



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中 外 物 理 学 精 品 书 系

前 沿 系 列 · 2 3

从抛物线谈起 ——混沌动力学引论

(第二版)

郝柏林 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中 外 物 理 学 精 品 书 系

前 沿 系 列 · 2 3

从抛物线谈起 ——混沌动力学引论

(第二版)

郝柏林 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

从抛物线谈起: 混沌动力学引论: 第 2 版/郝柏林著. —北京: 北京大学出版社, 2013.10

(中外物理学精品书系·前沿系列)

ISBN 978-7-301-23300-9

I. ①从… II. ①郝… III. ①混沌理论-动力学 IV. ①O415.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 233542 号

书 名: 从抛物线谈起——混沌动力学引论(第二版)

著作责任者: 郝柏林 著

责任编辑: 刘 啸

标准书号: ISBN 978-7-301-23300-9/O · 0954

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn>

新浪微博: @北京大学出版社

电子邮箱: zpup@pup.pku.edu.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752038

出版部 62754962

印 刷 者: 北京中科印刷有限公司

经 销 者: 新华书店

730 毫米×980 毫米 16 开本 11.25 印张 212 千字

2013 年 10 月第 2 版 2013 年 10 月第 1 次印刷

定 价: 34.00 元



未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有, 侵权必究

举报电话: 010-62752024 电子邮箱: fd@pup.pku.edu.cn

“中外物理学精品书系”

编委会

主任：王恩哥

副主任：夏建白

编委：（按姓氏笔画排序，标*号者为执行编委）

王力军	王孝群	王牧	王鼎盛	石兢
田光善	冯世平	邢定钰	朱邦芬	朱星
向涛	刘川*	许宁生	许京军	张酣*
张富春	陈志坚*	林海青	欧阳钟灿	周月梅*
郑春开*	赵光达	聂玉昕	徐仁新*	郭卫*
资剑	龚旗煌	崔田	阎守胜	谢心澄
解士杰	解思深	潘建伟		

秘书：陈小红

序 言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础，同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天，物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴，而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到，改革开放三十多年来，随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展，我国物理学取得了跨越式的进步，做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下，近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势，在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看，尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书，但系统总结物理学各门类知识和发展，深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源，并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考，仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展，特别是展现近年来中国物理学家的研究水平和成果，北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了“中外物理学精品书系”，试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家，确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富，涵盖面广，可读性强，其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结，也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示；既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态，也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说，“中外物理学精品书系”力图完整呈现近现代世界和中国物理

科学发展的全貌，是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

“中外物理学精品书系”另一个突出特点是，在把西方物理的精华要义“请进来”的同时，也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻，引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态，可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面，改革开放几十年来，我国的物理学研究取得了长足发展，一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域，使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解，不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”，也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”，对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是，“中外物理学精品书系”还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20 世纪以来，中国物理界诞生了很多经典作品，但当时大都分散出版，如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中，读者们对这些论著也都是“只闻其声，未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫，对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值，不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献，充分发挥其应有的传世育人的作用，更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统，真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在 2006 年中国科学技术大会上指出，“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径，是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新，而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信，这套“中外物理学精品书系”的出版，不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣，也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展，为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

“中外物理学精品书系”编委会 主任

中国科学院院士，北京大学教授

王恩哥

2010 年 5 月于燕园

内 容 简 介

混沌现象普遍存在于自然界和数学模型中. 这是确定论系统在没有外来随机因素时表现出的随机行为. 混沌有着丰富的内在结构, 而不是简单的无序. 当存在耗散时, 高维动力系统的长时间行为会集中到相空间中低维甚至一维的对象上. 因而, 研究一维线段上的抛物线映射成为进入耗散系统混沌动力学的捷径. 抛物线映射这个简单“可解”模型所蕴涵的丰富内容, 可以导致统计物理和非线性科学中许多深刻的概念, 例如周期和混沌吸引子、标度律和临界指数、李雅普诺夫指数和熵、分形分维和重正化群等等. 分析抛物线映射的基本行为, 只需要理工科大学低年级的微积分知识, 但是要求读者养成自己推导公式和上计算机实践的习惯.

本书可以作为理工科大学本科生、研究生和青年教师扩展知识的读物和教学研究参考.

