题解中心
几何辞典

薛德炯 吴载耀 编译

上海科学技术出版社

题　解　中　心

几何学辞典

〔日本〕長澤龜之助原著
薛德炯　吴载耀　编译

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书为“数学辞典”的第三册，上卷内容分平面几何学，解法之部，名词之部两门，解法门又分直线，圆，面积，比例正多角形计算题，轨迹作图，极大极小等十编，循序渐进由浅入深。载有题解 2,428 题，插图 2,140 个，卷首冠有与平面几何有关的要项，卷末附有英汉名词对照表，上卷约计 550 千字，附刊题解类索引，记述简明，易于查索。

下卷内容分立体几何解法之部，平面几何学补遗之部，近世几何解法之部，常用典线解法之部，名词之部，几何学小史等六门，载有题解 1,638 题，插图 1,700 个，卷首冠有几何学公式集，卷末附有英汉名词对照表及有关直角三角形，斜三角形的各表，下卷约计 550 千字附刊题解分类索引，记述简明，易于查索。

本书出版于 1935 年，内容不尽正确，但为了目前各方面有需要，仍以旧版重印，供各地中、小学教师作备课时的参考。

题 解 中 心

几 何 学 辞 典

〔日本〕长泽亀之助 原著

薛德炯 吴载耀 编译

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 43.25 插页 4 字数 1,100,000

1959 年 11 月新 1 版 1981 年 8 月第 3 次印刷

印数：22,001—137,000

统一书号：17119·9 定价：（科五）5.50 元

（国内发行）

普通公理

(*a*) 全量大於其部分.

(*b*) 全量等於其各部分之和.

(*c*) 同量之各等量相等.

(*d*) 等量加等量,其和相等.

(*e*) 等量減等量,其差相等.

(*f*) 等量加不等量,其和不等,所加之量大,其和亦大.

(*g*) 等量減不等量,其差不等,被減之量大,其差亦大.

(*h*) 等量之若干倍或若干等分相等.

幾何公理

1. 圖形得不變其形狀及大小而變其位置.

2. 可完全相合之量相等.

由普通公理 (*d*) 及 (*e*) 擴張之,則如次.

有甲乙二組之量,若甲組之量,分別等於乙組之量,則甲組各量之和與乙組各量之和,雖不全合,亦相等.

3. 過二點得引一直線,且限於一;又直線得向其任何方延長之.由是又可得以下二條.

α. 二任意直線,得將其一直線上之任意所設點,置於他直線上之任意所設點,而使二直線相合.

β. 二直線會於一點,而不全合,則此二直線不復相會.

4. 過一點得引所設直線之一平行線,且限於一.

定理之關係

1. 定理者,得由已知命題以證其爲眞理之命題也.但已知命題,或爲公理,或爲定理.

定理之敍述分二部,曰假設,曰終結是.假設者,假定之事,終結者,由假設所得之結果.茲示其範形如下.

設 A 爲 B, 則 C 爲 D.　(1)

其中設 A 爲 B 爲假設,則 C 爲 D 爲終結.

若此定理果眞,則下定理亦必眞.

設 C 非 D, 則 A 非 B.　(2)

如 (1) 與 (2) 者,曰互爲對定理.例如馬爲四足動物一命題,依前所示範形改述之,則如下.

設動物爲馬,則此動物有四足.

其對定理爲

設動物無四足,則此動物非馬.

而此定理之爲眞,可無疑義.

2. 有二定理,若其任一定理之假設,爲他定理之終結,則此二定理之一,曰他定理之逆定理.例如定理

設 C 爲 D, 則 A 爲 B.　(3)

爲 (1) 之逆定理.又 3 之對定理爲

設 A 非 B, 則 C 非 D.　(4)

(4) 曰 (1) 之倒定理.

一定理雖眞,但不能斷其逆定理及倒定理亦爲眞;欲斷後者之眞僞,須別加探討.

例如就前舉之定理,

設動物爲馬,則此動物有四足.

其逆定理爲

設動物有四足,則此動物爲馬.

又其倒定理爲

設動物非馬,則此動物無四足.

由此二者,即可知逆定理與倒定理不皆普徧爲眞.

3. 上述定理之四種形式,茲列舉之如次.

原定理.	設 A 爲 B, 則 C 爲 D.	(1)
其對定理.	設 C 非 D, 則 A 非 B.	(2)
其逆定理.	設 C 爲 D, 則 A 爲 B.	(3)
其倒定理.	設 A 非 B, 則 C 非 D.	(4)

若 (1) 爲眞,則 (2) 必爲眞.又因 (4) 爲 (3) 之對定理,故 (3) 與 (4) 同時爲眞.然 (1) 雖爲眞,不能據以斷言 (3) 或 (4) 亦爲眞.故此四種形式之定理中,若已就幾何學證明其非互爲對定理之二者,即 (1) 與 (3), (1) 與 (4), (2) 與 (3), 或 (2) 與 (4), 則其他定理,可不俟證明而知其爲眞矣.

4. 若定理之假設甚複雜,則交換假設之一與終結,即得原定理之逆定理.例如定理

$$設 \left\{\begin{array}{l} A=D \\ B=E \\ C=F \end{array}\right\}, 則 M=N,$$

其逆定理爲

$$設 \left\{\begin{array}{l} A=D \\ B=E \\ M=N \end{array}\right\}, 則 C=F,$$

$$設 \left\{\begin{array}{l} A=D \\ M=N \\ C=F \end{array}\right\}, 則 B=E.$$

....

