経済理論のための

基礎数学

蔵田久作監修

蔵田久作
山下　元　著
前島　仁

成文堂

経済理論のための

基礎数学

蔵田久作監修

蔵田久作
山下　元　著
前島　仁

成文堂

著者紹介（＊印監修者）
＊蔵田久作（くらたきゅうさく）　早稲田大学教授
山下　元（やましたはじめ）　早稲田大学助教授
前島　仁（まえじまひとし）　早稲田大学講師

経済理論のための
基礎数学　　¥ 1800

昭和55年7月1日　第1刷発行

監修者　蔵　田　久　作
発行者　阿　部　義　任

162　東京都新宿区早稲田鶴巻町514
発行所　株式会社　成　文　堂
電話 03(203)9201(代)　振替東京6-93491

製版　井村印刷　　印刷　上野印刷　　製本　佐抜製本
☆乱丁・落丁本おとりかえいたします☆　検印省略
3041—811081—3851

ま え が き

本書は経済学部の初年度生を対象として書かれたものである。経済理論に用いられる数学は極めて多い。微分，積分，偏微分，ベクトル，行列，行列式，微分方程式，差分方程式，変分法，最大値原理，位相数学など列挙にいとまがないくらいである。本書はこれから経済学の研究を志す学生のために，以上述べた数学のうち最も基本的である微分，積分，偏微分，ベクトル，行列，行列式の解説とそれに関連する経済理論について書いたものである。

数学を苦手とする文科系の学生を念頭において，できるだけ叙述を平易にすることを主眼とした。平易ではあるが厳密性をくずさないように努力した。本書の内容は現代の古典と言われるヒックス (J. R. Hicks) の「価値と資本」の数学を読みこなせるように条件付極大，極小それと関連する 2 次形式，縁付行列式，ヤコービ (C. G. Jacobi) の相反行列式など理工科系の数学書にはでてこないが，経済学にとって大切であると思われる数学を特に詳しく説明することにした。また，線型代数の応用として経済学に良く用いられる線型計画，産業連関論の理論に欠くことのできないフロベニウス (G. Frobenius) の定理の証明をつけ加えてある。多少，程度が高いと思われるが努力して読んで欲しい。最近の経済理論の一端を知ることができるであろう。

数学の勉強には，自分で問題を解くことが理解を確実なものにするためには必要である。各章末の練習問題は面倒がらずに解いてみることをぜひとも実行していただきたい。

経済学部卒業の社会人から，数学を勉強しておけば良かったとしばしば後悔の言葉が聞かれる。今の社会機構の中では数学を学んでおくことは，はかり知れない強みになると思う。本書は経済理論のための基礎数学である。本書を読破したからといって万全とはいえないことは勿論である。さらに程度の高い経済数学を研究したい学生には手前味噌になるかも知れないが，