再版前言

20 世纪 90 年代, 笔者和郑伟谋、吴智仁共同主编了一套“非线性科学丛书”, 由上海科技教育出版社出版. 该丛书共计 30 种, 均由工作在前沿的学者执笔, 对于促进国内非线性科学发展起了一定作用. 进入 21 世纪以来, 由于学科发展和作者们的研究兴趣均有很大变化, 整套丛书修订再版已经不甚可行. 经与原出版社商定, 由作者们自行决定各册前途. 本书作者接受北京大学出版社将《从抛物线谈起——混沌动力学引论》纳入“中外物理学精品书系”的建议, 对原书进行了修订.

这一版最主要的修订是增加了多峰映射周期数目的讨论和一维映射周期轨道同纽结理论的联系. 前者在本书初版定稿之后才得以完全解决, 后者则只提出了可以继续深入探讨的问题. 修订版新增一章主要就是为了包容这些内容. 此外, 还增加了一节, 来介绍符号序列与语法复杂性的关系.

国家的“攀登计划”和后来的“973 计划”中的“非线性科学”大项目, 对于我们的研究工作给予了持续的支持. 特别是进入 21 世纪以来, 作为“来自动力学和生物学的符号序列的复杂性”子课题的成员, 我们的研究工作一直深入到理论生命科学领域. 这种不“以题限文”的支持, 对于基础研究工作以好奇和兴趣为主导, 大胆闯入新领域, 是极为重要的边界条件.

英文刊物《理论物理通讯》编辑部的程希有同志对笔者在使用中文 $\text{\LaTeX}$ 方面给予了指导. 北京大学出版社的陈小红女士在修订再版过程中给予了耐心支持. 作者在此一并表示感谢.

郝柏林

2012 年 11 月 11 日

于复旦大学理论生命科学研究中心

初版前言

对混沌现象的认识,是非线性科学最重要的成就之一.1975年,“混沌”作为一个新的科学名词出现在文献中.混沌动力学迅速发展成为有丰富内容的研究领域.1991年出版的《混沌文献总目》(见本书末尾所列出的参考文献[1])列举了269本有关书名和7157篇文章题目.混沌动力学的许多概念和方法,诸如奇怪吸引子、相空间重构和符号动力学,正在被应用到自然科学和工程技术的许多门类中.同时,“混沌”一词也引发了不少望文生义、牵强附会的赝科学议论.有必要提倡用严肃实验、积累数据、严格推导、认真分析的科学方法,来探讨混沌行为.

所幸的是,混沌动力学的许多内容,只要运用初等的数学工具和简单而具有实际意义的模型,即可进行深入的分析研究.特别是对于包含耗散的非线性系统,一维线段的迭代(也叫做“映射”)起着重要的启发作用.为了从更普遍的背景下来说明这种重要作用,我们先回顾一下数理科学对自然界的描述体系.

自然界只有一个,自然现象遵循着不依赖于人类意志的客观规律.然而,数理科学中却有着两套反映这些规律的体系:确定论描述和概率论描述.这两套描述体系的发展历程中,各有一个典型的问题对于新的概念和方法起着试金石的作用.

确定论的试金石是天体力学,特别是可以严格求解的二体问题,从开普勒的行星运动三定律,到牛顿力学的三定律,到狭义和广义相对论关于水星近日点进动和光线在太阳附近偏转的解释,到氢原子光谱乃至两条谱线间距因辐射修正而导致的细微移动,贯穿了经典力学、相对论、量子力学和量子场论的发展史.这一发展过程的各个阶段,构成现代数理科学的坚实知识基础.

概率论的试金石是布朗运动.1827年植物学家布朗在显微镜下观察到悬浮在液体中的花粉颗粒的无规运动,曾经以为是看到了生命运动的基本形态.1905年爱因斯坦引用随机过程概念,成功地预言了布朗运动的基本特性,随后被皮兰的实验证实.这就引出了朗之万方程、福克-普朗克方程、维纳的连续积分表示、昂萨格泛函,乃至涨落场论等一系列发展.它们同样是深入研究大自然、特别是研究复杂系统行为的必要知识基础^①.

