
應用數學
便覽

應用數學便覽

吉	理學博士 田耕	作
雨	理學博士 宮綾	夫
伊	理學博士 藤	清
加	理學博士 藤敏	夫
松	理學博士 島與	三
	共編	

丸善株式會社

編者の略歴

吉田耕作	大阪大学教授，理学博士；昭和6年東大理学部卒
雨宮綾夫	東京大学助教授，理学博士；昭和6年東大理学部卒
伊藤清	京都大学教授，理学博士；昭和13年東大理学部卒
加藤敏夫	東京大学助教授，理学博士；昭和16年東大理学部卒
松島与三	名古屋大学助教授，理学博士；昭和17年阪大理学部卒

応用数学便覧

¥ 950.

昭和29年7月15日発行

著作権所有



編者 代表者 吉田耕作
雨宮綾夫

発行者 丸善株式会社
代表者 司 忠
東京都中央区日本橋通2丁目6番地

印刷者 笠井朝義
東京都港区芝南佐久間町1丁目53番地

発行所 丸善株式会社
東京都中央区日本橋通2丁目6番地

印刷 合資会社 笠井出版印刷社・製本 株式会社松岳社

序

理学，工学の理論的取扱において数学の果す役割は多大であるが，いわゆる純粋数学はそれ自体の発展方向と性格とを持つため直ちにその結論を利用するには多少の障害があることが多い．応用数学はこの間隙を埋めるものである．従ってこの学問はつねに新らしい数学の結果を摂取咀嚼し，これを応用面の要求に一致させるべく努力をしなければならない．

在来この種の学問に関する成書文献は国の内外を問わず正に汗牛充棟ともいう程刊行されているが，そのエッセンスのみを取出したものとしては E. Madelung: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers 及び W. Magnus: F. Oberhettinger: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik の二書その他にはいわゆる公式集の類が発刊されているだけである．もとより，数学においては結論を重要視する許りでなくその論証の過程にも興味の焦点がおかれるが，実際の利用者側からいえば前提と結論だけが知りたいという要望が強い．編者等はこれに応えんがためにこの小著を著わした次第である．もちろん，編者等の浅学菲才はこのような広範囲の学問を蔽うことは不可能であるから，恐らくは随処に見られるであろう欠陥についての大方の御叱正をうけられれば幸甚である．

本書を編纂するにあたりその方針として，新制高校の上級以上に目標をおいた．従って微積分学，解析幾何学の初歩的の知識をもつことを一応前提としているが，斯学の性質上多少程度の高い部分をも採録することとし，証明はできるだけ省略するが，単に公式集的な色彩を排除するため簡略な説明を副えて理解を助ける一助とした．また通常類書に見られる凡例を廃して巻末に附した記号集に十分の説明を加えた．これはこれのみでも或る程度の知識が得られることを目的としたのである．

なおこの記号の集録には本文の該当ページを併わせ掲載し読者諸氏の便に供することにし，各項目の最後に主な参考書名を記したのも同じ目的のためである．

本書における項目の分担は序論，代数学は吉田，松島があたり，幾何学は伊藤，松島，解析学は吉田，加藤，雨宮が担当した．最後の確率及び統計は伊藤

の記述したものである。また、特殊項目の執筆者として東大教授渡辺茂氏（歯車の幾何学）東大教授福田節雄氏（演算子法の一部）の御協力を得、数学記号集には東大講師理学士村田健郎氏を煩わした。従って各項目の長短、難易、適不適、或いは記号等にはある程度の不均衡や不統一がある恐れがあるが、この点に関し読者諸賢の御教示をお願いする次第である。