5. 轉換法.亦稱窮舉證法.設有業已證明之一羣定理,凡可發生之事,已盡於假設,而終結不能兩立,即其中之二,不能同時成立,則此一羣定理之逆定理,亦必爲眞.如此之一羣定理,其最簡單之例,爲業已證明之一定理與其倒定理;此二定理中,其一之逆定理,即他一之對定理,由此一事,即可知轉換法之眞.又幾何學中數見不鮮之一例如下.

設 A 大於 B, 則 C 大於 D.

設 A 等於 B, 則 C 等於 D.

設 A 小於 B, 則 C 小於 D.

若此三定理,業已證明爲眞,則其逆定理亦必爲眞,即

設 C 大於 D, 則 A 大於 B.

設 C 等於 D, 則 A 等於 B.

設 C 小於 D, 則 A 小於 B.

6. 同一法.設有唯一之 A 及唯一之 B, 且已知 A 爲 B. 則可斷定 B 爲 A.

例如,設有一定直線 AB, 及此線外之定點 P, 則因由 P 至 AB 所引之最短線唯一,由 P 至 AB 所引之垂線亦唯一,且最短線爲垂線,故由同一法,可徑知垂線爲最短線.

平面軌跡

決定點之位置時,有時所設條件雖不足完全確定其位置,但可充分限制其點之位置,令在一線,或線之一部,或若干線上.此時謂點有軌跡.若一線,或線之一部,或若干線上之點,皆適合一定條件,且除此以外,更無適合此條件之點,則此線,或線之一部,或若干線曰適合條件之點之軌跡.據此,欲決定一線,或線之一部,或若干線 X 爲適合條件 A 之點之軌跡,其充要手續爲證明以下一組定理之成立.

1. 適合條件 A 之點在 X 上.

2. X 上之點適合條件 A.

又以下定理代 (1) 亦可,

3. 不在 X 上之點,不適合條件 A.

又以下定理代 (2) 亦可.

4. 不適合條件 A 之點,不在 X 上

注意 有時軌跡爲平面之一部. 觀第一門 1526 題及 1529 題.

作　圖　題

作圖題之目的, 在完成幾何學的作圖. 解作圖題時, 得使用准許使用之工具; 若限制使用之工具, 而令其範圍愈狹隘, 則用此工具以解之作圖題之範圍亦愈狹隘,從而其解法亦愈困難. 初等幾何學中,准許使用之工具,不外規及矩二物. 所謂規者,卽兩脚規,用以作圓及移距離之具也; 所謂矩者,卽直尺,用以引直線及延長直線之具也.

作　圖　公　法

1. 由一任意點, 至他一任意點, 得引一直線.
2. 有限直線得任意延長之.
3. 以任意點爲中心,任意有限直線爲半徑,得作一圓.

倍量之性質

I. 關於可通約量者

1. 若 $A=B$, 則 $mA=mB$.
2. 若 $mA=mB$, 則 $A=B$.
3. $mA+mB+\cdots\cdots=m(A+B+\cdots\cdots)$.
4. $mA-mB=m(A-B)$, 但 $A>B$.
5. $mA+nA=(m+n)A$.
6. $mA-nA=(m-n)A$, 但 $m>n$.
7. $m\cdot nA=mn\cdot A=nm\cdot A=n\cdot mA$.

II. 關於不可通約量者

1. 若 $A>=<B$, 則 $mA>=<mB$.
2. 若 $mA>=<mB$, 則 $A>=<B$.
3. $mA+mB+\cdots\cdots=m(A+B+\cdots\cdots)$.
4. $mA-mB=m(A-B)$, 但 $A>B$.
5. $mA+nA+\cdots\cdots=(m+n+\cdots\cdots)A$.
6. $mA-nA=(m-n)A$, 但 $m>n$.
7. $m\cdot nA=mn\cdot A=nm\cdot A=n\cdot mA$.

比例之定理

1. 等於同比之比皆相等.

例如,設 $A:B=P:Q$,　$X:Y=P:Q$,

則　$A:B=X:Y$.

2. 設二比相等, 若第一比之前項較其後項大,或等,或小,則第二比之前項,從而較其後項大,或等,或小.

例如,設　$A:B=P:Q$,

若　$A>=<B$,

則從而　$P>=<Q$

3. 若二比相等,則其反比亦等.

例如,設　$A:B=P:Q$,

則　$B:A=Q:P$.

4 取二量之一與第三量之比時, 若第一量較第二量大, 或等,或小, 則第一比從而較第二比大,或等,或小. 又取一量與他二量之比時, 若二量之第一量較第二量小, 或等, 或大, 則第一比較第二比大, 或等, 或

小.例如,設 A, B, C 爲同種之三量,若

$$A >=< B,$$

則從而 $A:C >=< B:C$.

又若 $A <=> B$,

則從而 $C:A >=< C:B$.

5. 二量之等倍量之比,等於此二量之比.其逆定理亦眞.

例如, $mA:mB=A:B$

$$A:B=mA:mB.$$

6. 若二量 A, B 與二整數 m, n 有同比,則 $nA=mB$. 反之,若 $nA=mB$, 則 A 與 B 之比,等於 m 與 n 之比.