这两套描述体系的发展有着诸多并行之处,同时,在认识论基础上有着深刻的对立.世界究竟是偶然的,还是必然的?围绕这一哲学命题的争论,同样牵动着自

^① 希望进一步了解概率论描述发展过程的读者,可以参阅笔者的综述文章《布朗运动理论一百年》.该文收录于香山科学会议主编的《科学前沿与未来》的第十集——《相对论物理学100年的发展与展望》(中国环境科学出版社,2006)中的1-17页.此文后来转载于《物理》杂志2011年第40卷第1期,1-7页.

然科学家的思绪. 自牛顿以来的科学传统, 比较推崇确定论描述, 而把概率论描述作为“不得已而为之”的补充. 然而, 把概率论还原为确定论, 从力学推导统计的尝试始终未能成功. 同时, 愈是深入到物质运动的高级和复杂的形态, 就愈离不开概率论描述, 必须不断求助基于知识“不完备性”的统计方法. 至少从审美观点看, 这也是现代自然科学体系的一种缺陷.

混沌动力学的发展, 正在缩小这两个对立描述体系之间的鸿沟. 某些完全确定论的系统, 不外加任何随机因素就可能出现与布朗运动不能区分的行为——“失之毫厘, 差之千里”的对初值细微变化的敏感依赖性, 使得确定论系统的长时间行为必须借助概率论方法描述. 这就是混沌. 耗散系统的混沌理论, 也有自己的试金石, 这就是一维线段的映射. 最简单的非线性关系, 即抛物线函数, 可导致内容极其丰富的典型一维映射.

数理科学中的许多一维模型, 往往因为过于特殊而用途甚窄. 抛物线映射则是幸运的例外. 它足够简单, 使得数值计算很省时间, 又可能做深入的解析研究, 而所得结论常常具有普遍意义, 可以用到高维的耗散系统. 钻研抛物线映射, 有助于培养扎扎实实的学习和研究作风, 即进行数值实验, 从观察中提出问题, 同时进行认真的分析, 得出结论, 再推广到更普遍的情形. 本书将以抛物线映射为实例, 多次通过这种分析, 向读者介绍混沌动力学的许多基本概念和方法. 阅读本书要求具备理工科大学本科的数学知识, 并且最好培养出自己动手推导和上计算机试算的习惯.

本书中还反映了一批我们自己的研究结果. 这些工作曾得到中国科学院数理学部 (1983–1985), 国家自然科学基金 (1986–1991), 和中国科学院开放实验室计划 (1986–1991) 的支持. 美国 Sun Microsystems 公司赠送了 Sun 3/260C 工作站, Wolfram Research 公司赠送了 Mathematica 软件. 书中许多图形和实例就是用它们作出的. 作者对上述单位表示感谢. 作者的研究工作受益于同众多同行的交流与讨论, 这里无法一一列举, 只能特别感谢郑伟谋和张淑誉的多年合作、讨论与支持. 郑伟谋和陈式刚仔细阅读了书稿, 提出了许多宝贵意见, 作者在此特别致谢.

郝柏林

1992 年 4 月 30 日

于北京中关村

目 录

第 1 章 最简单的非线性模型	1
§1.1 什么是非线性	1
§1.2 非线性演化方程	4
§1.3 虫口变化的抛物线模型	8
§1.4 其他简单映射举例	10
第 2 章 抛物线映射	15
§2.1 线段映射的一般讨论	15
§2.2 稳定和超稳定周期轨道	19
§2.3 分岔图里的标度性和自相似性	22
§2.4 分岔图中暗线的解释	28
§2.5 周期窗口何处有 —— 字提升法	32
§2.6 实用符号动力学概要	36
第 3 章 倍周期分岔序列	47
§3.1 隐函数定理和倍周期分岔	47
§3.2 倍周期分岔定理的证明	49
§3.3 施瓦茨导数和辛格尔定理的证明	54
§3.4 重正化群方程和标度因子 α	57
§3.5 线性化重正化群方程和收敛速率 δ	62
§3.6 外噪声和它的标度因子 κ	63
第 4 章 切分岔	67
§4.1 周期 3 的诞生	67
§4.2 阵发混沌的几何图像	69
§4.3 阵发混沌的标度理论	72
§4.4 阵发混沌的重正化理论	75
§4.5 l 倍周期序列的标度性质	79
第 5 章 一维映射的周期数目	83
§5.1 沙尔可夫斯基序列和李-约克定理	83
§5.2 数论函数和波伊阿定理	86
§5.3 单峰映射的周期窗口数目	87
§5.4 多峰映射的周期窗口数目	94