本書を編纂するにあたり、原稿の整理、校正に致された丸善出版部の植木厚、片倉弘人、一色敏子の諸氏の熱意と努力に対してここに厚く感謝の意を表わすものである。

昭和29年初夏

編 者 識

目次

1. 序 論

1.1 数の表現	1
1.1.1 n 進法 (n 進法及び 連分数).	1
1.1.2 連分数.	1
1.2 初等整数論.	3
1.2.1 定 義.	3
1.2.2 定 理.	3
1.3 順列, 組合わせ及び二項定理, 多項定理	5
1.3.1 順 列.	5
1.3.2 組合わせ.	5
1.3.3 二項定理及び二項係数.	6
1.3.4 多項定理.	6
1.4 部分分数.	6
1.5 不等式.	6
1.5.1 Schwarz, Hölder 及び Minkowski の不等式	7
1.5.2 平均の間の不等式, 凸函数.	7
1.6 三角法.	8
1.6.1 三角函数.	9
1.6.2 三角形(平面及び球面)に 関する公式.	11
1.6.3 双曲線函数.	12
1.7 高次方程式.	14
1.7.1 解の公式.	14
1.7.2 n 次方程式.	14
1.7.3 実係数の n 次方程式.	15
1.7.4 複素係数の n 次方程式に 対する Sturm 式の定理.	16
1.7.5 数値解法.	17
1.8 集合算, Boole (ブール) 代数.	19
1.8.1 集 合.	19
1.8.2 Boole の代数	20

次

1.8.3 写像, 集合の濃度.	21
1.9 位相空間.	22
1.9.1 距離空間, 位相空間.	22
1.9.2 写像の連続性.	23
1.9.3 集積点, 閉集合, 開集合, 粗, 連結, コンパクト.	23
1.9.4 相対位相.	24
1.9.5 位相積.	25
1.10 (代数的) 位相幾何学入門.	25
1.10.1 一次元複体又は線状複体	25
1.10.2 二次元集合体としての曲 面の分類	26
1.10.3 n 次元への拡張	27

2. 一 次 代 数

2.1 行 列.	29
2.1.1 行列の定義, 記号.	29
2.1.2 行列の算法.	29
2.1.3 行列の行列式, 階数, 逆行列, 固有和.	31
2.1.4 $n \times n$ 行列の対称性.	31
2.1.5 行列の変換.	33
2.1.6 $n \times n$ 行列の多項式, 函数.	25
2.2 行列式.	36
2.2.1 行列式の定義.	36
2.2.2 行列式の主要性質.	37
2.2.3 行列式の値の計算法.	38
2.2.4 特殊行列式.	38
2.2.5 函数行列式.	40
2.3 連立一次方程式.	42
2.3.1 定 義.	42
2.3.2 $m=n$ なる場合の可解性の 条件.	42
2.3.3 数値解法.	44
2.4 一次変換と二次形式.	44

2.4.1	線形空間又はベクトル空間.	44
2.4.2	一次変換.	47
2.4.3	双対空間又は共軌空間.	48
2.4.4	二次形式及びエルミット形式.	49
2.4.5	ユニタリ変換及び直交変換.	51
3. 群論及び群の表現論		
3.1	群, 環, 及び体.	53
3.1.1	定義.	53
3.1.2	対称群.	54
3.1.3	部分群, 正規部分群, 剰余類.	55
3.1.4	同型, 準同型.	55
3.2	群の表現.	55
3.2.1	定義.	55
3.2.2	表現の可約性, 既約性, 不変部分空間.	56
3.2.3	有限群の表現論.	58
3.2.4	対称群の表現.	59
3.2.5	回転群の表現.	61
3.2.6	Lorentz 群及びその表現.	66
3.2.7	結晶族群.	69
4. 解析幾何学, 射影幾何学		
4.1	平面及び立体解析幾何学.	77
4.1.1	線分.	77
4.1.2	平面.	77
4.1.3	立体.	78
4.2	射影幾何学.	81
4.2.1	射影空間.	81
4.2.2	射影的対応.	82
4.2.3	二次曲面.	83
4.2.4	二次元の射影空間(射影平面)の性質.	84
4.2.5	射影変換群の部分群とこれに伴う幾何学.	85
4.3	計算図表.	86

4.3.1	概説.	86
4.3.2	共点図表.	86
4.3.3	共線図表.	87
4.3.4	共線図表と共点図表の関係.	89
4.3.5	変数が3個以上のとき.	89

