

新訂 新しい数学
2

新訂 新しい数学

2

- I 数の集合と演算
- II 式の計算
- III 不等式
- IV 連立方程式
- V 1次関数とグラフ
- VI 三角形
- VII 四角形
- VIII 相似な図形
- IX 確率

目 次

この本で学ぶ人のために	8
-------------------	---

I 数の集合と演算	9
-----------------	---

1 数の集合と演算

§1 数の集合と演算	10
§2 演算の法則	14
§3 単位元と逆元	16
§4 剰余系の演算	19
練習問題	24

II 式の計算	25
---------------	----

1 単項式と多項式

§1 単項式と多項式	26
§2 単項式の乗法・除法	27

2 多項式の計算

§1 多項式	31
§2 多項式の加法・減法	33
§3 多項式と単項式の乗法・除法	35
§4 多項式のいろいろな計算	37
§5 式の計算の利用	39
練習問題	43

Ⅲ 不等式 ————— 45

1 1次不等式

§1 数の大小	46
§2 不等式の性質	48
§3 1次不等式の解き方	51
§4 1次不等式の応用	56

2 連立1次不等式

§1 連立不等式の解	59
§2 連立1次不等式の解き方と応用	61
練習問題	66

Ⅳ 連立方程式 ————— 67

1 2元連立方程式

§1 2元1次方程式と連立方程式の解	68
§2 2元連立方程式の解き方	71
§3 いろいろな連立方程式	75
§4 2元連立方程式の応用	77

2 3元連立方程式

§1 3元連立方程式	82
§2 3元連立方程式の応用	84
練習問題	87
研究「1つの2元方程式の整数解」	89
数学のあゆみ「方程式の歴史」	90

V 1次関数とグラフ ————— 91

1 1次関数

§1 関数と関数記号	92
§2 1次関数とグラフ	96

§ 3	1 次関数の性質	100
§ 4	1 次関数による変域の対応	103
§ 5	1 次関数を求めること	105

2 1 次関数と 2 元 1 次方程式

§ 1	2 元 1 次方程式のグラフ	110
§ 2	2 元連立 1 次方程式のグラフによる解法	113
	練習問題	115
	研究「解のない 2 元連立 1 次方程式」.....	118
	「無数に解のある 2 元連立 1 次方程式」...	118

VI 三角形 119

1 定理と証明

§ 1	証明のしかた	120
§ 2	定理の逆	126

2 外心と内心

§ 1	線分の垂直 2 等分線と三角形の外心	131
§ 2	直角三角形の合同	134
§ 3	角の 2 等分線と三角形の内心	137
	練習問題	141
	研究「最短の道」	143
	数学のあゆみ「幾何学とユークリッド原本」...	144

VII 四角形 145

1 平行四辺形

§ 1	平行四辺形の性質	146
§ 2	平行四辺形になるための条件	148

2 特別な平行四辺形

§1 長方形・ひし形・正方形	151
練習問題	157

VII 相似な図形 159

1 相似な三角形

§1 相似な図形	160
§2 三角形の相似条件	165

2 平行線と比例

§1 平行線に交わる直線と比例	170
§2 三角形と比例	173
§3 三角形の重心	178

3 図形の変換

§1 合同変換と相似変換	182
§2 平面図形とその影	187

4 相似形と計量

§1 相似な平面図形の面積と周	190
§2 相似な立体図形の体積と表面積	193
§3 相似の応用	196
練習問題	200

IX 確 率 203

1 順列と組合せ

§1 場合の数	204
§2 順列と組合せ	207

2 確 率

§ 1 確率の考え	213
§ 2 確率の求め方 (1)	217
§ 3 確率の求め方 (2)	222
§ 4 期待値	225
練習問題	227
計算練習	229
作図練習	232
補充問題	233
2年で学んだおもな用語・記号・性質	245
さくいん	247

この本で学ぶ人のために

この本では、2年で学習することがらを9つの章に分けてあります。この本で、

■ 例は、学習内容の理解を深め、学習を進める手がかりとなる具体例です。

例題は、問題を解くときの参考になる代表的な問題例で、[解答]や[考え方]が示されています。とくに、わくで囲んである[解答]は、解答の書き方の1つの手本を示したものです。

■ 問は、学んだことの理解を確かにするために解いてみる問題で、★は、それを考えることが次の学習に進むための手がかりになるような問です。とくに練習を積む必要のあるところには練習が設けてあります。