7. 若 $A:B=P:Q$, $nA=mB$,

則 $nP=mQ$.

8. 設同種之四量成比例,若其第二量較第四量大,或等,或小,則第一量從而較第三量大,或等,或小.

例如,設 $A:B=C:D$,

若 $B >=< D$,

則從而 $A >=< C$.

9. 若同種之四量成比例,則第一量與第三量之比,等於第二量與第四量之比[更比定理].

例如,設 $A:B=C:D$,

則 $A:C=B:D$.

10. 若同種之若干量成比例,則其一前項與一後項之比,等於其諸前項之和與諸後項之和之比[加比定理].

例如,設 $A:B=C:D=E:F=\cdots\cdots$

則 $A:B=A+C+E+\cdots:B+D+F+\cdots$.

11. 設二比相等,則第一比中前項後項之和[差]對後項之比,等於第二比中前項後項之和[差]對後項之比.

例如,設 $A:B=P:Q$,

則 $A+B:B=P+Q:Q$ [合比定理],

及 $A\sim B:B=P\sim Q:Q$ [分比定理].

12. 設兩比相等,若取兩前項之等倍量及兩後項之等倍量.則第一比中前項倍量與後項倍量之比.等於第二比中前項倍量與後項倍量之比.

例如,設 $A:B=P:Q$,

則 $mA:nB=mP:nQ$.

13 有甲乙二組之量,甲組中第一量與第二量之比,等於乙組中第一量與第二量之比,又甲組中第二量與第三量之比,等於乙組中第二量與第三量之比,以下類此,則甲組中第一量與最後量之比,等於乙組中第一量與最後量之比[等比定理].

例如,設甲組之若干量爲 A, B, C,……, H, K, 乙組之若干量爲 P, Q, R,……, X, Y, 而

$$A:B=P:Q,$$

$$B:C=Q:R,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$H:K=X:Y,$$

則 $A:K=P:Y$.

14. 若 $A:C=P:R$, $B:C=Q:R$,

則 $A+B:C=P+Q:R$.

15. 若二比相等,則其二乘比亦等;反之,若二比之二乘比相等,則其比亦等.

例如,設 $A:B=P:Q$,

則 $A^2:B^2=P^2:Q^2$.

反之,設 $A^2:B^2=P^2:Q^2$,

則 $A:B=P:Q$.

16. 若二比相等,則其三乘比亦等.反之,設

二比之三乘比相等,則其比亦等.

例如,設　　$A:B=P:Q$,

則　　$A^3:B^3=P^3:Q^3$,

反之,設　　$A^3:B^3=P^3:Q^3$,

則　　$A:B=P:Q$,

極　限　論

1. 某量有一定之值,則此量曰常數;若從某條件而消長增減,則此量曰變數.

2. 設一變數之值漸漸趨近一常數,其差得小於任意小之數,但此變數不能等於常數,則此常數曰變數之極限,而謂變數無限趨近其極限.變數漸漸增大而趨近其極限時,其極限曰增極;漸漸減小而趨近其極限時,其極限曰減極.

3. 設一點由 A 向 B 運動,第一秒間由 A 移至 AB 之中點 M,第二秒間由 M 移至 MB 之中點 M′,第三秒間,由 M′ 移至 M′B 之中點 M″,以下類推.

此時運動之點,雖可任意趨近 B,但決不能達於 B;因設某時動點在 A, B 間之某處,則下一秒此點在由此至 B 之中央,故此點雖可漸漸趨近 B,而欲達到 B,則恆尚須行距離之半分也,故決不能達 B.因此,由 A 至動點之距離,乃一變數,以常數 AB 為極限而無限趨近之;由動點至 B 之距離,亦為一變數,以常數零為極限而無限趨近之.

茲設 AB 之長為 2 寸,由 A 至動點之變數為 x,此變數與其極限之差為 v,則

第一秒後　$x=1$,　　$v=1$,

第二秒後　$x=1+\frac{1}{2}$,　　$v=\frac{1}{2}$,

第三秒後　$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$,　　$v=\frac{1}{4}$,

第四秒後　$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$,　$v=\frac{1}{8}$,

餘準此.

級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ 之和,顯然小於 2;但項數愈多,則與 2 之差愈小,故此差得為任意小.因此 2 為此級數在項數為無窮多時之極限,零為此級數與 2 之差之極限.

4. (1)　變數與其極限之差,為一變數,其極限為零.

(2)　兩個以上之變數 $v, v', v'', \cdots\cdots$ 等,其極限皆為零,則其和 $v+v'+v''+\cdots\cdots$ 之極限亦為零.

(3)　設變數 v 之極限為零,則 $a\pm v$ 之極限為常數 a,又 $a\times v$ 之極限為零.

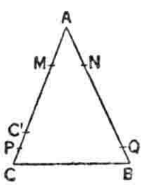
(4)　常數及變數之積,亦為變數;常數與變數之積之極限,為此變數之極限與常數之積.

(5)　設二變數為俱增大之變數,或俱減小之變數,則此二變數之和或積亦為一變數.

(6)　設二變數恆相等,則其極限亦相等.

設兩變數 AM, AN 恆相等,其極限分別為 AC, AB,求證 AC=AB.