岡本哲治，蔵田久作，小山昭雄共編

経済数学（有斐閣，昭和50年3月）

をお奨めする。本書は，

1章～3章　山下　元

4章～6章　前島　仁

付　録　蔵田久作

が担当執筆した。

最後になって恐縮であるが，本書の企画から出版にいたるまで成文堂専務の阿部耕一氏，編集部の土子三男氏に大変お世話になった。ここに記して感謝の意を表わしたい。

1980年7月

監　修　者

目　　次

第1章 微 分 法

§1 導 関 数

実数全体を R とする。R の要素に R の1つの要素が対応するとき，その対応 f を

$$f: R \to R$$

で表す。$x \in R$ が $y \in R$ に対応するとき，y は x の**関数**であるといい

$$y=f(x) \tag{1・1}$$

と表す。このとき，x を**独立変数**，y を**従属変数**という。

関数 $y=f(x)$ の定義されている x の範囲を**定義域**，関数値 y のとりうる範囲を**値域**という。

定義域や値域を表すのに**区間** $I \subset R$ が用いられる。区間 $(a,\ b)$ は開区間，$[a,\ b]$ は閉区間を表す。

$$(a,\ b)=\{x \mid a<x<b\}$$
$$[a,\ b]=\{x \mid a \leq x \leq b\}$$

関数 $y=f(x)$ において，x を限りなく a に近づけるとき，$f(x)$ の値が限りなく有限確定の値 b に近づくことを

$$\lim_{x \to a} f(x)=b \tag{1・2}$$

と表し，xをaに近づけるときの$f(x)$の**極限値**はbである，または，$f(x)$はbに**収束**するという。

定理 1.1　xをaに近づけるとき，関数$f(x)$，$g(x)$の極限値が存在すれば，次の式が成りたつ。（証明略）

$$\lim_{x\to a}\lambda f(x)=\lambda\lim_{x\to a}f(x),\quad \lambda\in R$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x),\quad \text{（複号同順）}$$
$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x)$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},\quad g(a)\neq 0$$

例題 1.1　xをaに近づけたときの関数の極限値は，関数が$x=a$で定義されていなくても存在する場合がある。図1-1で，次の関係が成りたつ。

$$\overline{BC}<\widehat{AB}<\overline{AD}$$

したがって，

$$r\sin x<rx<r\tan x$$

である。いま，$x>0$とすると，$\sin x>0$であるから

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

となる。ここで，xを0に近づけると，不等式の両側の式の極限値が1になることから

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

となる。また，$x<0$としても同じ極限値がえられる。したがって，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (1\cdot 3)$$

となる。すなわち，関数$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$は，$x=0$で定義されていないが，xを0に近づけるときの関数の極限値は存在して1となる。

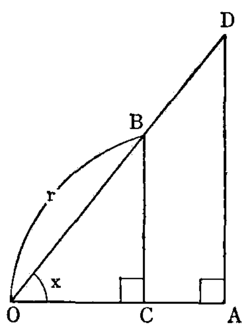

図 1-1

例題 1.2 nを正の整数とする。$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$とすると，二項定理より

$$a_n=1+{}_nC_1\frac{1}{n}+{}_nC_2\frac{1}{n^2}+{}_nC_3\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots+{}_nC_n\frac{1}{n^n}$$

となる。この展開式の一般項は

$$\begin{aligned}{}_nC_r\frac{1}{n^r}&=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdots\cdots\cdot r}\frac{1}{n^r}\\&=\frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots\\+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\end{aligned}$$

となる。同様にして，

$$\begin{aligned}a_{n+1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\\+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\end{aligned}$$

である。したがって，

$$a_n<a_{n+1}$$

すなわち，$\{a_n\}$は単調増加数列である。

また，a_nは，$n>1$のとき，

$$a_n<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

となる。ここで，$r!>(r-1)r$であるから，

$$a_n<1+1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=3-\frac{1}{n}$$

である。したがって，

$$a_n<3$$

すなわち，$\{a_n\}$は上に有界な数列である。これから，$\{a_n\}$は収束し*，その極限値をeで表せば，

---

* **ワイヤストラス**（Weierstrass）**の定理**：有界な単調数列は収束する。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e \tag{1・4}$$

となる。ここで，$e=2.71828\cdots$ である。

次に，x を正の実数とすると，$n\leqq x<n+1$ となる正の整数 n が存在する。x と n の関係から，

$$1+\frac{1}{n}\geq 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}$$

が成りたつ。したがって，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\geq\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

となる。ここで，$x+\alpha=n+1$，$0<\alpha\leq 1$ とすると，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\geq\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x}\right)^\alpha>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

である。ここで，$n\to\infty$ とすると，不等式の両側の式の極限値が e になることから，次の式が成りたつ。

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \tag{1・4′}$$

関数 $y=f(x)$ が区間 $I\subset R$ で定義されているとき，$a\in I$ に対して，

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a) \tag{1・5}$$

が成りたてば，$f(x)$ は $x=a$ で**連続**であるという。この関係はまた，次のようにも表すこともできる。

$$\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a) \tag{1・5′}$$

関数 $y=f(x)$ が区間Ｉのすべての点 x で連続であるとき，$f(x)$ は区間Ｉで連続である，または，$f(x)$ は**連続関数**であるという。

定理 1.2　関数 $f(x)$，$g(x)$ が区間Ｉで連続であれば，

$\lambda f(x)$，$\lambda\in R$

$f(x)\pm g(x)$

$$f(x)g(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)},\ \ g(x)\neq 0$$

はその区間で連続である。(証明略)

