品質管理のための

統計数学

朝香鉄一 著

東京大学基礎工学 5

東京大学出版会

品質管理のための

統 計 数 学

朝 香 鉄 一 著

東京大学基礎工学

〔5〕

東京大学出版会

著者略歴

朝香鉄一（あさか てついち）

大正3年　東京で生れる
昭和14年　東京大学理学部数学科卒
昭和22年　東京大学工学部助教授を経て
現　在　東京大学工学部教授，工学博士

主要著書

昭和29年　QCテーブル(丸善)
〃　30年　度数分布法(JUSE)
〃　31年　抜取検査入門(JUSE)
〃　31年　統計的解析(日本規格協会)
〃　33年　統計的方法(みすず書房)
〃　34年　抜取検査法(JUSE)

その他

品質管理のための統計数学

1963年8月20日　初版発行

定価540円 **

著者　朝香鉄一
発行者　神立誠

発行所　財団法人 東京大学出版会
東京都文京区本富士1. 電話(811)8814 振替東京59964

三秀舎印刷・新栄社製本

ま え が き

統計的品質管理が日本に導入されて以来すでに 12 年を経過している．

その間各大学においても経営工学，管理工学，計測工学等種々の学科が設けられ，その中で推計学，品質管理，統計数学等の名称のもとに講義が行なわれている．

ここで理論面に関する書物，実際面に関する書物がそれぞれの立場から非常に沢山出版されているので，これらの間を結びつけるような内容を含んだものをと思って企画したのが今回の“品質管理のための統計数学”である．

内容は第1編，第2編にわけ，前者は大試料，後者は小試料を取扱っている．しかも，われわれが実際にアクションに結びつくものは計算の結果をもとにして行なえるので，つぎのような構成を重んじている．

理論式の誘導，計算式の誘導および実際例と3段構えで織込むように努力した．

ややもすると理論に走り，大学卒業後実際問題にぶつかった場合に困惑を感ずる場合が多いので，できるだけ工場，研究，試験および検査のデータを用いて実際面にも相当力を入れて，計算の誤りのないように期した．

出版にあたっては東京大学出版会の方々および研究室の人にいろいろとお世話になり，ここに出版の運びとなったことを深謝して筆をおく．

1963 年 8 月

著　　者

“東京大学基礎工学”刊行の辞

工学と一口にいっても，実は非常に沢山の専門に分科されている．現在各大学の工学部あるいは工業大学に非常に沢山の学科があるのもそのためである．しかしここに注意しなければならないことは，学生諸君が，ややもすれば，おのおのの専門学科を修めて卒業すると，その当日から，その分野では，ひとかどの専門家として，実社会で活動できると考えがちなことである．もちろん卒業すれば，数年ならずして立派な一人前の専門職的技術者となりうる土台を持っていることは確かであるけれども，大学卒業と同時に専門家としての活動ができるとは期待されていない．それは大学を卒業しただけでは能力が不足だからというのではない．在学中専ら能力を養成されてきたのであるから，その能力を発揮して活動すれば，どんな専門職にも適合しうることが約束されているという意味である．そうであればこそ，かつてはそんな言葉さえなかったエレクトロニクスとか原子力とかいう方面の仕事にでも，いろいろな学科の卒業生が盛んに活動しているのである．極端にいえば，専門学科というのは，工学を修めるときの便宜上，例を既存の一専門分野にとって，現状の分析，その改良進歩の工夫，これに関連する問題解決の手法，さらに進んでは新分野の開拓というような力を養う手ほどきをして貰う一つの場であるといってもよい．したがって学生時代に最も大切なことは，専門的事項に関する物識りになるということではなくて，工学の根底をなすいわゆる基礎工学の学力を十分身につけておくことである．卒業後何年経っても力になるのは，この基礎的な力である．そしてまたこの力こそは，将来全く新たな問題に遭遇したときにも，最も頼りになるものである．