5. 微分幾何学

5.1	曲線論.	93
5.1.1	方程式.	93
5.1.2	曲線の長さ.	93
5.1.3	接線及び接線ベクトル.	93
5.1.4	曲率.	94
5.1.5	切触平面.	94
5.1.6	Frenet の公式.	95
5.1.7	曲線の自然方程式.	95
5.2	曲面論.	96
5.2.1	接平面及び法線の方程式.	96
5.2.2	第一基本二次微分形式及び基本テンソル.	96
5.2.3	Gauss の全曲率.	97
5.2.4	第二基本微分形式及び主テンソル.	98
5.2.5	曲面論の基本定理.	98
5.2.6	曲面の法曲率.	99
5.2.7	主方向及び主曲率.	99
5.3	歯車の理論.	100
5.3.1	平歯車の歯形.	100
5.3.2	空間歯車の基礎方程式.	101
5.4	座標系.	102
5.4.1	n 次元ユークリッド(点)空間.	102
5.4.2	R_n の座標枠及び直線座標.	103
5.4.3	直線座標系の間の関係.	103
5.4.4	曲線座標系.	103
5.4.5	曲線座標系の自然座標枠と座標変換, ユークリッド空間の基本テンソル.	104
5.4.6	線素及び体積要素.	105

5.4.7	Christoffel の記号	105
5.4.8	ユークリッド空間の方向附 けと座標系の正負.	106
5.4.9	三次元空間におけるベクト ル積.	106
5.5	特殊な直交座標系.	107
5.5.1	平面の場合.	107
5.5.2	三次元の場合.	108
5.5.3	n 次元空間の極座標 $(r, \vartheta,$ $\vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1})$	114
5.5.4	変数分離の例.	115
5.6	ベクトル解析.	118
5.6.1	ベクトル場.	118
5.6.2	スカラー場及びベクトル場 における微分作用素.	119
5.6.3	曲線座標系における表示.	120
5.6.4	特殊なベクトル場.	120
5.6.5	線積分.	120
5.6.6	線積分に関する基本定理と ベクトル場.	121
5.6.7	平面上での Gauss, Stokes 及び Green の定理.	122
5.6.8	曲面及び曲面上の座標系.	123
5.6.9	面積分.	124
5.6.10	Gauss, Stokes 及び Green の定理	125
5.7	テンソル解析.	126
5.7.1	一点 P におけるテンソルの 定義.	126
5.7.2	テンソルに関する演算.	127
5.7.3	テンソルであるための判定 条件.	128
5.7.4	対称テンソル及び交代テン ソル.	128
5.7.5	ベクトルの外積.	128
5.7.6	一点 P における密度テンソ ルと密度スカラー.	129

5.7.7	交代テンソルの対偶テンソ ル.	130
5.7.8	テンソル場.	130
5.7.9	テンソル場の共変微分.	131
5.7.10	平行ベクトル場	133
5.8	リーマン幾何学.	133
5.8.1	多様体及び多様体における ベクトル, テンソル.	133
5.8.2	Riemann 空間.	133
5.8.3	基本テンソル, ベクトルの 長さ及び二つのベクトルの 間の角.	134
5.8.4	Riemann 空間の曲線, 測 地線 (I)	134
5.8.5	平行ベクトル場, 測地線 (II).	135
5.8.6	ベクトルの平行移動.	135
5.8.7	リーマン空間の曲線のユーク リッド空間への展開.	135
5.8.8	曲率テンソル.	136
5.8.9	曲率テンソルの性質, Ricci のテンソル, 曲率スカラー.	137
5.8.10	Bianchi の恒等式.	138
5.8.11	測地座標系	138

6. 解析概論

6.1	微分積分.	139
6.1.1	函数の連続性.	139
6.1.2	有界変動の函数.	140
6.1.3	微分 (1 変数)	140
6.1.4	偏微分.	142
6.1.5	積 分.	145
6.1.6	多重積分.	152
6.1.7	Stieltjes 積分	152
6.2	数値積分法.	154
6.2.1	補間法の応用.	154
6.2.2	平均値法.	155
6.2.3	広範囲の積分.	157