定理 1.3 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であれば，$f(x)$ はその区間にある点で最大値と最小値をとる。(証明略)

関数 $y=f(x)$ が区間 $I\subset R$ で定義されているとき，$a\in I$ に対して

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1・6}$$

の極限値が存在するならば，その値を $f'(a)$ で表し，$x=a$ における $f(x)$ の**微分係数**とよぶ。このとき，$f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**であるという。

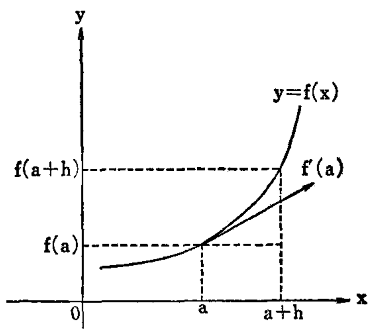

図 1-2

例題 1.3 区間 $(-\infty,\ \infty)$ で定義された関数 $f(x)=|x|$ は，$x=0$ で連続である。しかし，$h>0$ のとき，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

また，$h<0$ のとき，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1$$

である。したがって，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。

関数 $y=f(x)$ が区間 I のすべての点 x で微分可能であるとき，$f(x)$ は区間 I で微分可能であるという。

$f(x)$ が微分可能な区間 I においては，$x \in I$ に対して，その点の微分係数

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1・7}$$

を一意的に対応させることができるから，微分係数は x の関数である。これを

$$f'(x),\quad y',\ \frac{dy}{dx}$$

などで表し，$f(x)$ の**導関数**とよぶ。また，$f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを $f(x)$ を x で**微分**するという。

例題 1.4　$f(x)=x^n$ の導関数 $f'(x)$ は，定義から，次のようにして求める。ただし，n は自然数とする。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{({}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1}h + {}_nC_2x^{n-2}h^2 + \cdots + {}_nC_nh^n) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} ({}_nC_1x^{n-1} + {}_nC_2x^{n-2}h + \cdots + {}_nC_nh^{n-1}) = nx^{n-1} \end{aligned}$$

したがって，整関数の微分公式として，次の式が成りたつ。

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{1・8}$$

定理 1.4　2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が区間 I で微分可能であれば，

$$\lambda f(x),\ \lambda \in R,\quad f(x) \pm g(x),$$

$$f(x)g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$$

は微分可能で，次の微分公式が成りたつ。

$$\{\lambda f(x)\}' = \lambda f'(x),\ \lambda \in R \tag{1・9}$$

$$\{f(x) \pm y(x)\}' = f'(x) \pm g'(x),\ (\text{複号同順}) \tag{1・10}$$

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \tag{1・11}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \tag{1・12}$$

証明 微分公式 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ をここでは証明するが，他の公式も同様に証明することができる。

$$\begin{aligned}\{f(x)g(x)\}'&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\\&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\end{aligned}$$

定理 1.5 関数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ が微分可能であるとき，**合成関数** $y=f(g(x))$ の導関数について，次の式が成りたつ。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{1・13}$$

証明 $\Delta y=f'(u)\Delta u+\Delta u\varepsilon(\Delta u)$ とおく。ただし，$\Delta u\to 0$ のとき，$\varepsilon(\Delta u)\to 0$ である。また，$\Delta u=g'(x)\Delta x+\Delta x\varepsilon'(\Delta x)$ とおく。ただし，$\Delta x\to 0$ のとき，$\varepsilon'(\Delta x)\to 0$ である。ここで，Δu の右辺を Δy の式に代入すると，

$$\begin{aligned}\Delta y=&f'(u)g'(x)\Delta x+f'(u)\varepsilon'(\Delta x)\Delta x\\&+g'(x)\varepsilon(\Delta u)\Delta x+\varepsilon(\Delta u)\varepsilon'(\Delta x)\Delta x\end{aligned}$$