このような訳であるから，東京大学工学部では，この基礎的な部分にとくに力を注いでいるのであるが，先般来この基礎の方面を担当された経験のある先生方，ならびに現在担当されている先生方の間で，この基礎工学の内容に関し討議を重ねているうちに，その結果を教材として書籍にしてはという議が起り，この叢書が生れることとなったのである．かような事情で企画されただけに，この叢書は，いやしくも工学を志す者には，将来の専門のいかんを問わず，必ず非常に有益な参考書として用いられることと信じている．

1960年3月　　東京大学工学部長　古 賀 逸 策

目　　次

まえがき

第１編　大試料の場合

1.　計数値の分布 …… 3
　§1・1　超幾何分布 …… 3
　§1・2　ＯＣ曲線 …… 11
　§1・3　二項分布 …… 14
　§1・4　ポアソン分布 …… 16
　§1・5　各分布の平均値 …… 20
　　1・5・1　超幾何分布の平均値 …… 20
　　1・5・2　二項分布の平均値 …… 21
　　1・5・3　ポアソン分布の平均値 …… 22
　§1・6　各分布の標準偏差 …… 22
　　1・6・1　超幾何分布の標準偏差 …… 22
　　1・6・2　二項分布の標準偏差 …… 24
　　1・6・3　ポアソン分布の標準偏差 …… 24
　§1・7　積率母函数 …… 26
　　1・7・1　積　　率 …… 26
　　1・7・2　二項分布の積率母函数 …… 27
2.　計量値の分布 …… 29
　§2・1　度数分布 …… 29
　　2・1・1　度数分布の作成 …… 29
　　2・1・2　度数分布の数量化 …… 30
　§2・2　正規分布 …… 34

§ 2・3　正規分布の積率母函数 ……………………………………………35
§ 2・4　積　　　率 ……………………………………………………………38
§ 2・5　積率母函数 ……………………………………………………………39
§ 2・6　和 の 分 布 ……………………………………………………………40
§ 2・7　平均値の分布 …………………………………………………………41
§ 2・8　検　　　定 ……………………………………………………………42
§ 2・9　推　　　定 ……………………………………………………………44
§ 2・10　平均値の差の分布 …………………………………………………45
§ 2・11　2つの平均値の差の検定および推定 ……………………………46
2・11・1　検定の場合 …………………………………………………………46
2・11・2　平均値の差の検定 …………………………………………………47
2・11・3　平均値の差の推定 …………………………………………………47
3.　相 関 分 析 ……………………………………………………………………49
§ 3・1　単　相　関 ……………………………………………………………49
§ 3・2　相関表を用いての相関係数の算出 …………………………………54
§ 3・3　直線のあてはめ ………………………………………………………58
§ 3・4　相関係数の意味 ………………………………………………………61
§ 3・5　無相関に関する検定 …………………………………………………62
§ 3・6　回 帰 平 面 ……………………………………………………………66
§ 3・7　回帰平面からの推定の誤差と重相関係数 …………………………70
§ 3・8　偏相関係数 ……………………………………………………………72
4.　管理図の原理 …………………………………………………………………75
§ 4・1　pn-管理図，p-管理図 …………………………………………………75
4・1・1　pn-管理図 ……………………………………………………………79
4・1・2　p-管理図 ……………………………………………………………79
§ 4・2　c-管理図 ……………………………………………………………80
§ 4・3　$(\bar{x}, R)$管理図 ……………………………………………………82
5.　計量抜取検査 …………………………………………………………………85

§ 5・1　標準偏差 σ が既知の場合……85
5・1・1　ロットの平均値を保証　……85
5・1・2　ロットの不良率の保証　……90
§ 5・2　標準偏差未知の場合　……94
6.　計数選別型抜取検査……97
§ 6・1　平均検査個数……97
§ 6・2　平均出検品質限界 AOQL……99
§ 6・3　AOQL の求め方　……100
7.　逐次抜取検査……104
§ 7・1　不良個数の場合……104
§ 7・2　欠点数の場合……107
§ 7・3　計量値の場合……109
7・3・1　$\mu \leqq \mu_0$ のロットは良いロット，$\mu \geqq \mu_1$ のロットは悪いロットとする場合　……109
7・3・2　$\mu \geqq \mu_0$ を良いロットとし，$\mu \leqq \mu_1$ を悪いロットとする場合　……111

