{|e_m^f(n)|^2\}$对复变量的导数公式得到

$$\frac{\partial E\{|e_m^f(n)|^2\}}{\partial a_{mk}}=\frac{\partial E\{A^2+B^2\}}{\partial\mathrm{Re}a_{mk}}+j\frac{\partial E\{A^2+B^2\}}{\partial\mathrm{Im}a_{mk}}=0 \tag{3-53}$$

将式(3－52)代入式(3－53)经简单推导就可得到

$$E\{e_m^f(n)x^*(n-k)\}=0\quad 1\leqslant k\leqslant m \tag{3-54}$$

这就是复信号情况下的前向预测正交原理。

将 $e_m^f(n)$的表达式(3－2)代入式(3－54)得到

$$E\{\{x(n)+\sum_{i=1}^{m}a_{mi}x(n-i)\}x^*(n-k)\}=0 \tag{3-55}$$

定义平稳过程 $x(n)$的自相关函数为

$$r(k)=E\{x(n)x^*(n-k)\} \tag{3-56}$$

则有

$$r(-k)=r^*(k) \tag{3-57}$$

根据式(3－56),式(3－55)可写成

$$r(k)+\sum_{i=1}^{m}a1\ mir(k-i)=0\quad 1\leqslant k\leqslant m \tag{3－58}$$

对应于最佳预测系数的最小预测误差为

$$\varepsilon_m=E\{|e_m^f(n)|_2\}min=r(0)+\sum_{i=1}^{m}a_{mi}r(-i) \tag{3－59}$$

式(3－58)和式(3－59)写成矩阵形式就是

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(-1) & \cdots & r(-m) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(1-m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r(m) & r(m-1) & \cdots & r(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3－60}$$

对后向预测,定义式(3－13)和传输函数式(3－18)仍然有效。同样有,最佳后向预测系数满足正交原理

$$E\{e_m^b(n)x^*(n-m+k)\}=0 \tag{3－61}$$

据此可推出最佳后向预测系数所满足的方程组并且有

$$b_{mk}=a_{mk}^*\quad 1\leqslant k\leqslant m \tag{3－62}$$

最小后向预测误差为

$$E\{|e_m^b(n)|^2\}=\varepsilon_m \tag{3－63}$$

定义前向预测误差和后向预测误差的相关系数为

$$\Delta_{m+1}=E\{e_m^f(n)[e_m^b(n-1)]^*\} \tag{3－64}$$

并进行与实信号情况类似的推导,即得对复信号的 Levinson－Durbin 递推公式为

$$\left.\begin{aligned} & a_{m+1,k}=a_{mk}+K_{m+1}a_{m,m+1-k}^*\quad 1\leqslant k\leqslant m \\ & a_{m+1,m+1}=K_{m+1} \\ & \varepsilon_{m+1}=(1-|K_{m+1}|^2)\varepsilon\sum_{k=1}^{m}{}_m \\ & K_{m+1}=-\frac{\Delta_{m+1}}{\varepsilon_m}=-[r(m+1)+\sum_{k=1}^{m}a^{mk}r(m+1-k)]/\varepsilon_m \\ & \varepsilon_0=r(0)=E\{x^2(n)\} \end{aligned}\right\} \tag{3－65}$$