證　設 AC>AB.取短於 AC 之 AC′,令 AC′=AB.因 AM 無限趨近 AC,故得假定 AM 達到大於 AC′ 之某值 AP,命 AQ 為對應於 AP 之 AN 值.於是 AP=AQ, AC′=AB.此



二不等式之非眞理，至爲明顯，因 AP $>$ AC′，AQ $<$ AB 故也．故 AC 不能大於 AB．同理，AC 不能小於 AB，卽 AB 不能大於 AC．要之，AC 較 AB，既不能大，亦不能小，故 AC 非等於 AB 不可．

(7) 設二變數有定比，則其極限亦有同比．極限以 lim 記之，例如 $\lim(x)$ 爲 x 之極限．

證 設 x 及 y 爲二變數，r 爲定比，則 $x:y=r$，卽 $x=ry$，故 $\lim(x)=\lim(ry)=r\lim(y)$，故 $\lim(x):\lim(y)=r$．

(8) 設比爲不可通約數，則此比爲其累次近似値之極限，故有以下之定理．

不可通約之二比 $a:b$ 及 $a':b'$，表之至同樣精密時，恆有同一之近似値，則此二比相等．

(9) 兩個以上之變數，其代數和之極限，等於其極限之代數和．

設 x, y, z 爲變數，其極限分別爲 a, b, c，則 $\lim(x+y+z)=a+b+c$，試證之．

證 設 $a-x=v$，$b-y=v'$，$c-z=v''$，則 $x=a-v$，$y=b-v'$，$z=c-v''$．此時 $x+y+z=a-v+b-v'+c-v''$，

故 $\lim(x+y+z)$，

$$=\lim(a-v+b-v'+c-v''), \quad (6)$$

然 $\lim(a-v+b-v'+c-v'')$

$$=a+b+c, \quad (3)$$

故 $\lim(x+y+z)=a+b+c$．

(10) 兩個以上之變數，其積之極限，等於其極限之積．

設 x, y, z 爲變數，其極限分別爲 a, b, c，則 $\lim(xyz)=abc$，試證之．

證 設 $x=a-v$，$y=b-v'$，$z=c-v''$，取其各邊之積，則

$xyz=abc\pm$(以 v, v', v'' 之一，或二，或全體爲因數之諸項)．

因此上式中自符號 $\pm$ 以下諸項之極限爲零， (3)

故 $\lim(xyz)$

$$=\lim\{abc\pm(\text{極限爲零之諸項})\} \quad (6)$$

故 $\lim(xyz)=abc$．

以上之變數，係假定爲增大者，但對於減小之變數，證明同此．

記號及略語

$\therefore$	故．	$\because$	何則．
$=$	等於．	$\neq$	不等於．
$>$	大於．	$<$	小於．
$\geq$	大於及等於．	$\leq$	小於及等於．
$+$	加．	$-$	減以．
$\pm$	加減．	$\sim$	差．
$\overset{+}{\sim}$	加及差．	$\wedge$	角．
$\hat{R}$	直角．	$\triangle$	三角形．
$\parallel$	平行於．	$\perp$	垂直於．
$\equiv$	全等於．	▱	平行四邊形．
□	正方形．	▭	矩形．
$:$	比．	$\backsim$	相似．

普.公．普通公理．幾.公．幾何學公理．

公法．作圖公法．

目录上卷

目 录 下 卷

上　卷

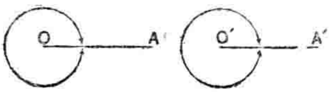
第一門　解法之部

第一編
直　線

第一章　角及直線

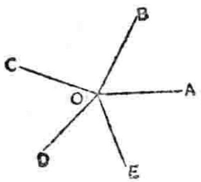
1. 凡周角皆相等.

證　周角 O 及 O′ 分別爲主線 OA 及 O′A′



以 O, O′ 爲樞, 就紙面上廻轉一周所成之角,故取其周角之一 O, 疊於 O′ 上,令 OA 疊於 O′A′ 上,而得全合. 因此周角 O, 等於周角 O′.

2. 由同一之點, 引若干直線, 則各直線與其下一直線所成各角之和,等於四直角.

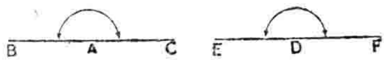


證　由同一點 O 所引之若干直線 OA, OB, OC, OD, OE 依次所成之鄰角 $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$, $E\hat{O}A$, 其和等於周角,故等於 $4\hat{R}$.

3. 凡平角皆相等.

證　平角等於周角之半分,而周角皆相等[1題],故平角亦皆相等.

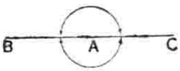
別證　設所欲證者, 爲 AB, AC 所夾之平角,等於 DE, DF 所夾之平角. 今 AB, AC



所夾之角爲平角,故 BA, AC 成一直線 BAC. 同理, ED, DF 亦成一直線 EDF. 於是得置直線 BAC 於直線 EDF 上,使 A 點與 D 點相合. [幾.公.(3) c.]. 但 B 與 E 在 D 之同側, C 與 F 在 D 之他側,或 B 與 F 在 D 之同側, C 與 E 在 D 之他側皆可. 總之,於無論何款中, AB, AC 所夾之平角,與 DE, DF 所夾之平角全合. 凡得全合之量相等[幾.公.(2)], 故此二平角相等.

注意　別證乃不依據周角之相等,而獨立證明平角之相等者也. 5題中直角之別證亦準此.