§5.5	周期轨道与纽结	106
第 6 章	混沌映射	111
§6.1	满映射	111
§6.2	轨道点的密度分布	113
§6.3	同宿轨道	118
§6.4	混沌吸引子的激变	120
§6.5	粗粒混沌	122
第 7 章	吸引子的刻画	129
§7.1	功率谱分析	129
§7.2	李雅普诺夫指数	131
§7.3	维数的各种定义	134
§7.4	一维映射中的分形	139
§7.5	满映射维数谱中的“相变”	141
§7.6	测度熵和拓扑熵	145
§7.7	符号序列的语法复杂性	148
第 8 章	过渡过程	153
§8.1	倍周期分岔点附近的临界慢化指数	153
§8.2	过渡过程的功率谱	155
§8.3	奇怪排斥子和逃逸速率	156
§8.4	过渡混沌	158
参考文献		161

第 1 章 最简单的非线性模型

在这一章里,我们要从抛物线出发,构造一个最简单的非线性动力学模型. 它的实际意义和丰富内容,将远远超过人们初次看到它时的想象. 事实上,本书主旨就是介绍研究这个简单模型所得到的结果和启示. 勤于思考的读者一定会发现不少尚未解决的问题,并且继续去探索和创造. 我们在前言里已经说过,研究这个简单模型所得到的结论,有助于理解更复杂、更实际的高维模型. 善于抓住简单模型,提出深刻问题,进行彻底分析,得出寓于特殊事例中的普遍性规律,可以很好地锻炼从事科学研究的能力.

§1.1 什么是非线性

开宗明义,我们就从什么是非线性讲起.

“线性”和“非线性”,首先用于区分函数 $y = f(x)$ 对自变量 x 的依赖关系. 函数

$$y = ax + b \quad (1.1)$$

对自变量 x 的依赖关系是一次多项式,在 (x, y) 平面中的图像是一条直线 (见图 1.1),我们就说“ y 是 x 的线性函数”. 其他一切高于一次的多项式函数关系,都是非线性的.

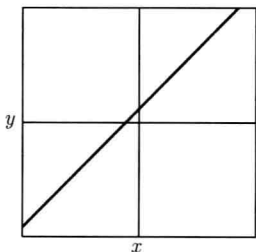


图 1.1 线性函数

最简单的非线性函数是抛物线,

$$y = ax^2 + bx + c. \quad (1.2)$$

在函数关系 (1.1) 和 (1.2) 中, a, b, c 等是参量. 各个参量并不同样重要. 在线性关系 (1.1) 中,参量 b 是次要的,可以靠移动坐标原点而改变,甚至取成零,而

参量 a 是重要的, $a > 0$ 或 $a < 0$ 使直线上升或下降, $a = 0$ 使 y 退化成常数. 其实, 对于抛物线 (1.2), 也只有一个参量 a 有实质意义: $a > 0$ 时, 它是具有一个最小值而两端伸向正无穷的抛物线 (图 1.2(a)); $a < 0$ 时, 它是具有一个最大值而两端落到负无穷的抛物线 (图 1.2(b)); $a = 0$ 则使它退化成为线性函数. 对于多项式类型的函数关系, 变量最高幂次项的系数一定是最重要的. 对于更一般的, 甚至含有微分、积分等运算的关系式, 用多少个参量才可以恰到好处地反映出一切性质不同的行为, 这并不是一个平庸的问题. 对于用一维映射描述的动力学过程, 我们将借助符号动力学的概念回答这个问题 (§2.6).