6.3 Lebesgue 積分	157
6.3.1 n 次元ユークリッド空間に おける Lebesgue 積分	157
6.3.2 抽象的 Lebesgue 積分	160
6.4 函 数 論	161
6.4.1 複素変数の函数	161
6.4.2 正則函数	162
6.4.3 積分定理	164
6.4.4 整函数	166
6.4.5 孤立特異点, Laurent 展開	167
6.4.6 有理型函数	168
6.4.7 一次函数	169
6.4.8 解析接続	169
6.4.9 等角写像	171
6.4.10 鞍部点法	172
6.4.11 多変数の正則函数	172
6.5 級 数	173
6.5.1 数 列	173
6.5.2 無限級数	177
6.5.3 二重数列	180
6.5.4 二重級数	180
6.5.5 変数項の級数	182
6.5.6 冪級数	183
6.5.7 無限乗積	184
6.5.8 雑級数	186
6.5.9 漸近級数	187
6.5.10 収斂しない級数の総和法	192

7. 常微分方程式

7.1 一般的性質	199
7.1.1 存在定理	199
7.1.2 解の種類	199
7.2 一階微分方程式	199
7.2.1 初等解法	199
7.3 高階微分方程式	202
7.4 線形微分方程式	203
7.4.1 一般的性質	203
7.4.2 $L(y)=F(x)$ の特解を見出	

す法	204
7.4.3 定数係数の場合	204
7.5 連立常微分方程式	206
7.5.1 一般の場合	206
7.5.2 線形方程式	206
7.6 定積分による解法	207
7.6.1 Laplace 変換	207
7.6.2 Euler 変換	207
7.7 級数解法	207
7.7.1 一般的方法	207
7.7.2 Fuchs 形の微分方程式	208
7.7.3 Riemann の $\wp$ -函数	209
7.7.4 超幾何函数, 超幾何級数	209
7.7.5 拡張した超幾何級数	214
7.8 積分曲線の性質	215
7.8.1 1階常微分方程式の 積分曲線	215
7.8.2 振動定理	216
7.9 2階常微分方程式の境界値問題, 固有値問題	217
7.9.1 Green 函数	217
7.9.2 随伴微分系	217
7.9.3 Sturm-Liouville 型境界値 問題	217
7.9.4 特異固有値問題	219
7.9.5 W. K. B 法	220
7.10 常微分方程式の数値解法	221
7.10.1 逐次近似法	221
7.10.2 狭い範囲に用いる方法	222
7.10.3 進行積分法	223
7.11 全微分方程式	225
7.11.1 3変数の全微分方程式	225
7.11.2 n 変数連立全微分方程式	226
7.11.3 1階線型連立偏微分方程式 との関係	227

8. 偏微分方程式

8.1 1階偏微分方程式	229
------------------------	-----

8.1.1 特殊な形をもつ場合 (完全解)	229
8.1.2 Lagrange の方法	229
8.1.3 Charpit の方法	230
8.1.4 Jacobi の方法	230
8.1.5 Jacobi 及び Mayer の方 法	231
8.1.6 連立偏微分方程式	232
8.1.7 線形同次連立方程式	232
8.2 二階偏微分方程式	233
8.2.1 完全解から一般解を導く方 法	233
8.2.2 中間積分のある場合 (Monge の方法)	234
8.2.3 中間積分のない場合 (Darboux の方法)	234
8.2.4 Laplace の方法	234
8.2.5 Ampère の方法	235
8.2.6 その他の方法	236
8.3 切触変換	237
8.3.1 定 義	237
8.3.2 Legendre 変換, 正準変換	238
8.3.3 切触変換の一般の形	239
8.4 1階偏微分方程式の初期値問題	240
8.4.1 準線型方程式	240
8.4.2 一般の場合	242
8.5 2階偏微分方程式の分類	243
8.5.1 2階線型方程式	243
8.5.2 2階準線型方程式	245
8.5.3 高階方程式および連立方程 式	245
8.6 楕円型偏微分方程式	245
8.6.1 Laplace および Poisson の 方程式	245
8.6.2 Helmholtz の方程式	248
8.6.3 一般の2階線形方程式	249
8.6.4 固有値問題, 自己随伴な微分 式	250