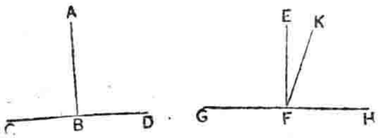
4. 同一之二邊 AB, AC 所夾之二平角相等.



證 由前題,一望而知其爲相等[本題爲前題之特例].

5. 凡直角皆相等.

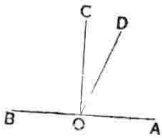
證 直角爲平角之半分,而等量之半分皆相等[普.公.(*h*)],故直角皆相等.



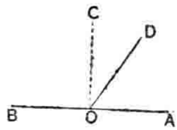
別解 設 ABC 爲直線 AB 立於直線 CBD 上所成之直角, EFG 爲直線 EF 立於直線 GFH 上所成之直角,求證 $A\hat{B}C$ 等於 $E\hat{F}G$. 今將直線 CBD 置於直線 GFH 上, B 點落於 F 點, BA 與 EF 在直線 GFH 之同側,則直線 BA 當與直線 FE 相合. 何則,蓋若不然,則 BA 或落於 $E\hat{F}H$ 之內,或落於 $E\hat{F}G$ 之內. 茲假定 BA 落於 $E\hat{F}H$ 之內,命其位置爲 FK. 此時 $K\hat{F}G$ 爲直角,故等於 $K\hat{F}H$[直角定義]. 然 $E\hat{F}H$ 大於 $K\hat{F}H$ [普. 公. (*a*)], 故 $E\hat{F}H$ 又大於 $K\hat{F}G$, 故 $E\hat{F}H$ 又大於 $E\hat{F}G$[普.公.(*a*)]. 然 $E\hat{F}G$ 爲直角,故等於 $E\hat{F}H$ [直角定義]. 故 $E\hat{F}G$ 小於 $E\hat{F}H$, 又等於 $E\hat{F}H$. 然此爲不可能, 故直線 BA 不落於 $E\hat{F}H$ 之內. 仿此得證直線 BA 亦不落於 $E\hat{F}G$ 之內. 故直線 BA 與直線 EF 相合. 故 $A\hat{B}C$ 與 $E\hat{F}G$ 相合,而 $A\hat{B}C = E\hat{F}G$ [幾. 公. (2)].

6. 於一所設直線上之一所設點,得引其線之一垂線,而以一爲限.

證 二等分平角 AOB 之直線 CO, 令鄰角 COA, COB 皆爲直角,故 CO 爲 AB 之垂線. 若除 CO 以外,於 AB 上之 O 點,尙有他垂線 OD, 則 $D\hat{O}A = \hat{R}$. 然 $C\hat{O}A = \hat{R}$, 故 $C\hat{O}A = D\hat{O}A$ [普. 公. (*c*)],卽全量等於其一部. 此爲不可能[普. 公. (*a*)],故在 AB 之 O 點垂直於 AB 之直線,除 CO 外,別無他線.



別證 設直線 OD, 以 O 爲樞,由 OA 之位置, 迴轉至 OB 之位置, 則 $D\hat{O}A$ 由零漸漸增大,而 $D\hat{O}B$ 由 $2\hat{R}$ 漸漸減小, 其中必有一次 $D\hat{O}A = D\hat{O}B$. 設此時 DO 之位置爲 CO, 則 CO 爲 AB 之垂線;而如是之 CO 位置,顯然以一次爲限.



7. 等角之餘角亦等.

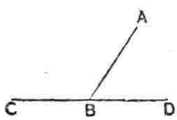
證 某角之餘角者,由直角減去其角而得之角也. 而直角相等 [5題],故等角之餘角亦等[普. 公. (*e*)].

8. 等角之補角亦等.

證 某角之補角者,由二直角減去其角而得之角也. 而二直角[平角]皆相等 [3題], 故等角之補角皆相等[普. 公. (*e*)].

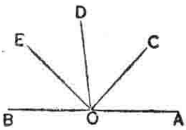
9. 一直線立於他一直線上,其所成鄰角之和,等於二直角.

證 設直線 AB, 立於他直線 CD 上,求證鄰角 ABC, ABD 之和, 等於二直角. 今鄰角 ABC, ABD 之和,爲 BC, BD 所夾之角, 而 CBD 爲一直線, 故其角爲平角. 故二角 ABC, ABD 之和等於平角,卽等於二直角.



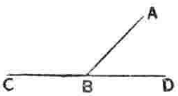
10. 由一直線上之一點,就其一側引若干直線,則其依次所成各鄰角之和,等於二直角.

證　由一直線 AOB 上之一點 O,就其一側引若干直線 OC, OD, OE, 其所成各鄰角 AOC, COD, DOE, EOB 之和,等於平角 AOB, 即等於 $2\hat{R}$.

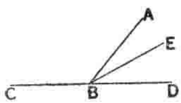


11. 一直線與他二直線所成鄰角之和,若等於二直角,則後二直線成一直線.

證　設直線 AB 與他二直線 BC, BD 所成鄰角 ABC, ABD 之和等於二直角,求證 BC, BD 成一直線. 今鄰角 ABC, ABD 之和,爲 BC, BD 所夾之角,而二角 ABC, ABD 之和爲二直角,故 BC, BD 所夾之角等於二直角,即平角. 故 BC, BD 成一直線.