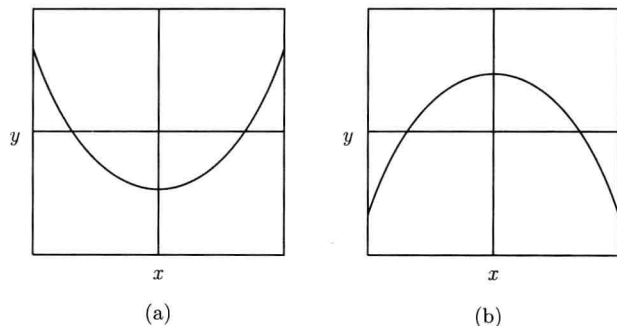


图 1.2 抛物线函数

为了简化书写, 我们通常用一个字母 μ 来代表所有参量的集合, 把一般的函数关系写成

$$y = f(\mu, x).$$

定性地讲, 线性关系只有一种, 而非线性关系千变万化, 无法穷举. 每个具体的非线性关系刻画一种独特的行为. 然而, 各种非线性关系还可能具有某些不同于线性关系的共性. 正是这些共性, 才导致了统一的非线性科学. 为了认识共性, 往往可以先透彻地研究一两个最简单的特例. 这就是我们集中考虑抛物线 (1.2) 的原因.

我们先试着用普通的语言, 讨论一下非线性的意义.

首先, 线性是简单的比例关系, 而非线性是对这种简单关系的偏离. 当 $b = 0$ 时, 图 1.1 所表示的是“水涨船高”、“多多益善”的正比例关系. 一般说来, 线性关系只在自变量的一定范围内成立, 不可推得太远. 自变量太大时, 就有可能出现其他行为. 一种可能性是“过犹不及”, 如图 1.2(b) 所示, x 超过一定限度后, 其效果反倒同较小的某个 x 相同.

然而, 对线性关系的小小的局部的偏离并不导致抛物线, 而是更接近一条三次曲线 (图 1.3). 在传统的数理科学中早已发展了许多计入小小修正的微扰 (或称摄

动) 方法. 它们并不属于非线性科学的范畴. 非线性科学处理对线性的实质性的大的偏离. 这时图 1.3 可能变成图 1.4 那样. 它像是由图 1.2(a) 和 (b) 的两种情况拼合而成. 事实上, 对于这两种抛物线的分析, 果真有助于理解图 1.4 所示的“一波三折”的局面.

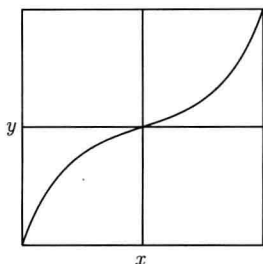


图 1.3 “弱”的立方函数可以描述对线性的小偏离

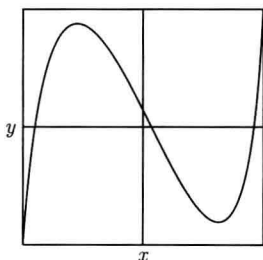


图 1.4 对线性的大偏离: “一波三折”

其次, 线性关系是互不干涉的独立贡献, 而非线性则是相互作用. 如果 x 代表某种昆虫数目, 虫子们为争夺食物而捉对咬斗, 其可能的组合就有 $x(1-x)/2$ 种, 这又是一个抛物线关系. 非线性相互作用使得整体不再简单地等于局部之和, 而可能出现不同于“线性叠加”的增益或亏损. 非线性系统的每个局部都在某种意义上“优化”, 也不一定导致整体优化.

最后, 对于理解混沌动力学有极重要意义的一条, 线性关系保持信号的频率成分不变, 而非线性使频率结构发生变化. 为了解释这一条, 最好把 x 和 y 都看成时间 t 的函数, 讨论它们对 t 的依赖性. 让我们省略掉非实质性的参量, 写出直线

$$y(t) = ax(t) \quad (1.3)$$

或抛物线

$$y(t) = a[x(t)]^2. \quad (1.4)$$

设 x 是时间 t 的周期函数, 例如

$$x(t) = \cos(\omega t),$$

则线性关系 (1.3) 所决定的 $y(t)$ 也只含有同样的频率 ω . 然而, 抛物线 (1.4) 就不同了. 由熟知的三角函数关系, 得到

$$y(t) = a[\cos(\omega t)]^2 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos(2\omega t),$$

出现了频率为零的“直流项”和频率为 2ω 的“倍频项”.

一般说来, 许多物理系统都可以看成一个“黑盒子”. 人们输入具有一定频率成分的信号, 测量输出信号的频率构成. 如果输出信号和输入信号的频率成分相同, 只是强弱有所改变, 则黑盒子里面是一个线性系统.