第2編　小試料の場合

は じ め に……115
§ 0・1　期　待　値……115
§ 0・2　ガ ン マ 函 数……116
§ 0・3　ベ ー タ 函 数……117
1.　χ^2 分布（カイ２乗分布）……120
§ 1・1　χ^2 分布の平均および分散……121
§ 1・2　χ^2 分布の応用　……121
2.　t 分 布　……126
§ 2・1　確率要素の誘導……126
§ 2・2　t 分布の応用　……128

2・2・1 平均値の検定 …… 128
2・2・2 平均値の推定 …… 129

3. F 分 布 …… 131

§3・1 確率要素の誘導 …… 131
§3・2 等分散の検定 …… 133
§3・3 平均値の差の検定，推定 …… 135

4. 各分布の間の関係 …… 139

§4・1 t 分布と F 分布との関係 …… 139
§4・2 χ^2 分布と F 分布との関係 …… 139

5. 分 散 分 析 …… 141

§5・1 一 元 配 置 …… 141
5・1・1 繰返えし数が等しい場合 …… 141
5・1・2 繰返えし数が異なる場合 …… 150
§5・2 二 元 配 置 …… 150
§5・3 二元配置において欠測値が1個ある場合 …… 158
§5・4 繰返えしのある二元配置 …… 159
§5・5 三 元 配 置 …… 169
§5・6 ラ テ ン 方 格 …… 175
§5・7 構 造 の 問 題 …… 177
5・7・1 二元配置の場合 …… 177
5・7・2 繰返えしのある二元配置の場合 …… 179

6. 2^n 型実験計画 …… 182

§6・1 2^2 型実験計画($n=2$ の場合) …… 182
6・1・1 Yates の特殊計算法 …… 184
6・1・2 効　　果 …… 185
6・1・3 交　　絡 …… 185
6・1・4 直 交 表 …… 186

§6・2　2^3型実験計画……………………………………………………………… 189
6・2・1　Yates の特殊計算法 ……………………………………………………… 190
6・2・2　効　　果 ……………………………………………………………………… 190
6・2・3　相 合 式 ……………………………………………………………………… 191
6・2・4　一部実施実験 ……………………………………………………………… 193
7.　回 帰 分 析 ……………………………………………………………………… 194
§7・1　単 回 帰 分 析……………………………………………………………… 194
7・1・1　回帰係数 b の分布 ……………………………………………………… 196
7・1・2　切片 a の分布 ……………………………………………………………… 196
7・1・3　回帰直線 Y の分布 ……………………………………………………… 197
7・1・4　指定変数の各水準におけるデータに繰返えしがある場合 …………… 204
§7・2　重 回 帰 分 析……………………………………………………………… 209
8.　計数値のデータの処理 ………………………………………………………… 213
§8・1　一元配置の場合 ………………………………………………………… 213
§8・2　二元配置の場合 ………………………………………………………… 216
§8・3　三元配置の場合 ………………………………………………………… 223
§8・4　繰返えし数異なる二元配置の場合 …………………………………… 234

数　　表 ………………………………………………………………………………… 239
索　　引 ………………………………………………………………………………… 255

第１編　大試料の場合

1. 計数値の分布

§1・1　超幾何分布(hypergeometric distribution)