となる。これから，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)g'(x)+f'(u)\varepsilon'(\Delta x)+g'(x)\varepsilon(\Delta u)+\varepsilon(\Delta u)\varepsilon'(\Delta x)$$

ここで，$\Delta x\to 0$ とすると $\Delta u\to 0$ となるから

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)g'(x)=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

例題 1.5 $y=\sqrt{1-x^2}$ の導関数は，$y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$ として計算する。

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\frac{du}{dx}=-2x$$

したがって，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

定理 1.6　関数 $y=f(x)$ の逆関数 $x=g(y)$ が微分可能であれば，導関数について，次の式が成りたつ。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \tag{1・14}$$

証明　関数 $f(x)$ が連続であれば，その逆関数 $g(y)$ も連続である。ここで，$g(y+\varDelta y)=x+\varDelta x$ とおけば，$\varDelta y\to 0$ のとき $\varDelta x\to 0$ となる。また，$y+\varDelta y=f(x+\varDelta x)$ であるから，

$$\frac{g(y+\varDelta y)-g(y)}{\varDelta y}=\frac{\varDelta x}{f(x+\varDelta x)-f(x)}$$

となる。ここで，$\varDelta y\to 0$ とすると $\varDelta x\to 0$ となるから

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

例題 1.6　関数 $y=\sqrt{x}$ の逆関数は，$x=y^2\ (y\geqq 0)$ である。したがって，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

定理 1.7　基本的な関数の導関数について，次の微分公式が成りたつ。

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1},\quad \alpha\in R \tag{1・15}$$

$$(\sin x)'=\cos x \tag{1・16}$$

$$(\cos x)'=-\sin x \tag{1・17}$$

$$(\tan x)'=\sec^2 x \tag{1・18}$$

$$(e^x)'=e^x \tag{1・19}$$

$$(\log|x|)'=\frac{1}{x} \tag{1・20}$$

$$(\log|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)} \tag{1・21}$$

証明 x^α, $\sin x$, $\log|x|$, e^x の微分公式を証明する。

$y=x^\alpha$ とすると，$\log y=\alpha\log x$ である。両辺を x で微分すると，(1・20)から

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha}{x}$$

となる。これから，

$$\frac{dy}{dx}=\alpha\frac{y}{x}=\alpha\frac{x^\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$

したがって，

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$$

$y=\sin x$ とすると，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{2}{h}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\\&=\cos x\end{aligned}$$

したがって，

$$(\sin x)'=\cos x$$

$y=\log x$ とすると，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{h\to0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)\end{aligned}$$

ここで，$ht=x$ とおくと，

$$\begin{aligned}&=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{x}\log\left(1+\frac{1}{t}\right)\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\\&=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

また，$x<0$ のとき，$|x|=-x$ であるから，

$$\frac{d}{dx}\log|x|=\frac{d}{dx}\log(-x)=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$$

したがって，

$$(\log|x|)'=\frac{1}{x}$$

$y=e^x$ とおくと，$x=\log y$ である。両辺を x で微分すると，

$$1=\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}$$

となる。これから，

$$\frac{dy}{dx}=y=e^x$$

したがって，

$$(e^x)'=e^x$$

定理 1.8　逆三角関数の導関数について，次の微分公式が成りたつ。

$$(\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1・22}$$

$$(\cos^{-1}x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1・23}$$

$$(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^2} \tag{1・24}$$

ただし，$\sin^{-1}x$ は $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，$\cos^{-1}x$ は $[0,\pi]$，$\tan^{-1}x$ は $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ を主値とする。

証明　$\sin^{-1}x$ の微分公式を証明する。 $y=\sin^{-1}x$ とすると， $x=\sin y$ である。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

したがって，

$$(\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$