如果输入信号含有两种频率 ω_1 和 ω_2 , 而输出频率有 $0, 2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1 \pm \omega_2$ 甚至 $n\omega_1 \pm m\omega_2$ (这里 n 和 m 是整数) 等各种成分, 则盒子里是一个非线性系统^①. 然而, 这种非线性系统可能在传统数理科学分支的非线性篇章中已经研究得相当清楚, 而不一定是现代非线性科学的对象. 这是因为, 只要存在着任意小的非线性, 就会出现和频、差频、倍频等种种成分. 换言之, 这些频率成分不是非线性强到一定程度, 即参量达到某个临界值时才突然出现的阈值现象, 它们可以用简单的三角函数关系加以解释. 相反, 如果当非线性超过一定阈值时, 输出信号中突然冒出了某种分频成分, 例如二分频 $\omega/2$, 甚至三分频 $\omega/3$, 则黑盒子中就不再是一个平常的非线性系统. 研究这样的系统, 就很可能必须借助本书中将逐步讲述的概念和方法.

§1.2 非线性演化方程

§1.1 里所列举的线性和非线性函数, 都只表示静态的依赖关系, 并没有反映动力学行为和演化过程. 在科学和技术实践中, 往往要考察一个系统的状态如何随时间变化. 这时, 系统的状态用一组变量 $x, y, z, \dots$ 描述, 它们都是时间 t 的函数. 同一个系统还受某些可以调节的“控制参量” $a, b, c, \dots$ 的影响.

最简单的情形, 是固定一组参量, 把时间变化限制成等间隔的

$$t, t+1, t+2, \dots,$$

看下一个时刻的系统状态如何依赖于当前状态. 在只有一个变量 x 时, 这个演化过程可能由一个非线性函数描述:

$$x(t+1) = f(\mu, x(t)), \quad (1.5)$$

^① 也可能是所谓“参量驱动”的线性系统, 这里不细究.

其中 μ 代表所有控制参量的集合. 更一般些, 时间跳跃的间隔 (或者说, 对系统进行观测的采样间隔) δt 可以不是整数. 把各个时刻写成 $t_0, t_1, t_2, \dots$, 而相应状态记为 $x_0, x_1, x_2, \dots$, 其中

$$x_n \equiv x(t_n), \quad t_n = t_0 + n\delta t, \quad (1.6)$$

于是, 演化方程 (1.5) 成为

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n). \quad (1.7)$$

这是一个离散化的时间演化方程, 是一个一阶差分方程. 我们写下方程 (1.5) 或 (1.7) 时, 已经做了一些重要的假定:

第一个假定, 下一时刻的状态只决定于当前时刻的状态, 而不依赖于过去时刻的状态. 例如, 我们没有把方程写成二阶差分方程

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n, x_{n-1}). \quad (1.8)$$

不过, 这一个假定并非实质性的. 我们总可以引入新的变量 $y_n \equiv x_{n-1}$, 把它写成含两个变量的一阶联立方程组

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n, y_n), \quad y_{n+1} = x_n. \quad (1.9)$$

方程 (1.8) 反映的是一种记忆效应. 我们看到, 对于有限个过去时刻的记忆, 在形式上并不带来严重困难. 然而, 高维差分方程组 (1.9) 确实包含更丰富的内容. 有兴趣的读者可以参阅综述文章 [14].

第二个假定, 方程 (1.5) 的右端没有明显地依赖于时间, 即没有写成

$$x(t+1) = f(\mu, x(t), t)$$

的形式. 因此, 从方程 (1.5) 到 (1.9) 描述的是不受外界影响的自我演化过程. 这些方程称为自治的差分方程.

非自治的演化方程也是经常见到的. 例如, 一个处于周期性外场中的系统, 其演化方程中含有外场项

$$x(t+1) = f(\mu, x(t)) + A \cos(\omega t).$$

外场的周期 $T = 2\pi/\omega$, 带来一个新的特征时间. 它同原来的时间间隔 1 或隐含在方程 (1.7) 中的采样间隔 Δt , 形成相互竞争的一对特征量. 这类方程描述有竞争周期或竞争频率的系统. 它们表现出一些新的物理行为, 如共振、锁频等等. 由于周期长短或频率高低都是相对而言的, 它们只带来一个新的控制参量, 即两个周期的比值.