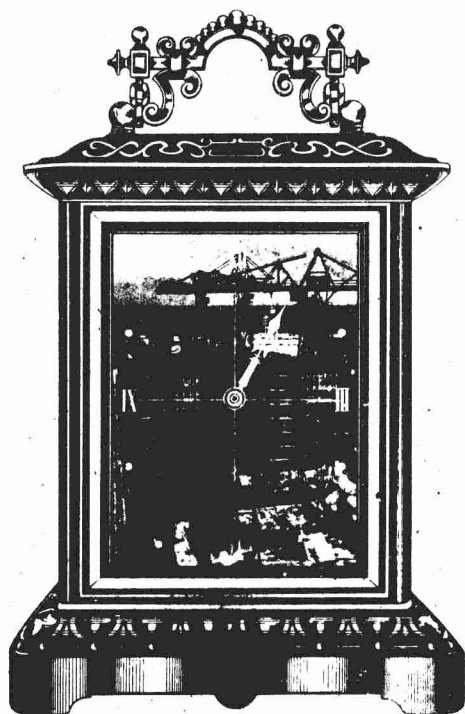
■ 節の終わりにある問題は、その節で学んだことがらをまとめて復習するための問題です。その節の学習のちゅうでも、ときどき考えてみて、それまでに学んだ知識で解けるかどうかためしてみるのもよいでしょう。

■ 章の終わりには練習問題があります。これは、その章で学んだことの復習と応用をかねています。このうち、Aには基本になる問題が、Bにはそれよりやや程度の高い問題がのせてあります。Bの問題は、そのなかから自分の力に合ったものを選んで解いてください。

章末の研究は、発展的な内容で、余力のある場合に学習するものです。

■ 巻末には計算練習、作図練習があります。どちらも、学習の合い間^{かんま}にすこしずつでも、くりかえし練習してください。また、まとめのための2年で学んだおもな用語・記号・性質と、補充問題があります。補充問題には、やや程度の高い応用問題もかなりはっています。時間がかかっても、自分で考えて解いてみるのが、数学の力をつけるのに役だつのです。

I ★ 数の集合と演算



★
2つの自然数の和や積は自然数になるが、差や商は自然数になるとはかぎらない。しかし、有理数どうしの和・差・積・商はみな有理数になる。このように、いろいろな数の集合は、演算についてきまった性質をもっている。また、加減乗除のほかにも、さまざまな演算を考えることができる。ここでは、いろいろな数の集合が演算に対してどんな性質をもっているかを調べることにしよう。

★

1 数の集合と演算

§1 数の集合と演算

数の集合と四則計算

1年で学んだように、自然数の全体に0と負の整数全体を合わせると整数全体の集合になり、整数全体に正や負の分数全体を合わせると有理数全体の集合になる。



1図

★ -2 , $-\frac{3}{2}$, -1 , 0 , 1 , $\frac{3}{2}$, 2 のうち、

- ① 自然数を全部あげよ。
- ② 整数を全部あげよ。
- ③ 有理数を全部あげよ。

自然数どうし、整数どうし、有理数どうしの間に、加減乗除の四則計算を行った結果が、どのような数になるかを調べてみよう。

たとえば、 $2+3=5$, $7+9=16$ のように、どんな2つの自然数をとっても、その和は自然数になる。

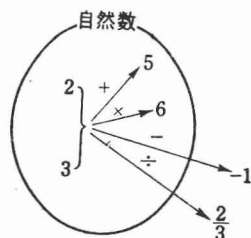
このことを、“自然数全体の集合のなかで、加法は自由に行える”とか、“自然数全体の集合は、加法について閉じている”という。

また、どんな2つの自然数をとっても、その積は自然数になる。

すなわち、自然数全体の集合は、乗法についても閉じている。

ところが、たとえば $2-3 = -1$ のように、2つの自然数の差は、自然数になるとはかぎらない。すなわち、自然数全体の集合は、減法については閉じていない。

問 1 自然数全体の集合は、除法について閉じているか。



2図

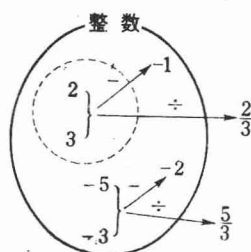
問 2 集合 $E = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ は、加法、乗法について閉じているか。また、減法についてはどうか。