8.7 双曲形偏微分方程式	252
8.7.1 波動方程式	252
8.7.2 一般の電信方程式	254
8.7.3 2変数の方程式	255
8.7.4 $L[u]=P_0(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ $+P_1(x)\frac{\partial u}{\partial t}-L_0(u)=f(x,t),$ L_0 は $x_1, \dots, x_m$ に関する微 分式	256
8.8 放物型方程式	257
8.8.1 熱伝導の方程式	257
8.8.2 一般の放物型方程式	258
8.8.3 Schrödinger 方程式	258
8.9 変数分離の方法	259
8.9.1 双曲型及び放物型	259
8.9.2 楕円型	253

9. 変 分 法

9.0.1 有限箇の変数の函数の極値 問題	263
9.0.2 変分法の問題	263
9.0.3 Euler の (微分) 方程式	264
9.0.4 詳細な条件	264
9.0.5 Euler 方程式の積分	265
9.0.6 境界条件	265
9.0.7 その他の汎函数	266
9.0.8 条件付変分法	267
9.0.9 解析力学への応用	267
9.0.10 変分法の直接解法	268
9.0.11 線型の問題	268

10. 積 分 方 程 式

10.0.1 定義及び分類	271
10.0.2 解法 (連続解)	271
10.0.3 対称核の場合	274
10.0.4 その他の場合	275
10.0.5 特異積分方程式	276
10.0.6 多変数への拡張	277

10.0.7	線形常微分方程式との関係	277
10.0.8	数値解法	278

11. 函数解析

11.1	Fourier (フーリエ)級数	281
11.1.1	定義	281
11.1.2	Fourier 級数に対する主 要事項	281
11.1.3	Fourier 級数の例	282
11.1.4	多変数函数の Fourier 級数	285
11.1.5	Poisson (ポアッソン) の 総和公式	285
11.1.6	調和分析	286
11.2	Fourier 変換	289
11.2.1	定義	289
11.2.2	Fourier 変換の性質	290
11.2.3	拡張 1.	291
11.2.4	拡張 2. Plancherel の 定理	291
11.2.5	Fourier 変換の表	292
11.2.6	多変数函数の Fourier 変換	297
11.2.7	Hankel 変換	297
11.2.8	Hilbert 変換	297
11.2.9	Mellin 変換	298
11.3	調和解析	299
11.3.1	問題	299
11.3.2	正の定符号函数	300
11.3.3	拡張	300
11.3.4	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dv(\lambda)$ の 調和解析	301
11.3.5	概週期函数	301
11.3.6	概週期函数 $f(t)$ の調和 解析	302
11.4	Laplace 変換及び Heaviside の記号解析	303
11.4.1	定義及び収斂域	303

11.4.2	反転公式	303
11.4.3	Heaviside の記号解析	303
11.4.4	Heaviside の記号解析の 使用法	309
11.5	ヒルベルト空間論	312
11.5.1	作用素の定義	312
11.5.2	作用素の対称性	313
11.5.3	スペクトル分解	314
11.5.4	スペクトル分解の固有値 問題への応用	314
11.5.5	スペクトル分解の展開定 理への応用	315
11.5.6	Stone の定理	317
11.5.7	ユニタリ作用素のスペク トル分解	317
11.5.8	摂動論	317
11.6	超函数	318
11.6.1	定義	318
11.6.2	Dirac の δ 函数及び Heaviside の Y 函数の意 味付け	319
11.6.3	超函数の表現	320
11.6.4	超函数概念の n 次元ユー クリッド空間 R^n への拡張	320
11.6.5	超函数の算法	321
11.6.6	超函数の微分方程式	321
11.6.7	超函数による Fourier 級 数論	322

12. 補間法及び差分法

12.1	補間法	325
12.1.1	階差	325
12.1.2	補間公式	325
12.1.3	階差を用いない場合	330
12.1.4	Prony の補間法	330
12.2	差分法	331
12.2.1	差分	331
12.2.2	和分	332

12.2.3 Bernoulli 数及び Bernoulli 函数	334
12.3 差分方程式	335
12.3.1 定 義	335
12.3.2 線形差分方程式	336
12.3.3 定数係数の線形差分方程 式	336
12.3.4 定数係数連立差分方程式 .	337
12.3.5 一般線形差分方程式 . . .	338
12.3.6 偏差分方程式	339