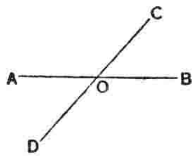


別證　設 BD 與 BC 不成一直線,而 BE 與 BC 成一直線,則 AB 立於直線 CBE 上,故 $A\hat{B}C + A\hat{B}E = 2\hat{R}$ [9 題]. 然 $A\hat{B}C + A\hat{B}D = 2\hat{R}$ [假設], 故 $A\hat{B}C + A\hat{B}E = A\hat{B}C + A\hat{B}D$ [普. 公. (c)]. 故 $A\hat{B}E = A\hat{B}D$ [普. 公. (e)], 即全量等於其一部. 此爲不可能 [普. 公. (a)]. 故 BD 與 BC 成一直線.



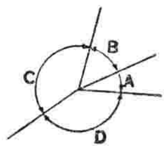
12. 二直線相交,其對頂角相等.

證　設二直線 AB, CD 交於 O, 求證 $A\hat{O}C$ 等於 $B\hat{O}D$, $B\hat{O}C$ 等於 $A\hat{O}D$. 今 AO 立於 CD 上,故鄰角 AOC, AOD 之和,等於二直角 [9 題]. 又 DO 立於 AB 之上,故鄰角 AOD, DOB 之和等於二直角 [9 題]. 故二角 AOC, AOD 之和,等於二角 AOD, DOB 之和 [普. 公. (c)]. 由是可知, $A\hat{O}C$ 等於 $B\hat{O}D$, 仿此,得證 $B\hat{O}C$ 等於 $A\hat{O}D$.



13. 一點之周圍,有 A, B, C, D 四角. B 2倍於 A, C 3 倍於 B, D 等於 C, 則各角爲直角之幾分之幾? 並以度數表之.

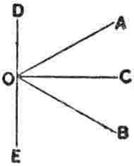
解　$B = 2A$, $C = 3B = 6A$, $D = C$, 故 $A + B + C + D = A + 2A + 6A + 6A = 15A$, 而 $A + B + C + D = 4\hat{R}$, 故 $15A = 4\hat{R}$, 因此 $A = \frac{4}{15}\hat{R}$. 故 $B = \frac{8}{15}\hat{R}$, $C = \frac{24}{15} \times \hat{R} = \frac{8}{5}\hat{R}$, 又 $D = C = \frac{8}{5}\hat{R}$.



又若以度數表之, 則 $A = 90° \times \frac{4}{15} = 24°$, $B = 90° \times \frac{8}{15} = 48°$, $C = 90° \times \frac{8}{5} = 144°$, $D = 144°$.

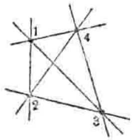
14. 過角之頂點,與此角之二等分線成直角之直線,與角之二邊成等角.

證　設過角 AOB 之頂點 O, 與角之二等分線 OC 成直角之直線爲 DE. 此時 $C\hat{O}D = C\hat{O}E = \hat{R}$, $A\hat{O}C = B\hat{O}C$, 故 $A\hat{O}D = B\hat{O}E$, 即 DE 與 OA, OB 成等角.

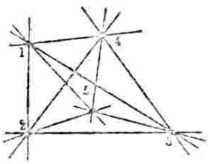


15. 四點最多得決定六直線,四直線最多得決定六點. 又五點最多得決定十直線, 五直線最多得決定十點.

證　(1)四點中各點與他三點聯結,可得十二直線. 然是等直線內,兩兩爲一直線,故



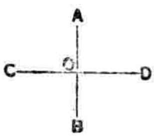
相異之直線,爲十二之半分,卽六直線.而所設四點內,若有三點或四點在一直線上,則直線之數,皆少於六,故以六直線爲最多.次,設所設四直線,皆不平行,則各直線與他直線相交而得之點皆爲三,故共可得十二點.然是等點中,兩兩合一,故相異之點,爲十二之半分,卽六.所設直線內,若有二線,或三線,或四線平行,則交點之數,皆少於六,故以六點爲最多數.



(2) 仿前推論,得證五點最多得決定 4×5之半分,卽十直線,五直線最多得決定十點.

16. 二直線相交,其所成之四角,若有一爲直角,則他三角亦爲直角.

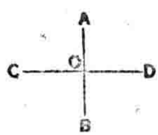
圖 設 AOB, COD 爲二直線, AOC 爲直角.



此時 $A\hat{O}C$,$A\hat{O}D$ 之和等於二直角 [9題],而 $A\hat{O}C$ 爲直角 [假設], 故 $A\hat{O}D$ 亦爲直角. 根據同理, $D\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ 亦各爲直角.

17. 會於一點之四直線,設其所成之角皆爲直角,則四直線成二直線.

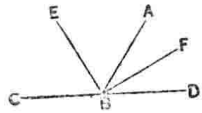
圖 設會於一點 O 之四直線爲 AO,CO,BO,DO, 其所成之角 AOC, COB, BOD, DOA 皆爲直角. 於是 $A\hat{O}C$, $C\hat{O}B$, 爲各直角,故 $A\hat{O}C + C\hat{O}B = 2\hat{R}$,



故 AO, BO 成一直線 [11題]. 根據同理, CO, DO 亦成一直線.故四直線兩兩成一直線.

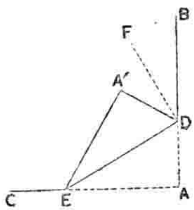
18. 一直線與他直線成二鄰角,各角之二等分線互爲垂線.