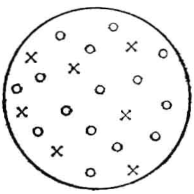
ロットの大きさ: N　；サンプルの大きさ: n

ロットの不良率: p　；サンプル中の不良品: x

ロットの中からランダムに n 個抜取って x 個の不良品の出る確率を

$$P(x, n|p, N)$$

であらわしたとき，この確率がどんな関係で与えられるか調べてみよう．



Lot

ロットについて，

ロット中の不良品は Np で与えられ，

ロット中の良品は $N-Np$ で与えられる．

サンプルについて，

サンプル中の不良品を x であらわせば

サンプル中の良品は $n-x$ で与えられる．

ここで，つぎの3つの場合が考えられる．

i） Np 個より x 個の不良品を取出す組合せ

$${}_{Np}C_x = \binom{Np}{x}$$

ii） $(N-Np)$ 個より $(n-x)$ 個の良品を取出す組合せ

$${}_{N-Np}C_{n-x} = \binom{N-Np}{n-x}$$

iii） N 個より n 個取出す組合せ

$${}_N C_n = \binom{N}{n}$$

これより

$$P(x, n|p, N) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{N-Np}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{1・1}$$

として与えられる．

ここに良品が出るのと不良品の出る場合とは，同時現象である．したがって，積の形で与えられるわけである．

たとえば，

$$N = 1000, \qquad n = 30$$
$$p = 0.05, \qquad x = 0$$

の場合には，サンプル中に不良品がない確率は，

$$P(0, 30|0.05, 1000) = \frac{\binom{50}{0}\binom{950}{30}}{\binom{1000}{30}} = \frac{50!}{0!\ 50!}\ \frac{950!}{30!\ 920!}\Big/\frac{1000!}{30!\ 970!}$$

$$= \frac{950!\ 970!}{920!\ 1000!} = \frac{A}{B}$$

として与えられる．ここに

$$1000! = 1000 \times 999 \times \cdots\cdots \times 2 \times 1$$

で，そのままの計算を行なったら非常に面倒になるが，対数計算によって解決することができる．すなわち，

$$\begin{aligned} \log 1000! &= 2567.604644 \\ \log\ \ 920! &= 2329.014901 \\ \hline \log\ \ B\ \ &= 4896.619545 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 970! &= 2477.795448 \\ +)\log 950! &= 2418.145657 \\ \hline \log\ \ A\ \ &= 4895.941105 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +)\qquad \mathrm{colog}\ B &= \overline{4897}.380455 \\ \hline \log P(0, 30|0.05, 1000) &= \bar{1}.321560 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad P(0, 30|0.05, 1000) = 0.210$$

すなわち，ロットより $n=30$ の試料を抜取って不良品が1個もでない確率は 21％ということがわかったわけである．

さらに $x=1, 2, \cdots$ の場合も同様の計算によって算出することができるわけであるが，x 個の不良品の出る確率をもとにして $(x+1)$ 個の不良品の出る確率をつぎのようにして算出することができる．

$$P(x+1, n|p, N) = \frac{\binom{Np}{x+1}\binom{N-Np}{n-x-1}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{(Np)!}{(x+1)!(Np-x-1)!} \frac{(N-Np)!}{(n-x-1)![(N-Np)-(n-x-1)]!} \Big/ \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$= \left\{\frac{(Np)!}{x!(Np-x)!} \frac{(N-Np)!}{(n-x)![N-Np-(n-x)]!} \Big/ \frac{N!}{n!(N-n)!}\right\}$$

$$\cdot \frac{Np-x}{x+1} \cdot \frac{n-x}{N-Np-(n-x-1)} = P(x, n|p, N)\frac{Np-x}{x+1} \cdot \frac{n-x}{N-Np-(n-x-1)}$$

すなわち，

$$P(x+1, n|p, N) = P(x, n|p, N)\frac{Np-x}{x+1} \cdot \frac{n-x}{N-Np-n+x+1} \qquad (1\cdot2)$$