13. 特殊函数

13.1 ガンマ函数	341
13.1.1 定義及び基本性質	341
13.1.2 諸性質	342
13.1.3 漸近展開	343
13.1.4 ベータ函数	343
13.1.5 プシイ函数	345
13.1.6 雑性質	346
13.2 直交函数系	346
13.2.1 定 義	346
13.2.2 直交函数系による Fourier 級数, Bessel 不等式	347
13.2.3 正規直交函数系の完全性 .	347
13.2.4 直交化	347
13.2.5 直交多項式	348
13.2.6 Gegenbauer 多項式 $C_n^\nu(t)$	363
13.2.7 Tschebyscheff の多項式 $T_n(x)$ の諸性質	364
13.2.8 Hermite 多項式 $H_n(x)$ の諸性質	365
13.2.9 Jacobi 多項式 $F_n(\alpha, \gamma, x)$ の諸性質	366
13.2.10 Laguerre 多項式 $L_m^{(\alpha)}(x)$ の諸性質	366
13.3 Bessel 函数	367
13.3.1 定義と性質	368

13.3.2 Bessel 函数を含む定積分 .	391
13.3.3 Bessel 函数を含む級数 . .	399
13.3.4 准 Bessel 多項式	405
13.3.5 准 Bessel 函数	412
13.4 Whittaker 函数	421
13.4.1 定 義	421
13.4.2 諸性質	423
13.4.3 Weber の函数	426
13.5 Mathieu 函数	429
13.5.1 定 義	429
13.5.2 簡単な性質	434
13.5.3 Mathieu 函数の変形 . . .	435
13.5.4 第二の解	436
13.5.5 ベッセル函数による表現 .	437
13.6 Lamé の函数	439
13.6.1 定 義	439
13.6.2 楕円体面調和函数	441
13.7 楕円函数と楕円積分	443
13.7.1 定義と基本積分	443
13.7.2 Weierstrass の函数 . . .	445
13.7.3 $\wp$ 函数	450
13.7.4 Jacobi の楕円函数	453
13.7.5 種々なパラメータ間の関 係, 諸函数間の関係	458
13.7.6 楕円積分	461

14. 確率及び統計

14.1 確 率 論	469
14.1.1 測度論的確率論	469
14.1.2 確率変数	470
14.1.3 一次元分布	473
14.1.4 n 次元分布	476
14.1.5 大数の法則	477
14.1.6 確率過程	478
14.2 統 計	482
14.2.1 記述統計	482
14.2.2 推測統計とは何か	484
14.2.3 分布論	484

14.2.4 推定論 486

14.2.5 検定論 490

14.3 最小自乗法 493

14.3.1 偶然誤差 493

14.3.2 直接観測処理 494

14.3.3 間接観測の処理 494

14.3.4 条件付き間接測定 495

D 表

数学記号集 505

 I 論理計算記号

 II 一般記号

【附】函数記号表

索引 519

1. 序 論

1.1 数の表現 (N 進法及び連分数)

1.1.1 n 進法 (n -adic expansion)

良く知られた十進法の他に二進法や三進法一般に n 進法が理論上又は電気計算機等に用いられることがある: 例えば ω を正数として

$$\omega = \alpha_m \cdot 2^m + \alpha_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_0 + \alpha_{-1} \cdot 2^{-1} + \alpha_{-2} \cdot 2^{-2} + \cdots + \alpha_{-k} \cdot 2^{-k} \cdots,$$

ここに α は 0 又は 1 である.

これを
$$\omega = [\alpha_m \alpha_{m-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0, \alpha_{-1} \alpha_{-2} \cdots \alpha_{-k}]_2$$

のように書く. 十進法の場合と同じく ω が無理数ならば ω はただ一通りの非巡環無限小数に, 又は有理数ならば二通りに巡還小数で表わされる. 例えば

$$2 = [1.000 \cdots]_2 = [0.111 \cdots]_2.$$

1.1.2 連分数 (continued fraction)

1) 定 義 $a_0, a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots$ 等の文字に対する有理式

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \cdots + \frac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}}}}$$

を連分数という. 上の連分数を

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n}$$

のように記すと便利である. また普通に重要なのは分子 $b_1, b_2, \dots, b_n$ が 1 である場合即ち

$$k_0 + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}$$

の形の連分数であるから, 以下このような連分数だけを考える.