圖 設 $A\hat{B}C$, $A\hat{B}D$ 爲直線 AB 與 CBD 所成之鄰角,BE, BF 爲其二等分線, 求證 $E\hat{B}F$ 爲直角. BE 爲 $A\hat{B}C$ 之二等分線,故 $A\hat{B}E = E\hat{B}C$; 同理, $A\hat{B}F = F\hat{B}D$, 故 $E\hat{B}F = E\hat{B}C + F\hat{B}D$ [普. 公. (d)]. 然 $E\hat{B}F + E\hat{B}C + F\hat{B}D = 2\hat{R}$ [10題],故 $E\hat{B}F$ 爲直角.



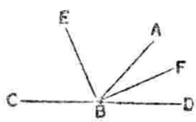
19. 斜折書籍之一頁,則其線之二部分 [由一線所折成之二部分] 所成角之二等分線,與折痕成直角.

圖 設一頁之書角爲 A, 斜折而至於 A′之位置, DE 爲其折痕,一線 BDA 折而爲 DB,DA′二部分,其所成角之二等分線爲 DF, 求證 DF 與 DE 成直角. 兹 A 折至 A′ 之位置, 故 $A\hat{D}E = A'\hat{D}E$, 因此 DE 爲 $A\hat{D}A'$ 之二等分線, 故 $A'\hat{D}E + A'\hat{D}F = \hat{R}$ [18題].



20. 二鄰角之二等分線,若互相垂直,則其所不共之二邊,成一直線.

圖 設 $A\hat{B}C$, $A\hat{B}D$ 爲共有頂點 B 之二鄰角,其二等分線分別爲 BE, BF, 且 BE 垂直於BF, 求證 CB, BD 成一直線. 今



$A\hat{B}C = 2A\hat{B}E$, $A\hat{B}D = 2A\hat{B}F$, 故 $A\hat{B}C + A\hat{B}D = 2A\hat{B}E + 2A\hat{B}F = 2(A\hat{B}E + A\hat{B}F) = 2\hat{R}$. 故不共之二邊 CB, BD 成一直線 [11題].

21. 前題中 $E\hat{B}C$ 與 $F\hat{B}D$ 互爲餘角, $A\hat{B}E$ 與 $D\hat{B}E$ 互爲補角.

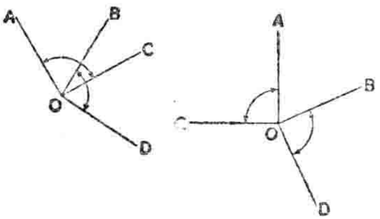
證 $E\hat{B}C = \frac{1}{2}A\hat{B}C$, $F\hat{B}D = \frac{1}{2}A\hat{B}D$. 而 $A\hat{B}C + A\hat{B}D = 2\hat{R}$, 故 $E\hat{B}C + F\hat{B}D = \frac{1}{2}(A\hat{B}C + A\hat{B}D) = \hat{R}$. 又 $A\hat{B}E = E\hat{B}C$, 而 $E\hat{B}C + D\hat{B}E = 2\hat{R}$, 故 $A\hat{B}E + D\hat{B}E = 2\hat{R}$.

22. 六直線會於一點,成六等角,則各角爲一直角之三分之二.

證 六角之和爲一周角, 卽 $4\hat{R}$, 故各角爲 $4\hat{R}$ 之六分之一, 卽 $\hat{R}$ 之三分之二.

23. 二角 AOB, COD 公有一頂點 O, 邊 AO 與邊 BO 分別垂直於邊 CO 與邊 DO, 則 $A\hat{O}B$ 或等於 $C\hat{O}D$, 或爲其補角.

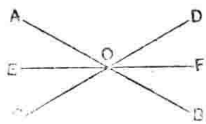
證 如 (1) 圖中, $A\hat{O}C = B\hat{O}D = \hat{R}$, 故雙方減



以 $B\hat{O}C$, 則其所餘之 $A\hat{O}B$ 與 $C\hat{O}D$ 相等. 如 (2) 圖中, $A\hat{O}B + B\hat{O}D + D\hat{O}C + A\hat{O}C = 4\hat{R}$, 而 $A\hat{O}C$, $B\hat{O}D$ 各爲直角, 故 $A\hat{O}B + C\hat{O}D = 2\hat{R}$, 故卽二角互爲補角.

24. 二對頂角之二等分線,成一直線.

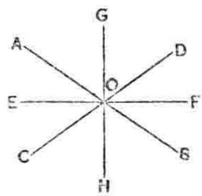
證 設二直線 AB, CD 交於 O, 二對頂角 AOC, BOD 之二等分線分別爲 OE, OF. 此時 $A\hat{O}C = B\hat{O}D$, 故其各自之半分 $A\hat{O}E = B\hat{O}F$. 而



$A\hat{O}F + B\hat{O}F = 2\hat{R}$, 故 $A\hat{O}F + A\hat{O}E = 2\hat{R}$, 故 OE, OF 成一直線 [11題].

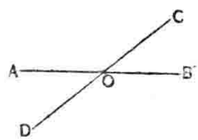
25. 相交二直線所成之四角,其二等分線成互相垂直之二直線.

證 設二直線 AB, CD 交於 O, 其所成四角之二等分線分別爲 OE, OH, OF, OG, 於是依據前題, EO, OF 成一直線, GO, OH 亦成一直線, 且此二直線互相垂直 [18題].