★任意の整数を2つ選んで、加法、乗法、減法、除法を行ってみよ。

結果が整数になるとはかぎらないのは、どの計算のときか。

【注意】 除法というときは、“0で割る”ことはいつも除いて考える。

整数全体の集合は、0や負の整数を要素にもっているから、加法、乗法のほか、減法についても閉じている。しかし、たとえば $2 \div 3$ の結果は整数でないから、除法については閉じていない。



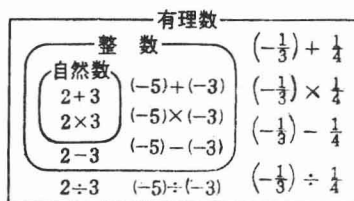
3図

有理数全体の集合は、加法、乗法、減法のほか、除法についても閉じている。

これまで調べたことをまとめると、1表のようになる。

	加	乗	減	除
自然数	○	○	×	×
整数	○	○	○	×
有理数	○	○	○	○

1表



4図

1 表からもわかるように、減法は自然数全体の集合のなかでは自由に行えないが、数の範囲を整数全体にまで拡張すると、自由に行えるようになる。さらに数の範囲を有理数全体の集合に拡張すると、除法もふくめて、四則のすべてが自由に行えるようになる。

このように、自由に行えなかった計算が自由に行えるように、数の範囲は、自然数から整数、有理数へと拡張されたと考えられる。

いろいろな演算

四則の計算では、2つの数、たとえば3と4をきめると、

$$\text{加法では } 3+4=7 \quad \text{乗法では } 3 \times 4=12$$

のように、計算の結果1つの数がきまる。減法や除法についても、同じことがいえる。すなわち、四則計算はすべて、

“2つの数に対して1つの数に対応させる”

させ方であると考えることができる。

$$(a \text{ と } b) \longrightarrow c$$

このように、2つの数 a と b に1つの数 c を対応させるさせ方は、四則のほかにも、いろいろ考えられる。

例 1 2つの有理数 a, b に、それらの平均を対応させる。このとき、5と9には7が対応する。

$$(a \text{ と } b) \longrightarrow \frac{a+b}{2}$$

$$(5 \text{ と } 9) \longrightarrow 7$$

例 2 2つの有理数 a, b に、 $a-b$ の絶対値を対応させる。このとき、5と9には4が対応する。

$$(a \text{ と } b) \longrightarrow |a-b|$$

$$(5 \text{ と } 9) \longrightarrow 4$$

問 3 a, b の値を次のようにきめたとき、例1の対応のさせ方ではどんな数に対応するか。また、例2の場合ではどうか。

- ① $a = 4, \quad b = 4$ ② $a = -3, \quad b = -6$

四則や例1, 例2のように, ある集合に属する2つの数(同じ数でもよい)に対して1つの数を対応させるさせ方を, 一般に演算^{いっばん}という。例1や例2は, それぞれ有理数の集合における1つの演算である。

演算を表すには, $o, \Delta, *$ などのいろいろな記号を, 四則演算の $+, \times, -, \div$ と同じように用いる。

例3 例1の演算を $*$ という記号で表すことにすれば,

$$a * b = \frac{a+b}{2}$$

問4 例2の演算を記号 $\circ$ で表して, 上のような式を書け。

例4 2つの自然数にそれらの最大公約数を対応させる演算を ∇ で表せば, ∇ は自然数の集合における1つの演算である。

2つの自然数の最大公約数はいつも自然数であるから, 自然数の集合は演算 ∇ について閉じている。

問5 自然数全体の集合は, 例3に示した演算 $*$ について閉じているか。また, 正の有理数全体の集合はどうか。

例5 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ の2つの要素

a, b に対して, それらの最小公倍数

を対応させる演算 Δ を行った結果は,

右の表のようになる。この表では,

たとえば $2 \Delta 3$ の値は, 上から2行

め, 左から3列めに書かれている。

$a \backslash b$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	6	4
3	3	6	3	12
4	4	4	12	4

2表 ($a \Delta b$)