2) 連分数を分数に直すこと Gauss (ガウス) の記号

$$[k_0] = k_0$$

$$[k_0, k_1] = k_0 k_1 + 1$$

$$[k_0, k_1, k_2] = k_0 k_1 k_2 + k_2 + k_0$$

$$\vdots$$

$$[k_0, k_1, \dots, k_n] = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}] k_n + [k_0, k_1, \dots, k_{n-2}]$$

を導入すれば

$$[k_0, k_1, \dots, k_{n-1}] = k_0[k_1, k_2, \dots, k_{n-1}] + [k_2, k_3, \dots, k_{n-1}]$$

の成立つことが証明できる. これを用いて

$$k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots + \frac{1}{k_n}}} = \frac{[k_0, k_1, k_2, \dots, k_n]}{[k_1, k_2, \dots, k_n]},$$

$$k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots + \frac{1}{k_{n-1} + \frac{1}{k_n}}}} = \frac{[k_0, k_1, \dots, k_{n-1}]x_n + [k_0, k_1, \dots, k_{n-2}]}{[k_1, k_2, \dots, k_{n-1}]x_n + [k_1, k_2, \dots, k_{n-2}]}.$$

が得られる.

3) 実数の連分数展開 ω を実数とし, ω が整数でないときには ω よりも小なる整数の中で最大のものを k_0 として ($k_0 < \omega < k_0 + 1$)

$$\omega = k_0 + \frac{1}{\omega_1}, \quad \omega_1 > 1.$$

ω_1 が整数でないならば, k_1 を ω_1 よりも小なる最大の整数として

$$\omega_1 = k_1 + \frac{1}{\omega_2}, \quad \omega_2 > 1.$$

従って

$$\omega = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{\omega_2}}.$$

これを繰返して

$$\omega = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots + \frac{1}{k_{n-1} + \frac{1}{\omega_n}}}}$$

を得る. $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$ を部分商, ω_n を全商という. $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$ は整数で, k_0 の他は正の整数である. k_0 は ω が 1 よりも小なる正数ならば 0, ω が負数ならば負の整数である. 且つ ω_n は 1 よりも大である. このような連分数を単純連分数, 整連分数, 正則連分数などということがあるが, 以下単に連分数という.

4) 連分数展開の収斂 3) の展開が限りなく続けられるとき

$$k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots + \frac{1}{k_{n-1}}}} = \frac{p_n}{q_n} \quad \text{とすれば} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \omega.$$

よつて $\frac{p_n}{q_n}$ を ω の近似分数という. また $\frac{p_{n-1} + \lambda p_n}{q_{n-1} + \lambda q_n}$ ($\lambda = 1, 2, \dots, k_n - 1$) を $\frac{p_n}{q_n}$ に対する中間近似分数という.

5) 有理数, 無理数 有理数 $\frac{b}{a}$ は二通りに有限連分数に展開される:

$$\frac{b}{a} = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots + \frac{1}{k_n}}} = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots + \frac{1}{(k_n - 1) + \frac{1}{1}}}} \quad (k_n > 1)$$

逆に有限連分数の値は有理数である.

無理数 ω はただ一通りに無限連分数に展開される:

$$\omega = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \cdots + \frac{1}{k_n + \cdots}}}.$$

逆に無限連分数の値は無理数である.

6) 近似分数の特徴 無理数 ω よりも小なる有理数 (又は大なる有理数), で分母が指定された限界 A を超えないものの中で, ω に最も近いものは分母が最も A に近い奇数番号 n の (又は偶数番号 n の) 近似分数又はその中間近似分数である.

参 考 書

高木貞治: 代数学講義, 共立出版

1.2 初等整数論

$a, b, c, \dots$ は整数を表わすものとする.

1.2.1 定 義

1) $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) が整数のとき a は b で割れるといい, b を a の約数, a を b の倍数とよぶ.
 $b > 0$. a を任意の整数とすれば, $a = qb + r$, $0 \leq r < b$ を満足する整数 q, r が常にただ一組定まる. r を a を b で割った剰余とよぶ

2) (i) 二つ以上の整数 $a, b, \dots$ に共通な約数をそれらの整数の公約数とよぶ.