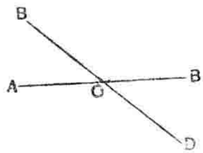


26. 四直線會於一點, 若不相隣之角相等,則此等直線,兩兩成一直線.

證 設四直線 AO, DO, BO, CO 會於一點 O, 其不相隣之角相等, 卽 $A\hat{O}D = B\hat{O}C$, $A\hat{O}C = B\hat{O}D$. 於是因 $A\hat{O}D = B\hat{O}C$, $A\hat{O}C = B\hat{O}D$, 故四角之和,等於 $2\times(A\hat{O}D + A\hat{O}C)$. 然四角之和爲 $4\hat{R}$, 故 $A\hat{O}D + A\hat{O}C = 2\hat{R}$, 故 CO, OD 成一直線[11題]. 同理, AO, OB 亦成一直線.



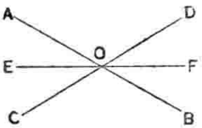
27. 二直線 OB, OD 與一直線 AC 會於同一點 O, 若在 AC 異側之二角 AOB, COD 相等, 則 BOD 成一直線.



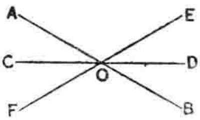
證 $A\hat{O}B + B\hat{O}C = 2\hat{R}$, 然 $A\hat{O}B = C\hat{O}D$ 故 $C\hat{O}D + B\hat{O}C = 2\hat{R}$, 故 OB, OD 成一直線 [11題].

28. 二等分對頂角之一之直線,亦二等分他一對頂角.

解 設二直線 AOB, COD 交於 O, 而成對頂角 AOC, BOD, $A\hat{O}C$ 之二等分線爲 EOF; 求證此直線亦二等分他一角 BOD. 蓋 $A\hat{O}E = B\hat{O}F$, $C\hat{O}E = D\hat{O}F$, 而 $A\hat{O}E = C\hat{O}E$, 故 $B\hat{O}F = D\hat{O}F$.



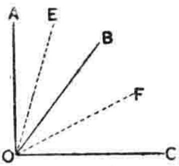
29. 二直線 AO, BO, 在他直線 CD 之兩側, 而與 CD 交於同點 O, 其所成角 AOC, COB 之和等於二直角. 引過 O 點之直線 EOF, 則 $A\hat{O}F$ 等於 $B\hat{O}E$



解 $A\hat{O}C + C\hat{O}B = 2\hat{R}$, 故 AO, OB 成一直線 [11題]. 因此 $A\hat{O}F$, $B\hat{O}E$ 爲二直線 AB, EF 相交而生之對頂角, 故相等 [12題].

30. 相隣二角若互爲餘角, 則各角二等分線間之角, 等於直角之半分.

解 設 $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ 互爲餘角, 其二等分線分別爲 OE, OF, 求證 $E\hat{O}F$ 爲直角之半分. 蓋 $E\hat{O}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B$, $B\hat{O}F = \frac{1}{2}B\hat{O}C$, 故 $E\hat{O}F = E\hat{O}B + B\hat{O}F = \frac{1}{2}(A\hat{O}B + B\hat{O}C) = \frac{1}{2}\hat{R}$.



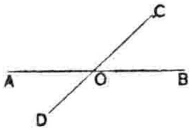
31. 設 $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ 爲依次相隣之角, 而其度數則 $A\hat{O}B = 105°30'$, $BOC = 15°20'$, $COD = 69°10'$, 問 AO, OD 成一直線否?

解 $A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}D = 105°30' + 15°20' + 69°10' = 190°$, 故 AO, OD 不成一直線.

32. 定理<u>二直線相交, 其對頂角相等</u>之逆定理及倒定理如何? 試證之.

解 此定理若改如下述, 則其逆定理與倒定理, 甚易知之.

<u>四直線交於一點, 若兩兩成一直線, 則其二雙相對之角相等.</u>



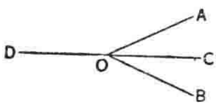
(逆定理) 四直線交於一點, 若二雙相對之角相等, 則四直線兩兩成一直線.

解 [同26題].

(倒定理) 四直線交於一點, 若不兩兩成一直線, 則其二雙相對之角不等. 何則, 蓋若各雙相對之角相等, 則四直線兩兩成一直線故也 [前款].

33. 角之二邊, 與其二等分線之延線成等角.

解 設 $A\hat{O}B$ 之二等分線 CO 之延線爲 DO, 則 $A\hat{O}D$ 爲 $A\hat{O}C$ 之補角, $B\hat{O}D$ 爲 $B\hat{O}C$ 之補角. 然 $A\hat{O}C = B\hat{O}C$, 故 $A\hat{O}D$, $B\hat{O}D$ 爲相等角之補角, 因此相等 [8題].



34. 設直線 AB 之中點爲 M, P 爲內分點, 則 $PM = \frac{1}{2}(AP \sim BP)$. 又設 Q 爲外分點, 則 $QM = \frac{1}{2}(AQ + BQ)$.

解 設 P 在 M 與 B 之間, 則 $AP > BP$, 且 $AP = AM + PM = BM + PM = 2PM + BP$, 故 $2PM = AP - BP$. 故 $PM = \frac{1}{2}(AP - BP)$. 若 P 在 M 與 A 之間, 則 $PM = \frac{1}{2}(BP - AP)$. 故 PM