对复信号的全极点格形滤波器公式为

$$d^f_{m+1}(n) = e^f_m(n) + K_{m+1}e^b_m(n-1) \tag{3-66a}$$

$$e^b_{m+1}(n) = e^b_m(n-1) + K^*_{m+1}e^f_m(n) \tag{3-66b}$$

初始条件仍然是

$$e^f_0(n) = e^b_0(n) = x(n) \tag{3-67}$$

从而对于复信号的全零点格形滤波器的结构如图 3 – 13 所示。前面所讨论的对于实信号的格形滤波器的各种性质和结构均可推广到复信号的情况。

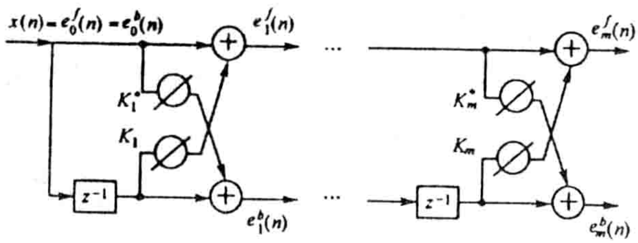

图 3 – 13　复信号全零点格形滤波器

第三节　最小均方误差自适应格形滤波器

一、自适应格形滤波器的批处理算法

前面由最小均方误差意义下的最佳线性预测滤波器导出了最佳格形滤波器。其结构由下列公式决定

$$e^f_{m+1}(n) = e^f_m(n) + K_{m+1}e^b_m(n-1)$$

$$e^b_{m+1}(n) = e^b_m(n-1) + K_{m+1}e^f_m(n)$$

$$e^f_0(n) = e^b_0(n) = x(n)$$

下面来讨论给定格形滤波器结构(式 3 – 40 和式 3 – 41)求其最佳参量,即最佳 K_m 的问题。

若已知输入数据的相关函数,则可利用 Levinson – Durbin 算法(式 3 – 30)算出最佳 K_m。然而,通常已知的是数据 $x(n)$而不是其相关函数。这时为计算最佳 K_m,一种办法是由已知数据估计相关函数,再由相关函数根据 Levinson – Durbin 算法计算最佳 K_m。这

是一种“批处理算法”。它在语音处理中得到了应用。

下面讨论直接根据数据计算最佳 K_m 的方法。我们知道，M 阶格形滤波器由 M 个环节组成。根据 Levinson－Burbin 公式，只要前 m 个环节（$m=1,2,\cdots,M$）的参量 K_m 为最佳，相应的预测误差功率 $E\{[e_m^f(n)]^2\}$ 和 $E\{[e_m^b(n)]^2\}$ 就是最小值。这就是说，后面的环节对前面的环节参量最佳值无影响。这样，假设已有由 $m-1$ 个环节组成的 $m-1$ 阶格形，现在再加一个第 m 个环节组成 m 阶格形，则最佳 K_m 的选择在于使 m 阶预测误差功率最小。

因此，得到一种直接计算最佳 K_m 的方法：计算预测误差功率对 K_m 的导数，令导数等于零，即可求得最佳 K_m。但格形滤波器有两个预测误差功率 $E\{[e_m^f(n)]^2\}$ 和 $E\{[e_m^b(n)]^2\}$（在最佳参量时两者相等），究竟应取哪一个呢？这就可有几种选择。比如可采用 $E\{[e_m^f(n)]_2\}$ 或采用 $E\{[e_m^b(n)]^2\}$ 作为性能函数。然而采用

$$E\{[e_m^f(n)]^2+[e_m^b(n)]^2\} \tag{3-68}$$

作为性能函数能保证 $\{K_m\}\leqslant 1$，即保证格形滤波器稳定。所以我们主要讨论这种选择。

根据式(3－40)，由

$$\frac{\partial E\{[e_m^f(n)]^2+[e_m^b(n)]^2\}}{\partial K_m}=0 \tag{3-69}$$

不难得到

$$K_m=\frac{-2E\{e_{m-1}^f(n)e_{m-1}^b(n-1)\}}{E\{[e_{m-1}^f(n)]^2\}+E\{[e_{m-1}^f(n-1)]^2\}} \tag{3-70}$$

实际计算时，用求和近似统计平均得

$$\hat{K}_m(n)=\frac{-2\sum_{i=1}^{n}e_{m-1}^f(i)e_{m-1}^b(i-1)}{\sum_{i}^{n}[(e_{m-1}^f(i))^2+(e_{m-1}^b(i-1))^2]} \tag{3-71}$$

式(3－71)的求和范围取 $i=1\sim n$，有时亦取 $i=(m+1)\sim n$。

这就是第二种批处理算法。$K_m(n)$ 的变量 n 表示它是根据 $x(1),\cdots,x(n)$ 算出的，其最后时刻为 n。实际按式(3－71)计算 M 阶格形滤波器时，从 $m=1$ 开始。由 $e_0^f(n)=e_0^b(n)=x(n)$，由式(3－71)算出 $K_1(n)$。再根据预测误差公式(3－40)算出 $e_1^f(i)$ 和 $e_1^f(i)$ 从 $e_1^b(i)$，从面重复利用式(3－71)算出 $K_2(n)$，一直到算出 $K_m(n)$ 为止。