という関係を得る．この関係式によって容易に $(x+1)$ 個の不良品の出る確率を求めることができる．たとえば，

ロットの大きさ　$N=1000$,　　不良率　$p=5\%$

のロットより $n=30$ の試料を抜取って $x=0$ を得る確率

$$P(0, 30|0.05, 1000) = 0.210$$

を得ているので，この結果を用いて，$x=1, 2, 3, \cdots$ を得る確率は (1·2) 式により，つぎのようにして求まる．

$$P(1, 30|0.05, 1000) = 0.210\times\frac{50}{1}\times\frac{30}{950-30+1} = 0.210\times\frac{50}{1}\times\frac{30}{921} = 0.342$$

$$P(2, 30|0.05, 1000) = 0.342\times\frac{49}{2}\times\frac{29}{922} = 0.264$$

$$P(3, 30|0.05, 1000) = 0.264\times\frac{48}{3}\times\frac{28}{923} = 0.128$$

$$P(4, 30|0.05, 1000) = 0.128\times\frac{47}{4}\times\frac{27}{924} = 0.044$$

$$P(5, 30|0.05, 1000) = 0.044\times\frac{46}{5}\times\frac{26}{925} = 0.011$$

表 1·1 ロットの大きさ N=1000,

n P x	1		5		10		20	
	$P(x)$	$\sum P(x)$	$P(x)$	$\sum P(x)$	$P(x)$	$\sum P(x)$	$P(x)$	$\sum P(x)$
0	.950		.773		.597		.355	
1	.050	1.000	.204	.977	.317	.914	.381	.736
2			.021	.998	.074	.988	.190	.926
3			.001	.999	.010	.998	.059	.985
4					.001	.999	.013	.998
5							.002	1.000
6								
7								
8								
9								
10								

表 1·2 ロットの大きさ N=1000,

n P x	1		5		10		20	
	$P(x)$	$\sum P(x)$	$P(x)$	$\sum P(x)$	$P(x)$	$\sum P(x)$	$P(x)$	$\sum P(x)$
0	.900		.590		.347		.119	
1	.100	1.000	.329	.919	.389	.736	.270	.389
2			.073	.992	.199	.935	.288	.677
3			.008	1.000	.058	.993	.192	.869
4					.006	.999	.089	.958
5					.001	1.000	.031	.989
6							.008	.997
7							.001	.998
8								
9								
10								

試料の大きさ $n=1\sim100$ $p=0.05$ の場合

30		50		70		100	
$P(x)$	$\sum P(x)$	$P(x)$	$\sum P(x)$	$P(x)$	$\sum P(x)$	$P(x)$	$\sum P(x)$
.210		.072		.024		.004	
.342	.552	.200	.272	.096	.120	.026	.030
.263	.815	.266	.538	.184	.304	.075	.105
.128	.943	.226	.764	.226	.530	.138	.243
.044	.987	.138	.902	.202	.732	.184	.427
.011	.998	.065	.967	.138	.870	.190	.617
.002	1.000	.024	.991	.076	.946	.158	.775
		.007	.998	.035	.981	.109	.884
		.002	1.000	.013	.994	.063	.947
				.004	.998	.032	.979
				.001	.999	.014	.993

試料の大きさ $n=1\sim100$ $p=0.10$ の場合

30		50		70		100	
$P(x)$	$\sum P(x)$	$P(x)$	$\sum P(x)$	$P(x)$	$\sum P(x)$	$P(x)$	$\sum P(x)$
.040		.004		.000		.000	
.139	.179	.026	.030	.004	.004	.000	
.229	.408	.074	.104	.016	.020	.001	.001
.240	.648	.140	.244	.044	.064	.004	.005
.180	.828	.184	.428	.085	.149	.013	.018
.102	.930	.190	.619	.129	.278	.030	.048
.046	.976	.158	.777	.159	.437	.056	.104
.017	.993	.109	.886	.163	.600	.087	.191
.005	.998	.063	.949	.142	.742	.117	.308
.001	.999	.032	.981	.108	.850	.136	.444
		.014	.995	.071	.921	.139	.583