公約数のうち最大のものを最大公約数とよび $(a, b, \dots)$ で表わす.

$(a, b, \dots) = 1$ なるとき, $a, b, \dots$ は互に素であるという.

(ii) $d = (a, b)$ とすれば $d = ax + by$ を満足する整数 x, y が存在する.

(iii) $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ なる方程式が整数解をもつための必要十分条件は b が $(a_1, \dots, a_n)$ で割れることである.

(iv) 与えられた正の二数の最大公約数を求めるには Euclid の互除法による.

$a > b$ とし, $a = a_1, b = a_2$ とおき a_1 を a_2 で割った剰余を a_3 , a_2 を a_3 で割った剰余を $a_4, \dots$ とすれば $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$ であるから何回目かには 0 になる. $a_{k+1} = 0$ とすれば a_k が a, b の最大公約数である.

3) 二つ以上の整数 $a, b, \dots$ に共通な倍数をそれらの整数の公倍数といい, 正の公倍数のうち最小のものを最小公倍数という.

a, b の最小公倍数を l , 最大公約数を d とすれば $ab = ld$, 但し a, b は正とする.

4) $p > 1$ で p が 1 と p とのほかに約数をもたないとき p を素数という.

1.2.2 定 理

1) (i) 素因数分解定理 $a > 1$ なる整数は素数の積としてたゞ一通りに表わされる:

$$a = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_n^{l_n}$$

p_i を a の素因数とよぶ.

(ii) Dirichlet の定理 $(m, k)=1$ のとき, $mt+k$ なる形の素数は無限に存在する.

(iii) 素数定理 任意の正数 x を超えない素数の数を $\pi(x)$ で表わせば

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{\log x}{x}} = 1.$$

2) $\frac{a}{b}$ を超えない最大の整数を $\left[\frac{a}{b}\right]$ で表わし, Gauss の記号という.

$a-b$ が n で割れるとき $a \equiv b \pmod{n}$, $a-b$ が n で割れない時 $a \not\equiv b \pmod{n}$ なる記号で表わす.

(i) Fermat の定理 $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ ならば $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, p は素数.

(ii) Wilson の定理 p を素数とすれば, $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

3) Euler の函数 $\varphi(n)$, $n \geq 1$ とし $1, 2, 3, \dots, n$ のうち n と素なる数の個数を $\varphi(n)$ とする. 例えば $\varphi(1)=1$, $\varphi(2)=1$, $\varphi(3)=2$.

(i) $n=p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_r^{l_r}$ ($p_1, \dots, p_r$ は互に異なる素数) とすれば

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

(ii) Euler の定理 $(a, n)=1$ ならば $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

(iii) $n = \sum_d \varphi(d)$, (和は n のすべての正の約数 d についてである.)

4) Möbius の函数 $\mu(n)$ $n \geq 1$ とし

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \text{ のとき,} \\ 0, & n \text{ が少なくとも一つの素数の二乗で割れるとき,} \\ (-1)^r, & n \text{ が } r(\geq 1) \text{ 個の異なる素数の積のとき,} \end{cases}$$

(i) $\sum_d \mu(d) = \begin{cases} 1 & n=1 \text{ のとき,} \\ 0 & n \neq 1 \text{ のとき,} \end{cases}$ (和は n のすべての正の約数 d についてである.)

(ii) $\varphi(n) = \sum_d \mu\left(\frac{n}{d}\right) d = n \sum_d \frac{\mu(d)}{d}$

(iii) $x^n - 1 = 0$ の根 $\zeta_k = e^{i \frac{2\pi k}{n}} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$ ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$) のうち n

乗して初めて 1 になるものを 1 の原始 n 乗根とよぶ.

$(k, n)=1$ なる k に対し ζ_k は原始的となる. その数は $\varphi(n)$ に等しい. これらを $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ で表わし, $F_n(x) = \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - \xi_i)$ を円周 n 等分多項式とよぶ. $F_n(x) = \prod (x^d - 1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$, (積は n のすべての正の約数 d について)

参 考 書

高木貞治: 初等整数論, 共立出版.