問6 集合 A は, 例5の演算 Δ について閉じていない。そのことは, 表のどこを見ればわかるか。

問7 A は例2の演算について閉じているか。表を作って調べよ。

§2 演算の法則

1年で学んだように、数の加法・乗法について、次の法則がある。

$$\text{交換法則} \quad a+b = b+a \quad ab = ba$$

$$\text{結合法則} \quad (a+b)+c = a+(b+c) \quad (ab)c = a(bc)$$

$$\text{分配法則} \quad a(b+c) = ab+ac$$

問1 $a = 3$, $b = 5$, $c = -2$ として、上の法則を確かめよ。

これらの法則は、 a, b, c がどんな数であっても、つねに成り立ち、数の計算の基礎になっている。

例1 $12 \times 34 = 408$ を計算するには、右に示した方法が用いられる。それは次のような計算がもとになっている。

	12
$\times$	34
	48
36	
	408

$$12 \times 34 = 12 \times (3 \times 10 + 4) \dots\dots\dots (1)$$

$$= 12 \times (3 \times 10) + 12 \times 4 \dots\dots\dots (2)$$

$$= (12 \times 3) \times 10 + 12 \times 4 \dots\dots\dots (3)$$

$$= 36 \times 10 + 48 = 408$$

問2 例1で(1)→(2), (2)→(3)の変形には、交換・結合・分配の法則のうち、どの法則が用いられているか。

問3 $12 \times 4 = 48$ を $(10+2) \times 4 = 40+8$ とし、その計算のとちゅうで用いられている法則をいえ。

上の法則は、いろいろな演算についても考えることができる。

たとえば、ある集合 M における演算 $\circ$ を考えるとき、 a, b, c が M のどんな要素であっても、つねに

$$a \circ b = b \circ a$$

となれば、この演算 $\circ$ について交換法則が成り立つという。また、

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

となれば、この演算 $\circ$ について結合法則が成り立つという。

例 2 2つの有理数 a, b にそれらの平均を対応させる演算 $*$ では、

$$a * b = \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2} = b * a$$

であるから、この演算 $*$ について交換法則が成り立つ。

また、 $a = 3, b = 5, c = -1$ とすると、

$$\begin{array}{l|l} a * b = \frac{3+5}{2} = 4 & b * c = \frac{5+(-1)}{2} = 2 \\ (a * b) * c = 4 * (-1) & a * (b * c) = 3 * 2 \\ = \frac{4+(-1)}{2} = \frac{3}{2} & = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} \end{array}$$

であるから、この演算 $*$ について結合法則は成り立たない。

問 4 2つの整数 a, b に対して次のものを対応させる演算について、交換法則、結合法則が成り立つかどうかをいえ。

- ① $a - b$ ② a, b のうちの大きいほう

(a と b が同じ数のときは、その数自身とする。)

問 5 集合 $B = \{0, 1, 2, 3\}$ の2つの要素 a, b に $|a - b|$ を対応させる演算 $\otimes$ を行った結果は、右の表のようになる。

$a \backslash b$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	1	2
2	2	1	0	1
3	3	2	1	0

- ① 集合 B は演算 $\otimes$ について閉じているか。
 ② 演算 $\otimes$ では、交換法則が成り立つか。
 ③ 演算 $\otimes$ で、結合法則が成り立つかどうか

を、いくつかの場合について調べよ。

3 表 ($a \otimes b$)

§3 単位元と逆元

単位元

加法と乗法を比べてみると、加法における0と乗法における1とは、同じようなはたらきをしていることがわかる。

〔加法における0〕

どんな数 a に0を加えても、
0にどんな数 a を加えても、
その和は a になる。

$$a+0=0+a=a$$

〔乗法における1〕

どんな数 a に1を掛けても、
1にどんな数 a を掛けても、
その積は a になる。

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

加法における0や乗法における1のように、ある演算で、

“どんな要素 a との間に演算を行っても、結果がもとの a になる”
ような特別な要素があれば、その要素のことをその演算の**単位元**という。

例1 加法の単位元は0であり、乗法の単位元は1である。

例2 集合 $C = \{1, 2, 3, 6\}$ の2つの要素 a, b に、それらの最大公約数を対応させる演算 ∇ を行った結果をまとめると、右の表のようになる。

この演算では、6という要素は、集合 C のどんな要素 a に対しても、

$$a \nabla 6 = 6 \nabla a = a$$

という性質をもっている。したがって、

この演算の単位元は6である。

$a \backslash b$	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
6	1	2	3	6

4表 $(a \nabla b)$

問1 集合 $C = \{1, 2, 3, 6\}$ の2つの要素 a, b に、それらの最小公倍数を対応させる演算 Δ の単位元は何か。