新訂 新しい数学 2

昭和46年４月10日 文部省検定済・昭和49年４月10日 改訂検定済・中学校数学科用

新訂 新しい数学

2

東京書籍株式会社

目　次

2 確 率

この本で学ぶ人のために

この本では，２年で学習することがらを９つの章に分けてあります。この本で，

■ **例**は，学習内容の理解を深め，学習を進める手がかりとなる具体例です。**例題**は，問題を解くときの参考になる代表的な問題例で，［解答］や［考え方］が示されています。とくに，わくで囲んである［解答］は，解答の書き方の１つの手本を示したものです。

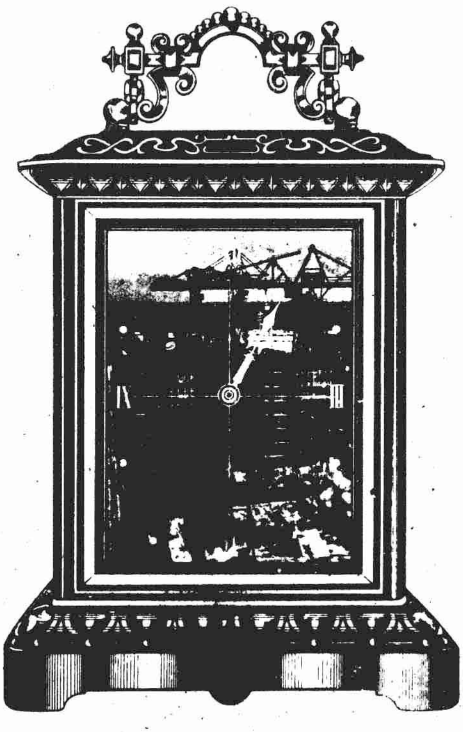
■ **問**は，学んだことの理解を確かにするために解いてみる問題で，★は，それを考えることが次の学習に進むための手がかりになるような問です。とくに練習を積む必要のあるところには**練習**が設けてあります。

■ 節の終わりにある**問題**は，その節で学んだことがらをまとめて復習するための問題です。その節の学習のとちゅうでも，ときどき考えてみて，それまでに学んだ知識で解けるかどうかためしてみるのもよいでしょう。

■ 章の終わりには**練習問題**があります。これは，その章で学んだことの復習と応用をかねています。このうち，**A** には基本になる問題が，**B** にはそれよりやや程度の高い問題がのせてあります。**B**の問題は，そのなかから自分の力に合ったものを選んで解いてください。
章末の**研究**は，発展的な内容で，余力のある場合に学習するものです。

■ 巻末(かんまつ)には**計算練習**，**作図練習**があります。どちらも，学習の合い間にすこしずつでも，くりかえし練習してください。また，まとめのための**２年で学んだおもな用語・記号・性質**と，**補充問題**があります。補充問題には，やや程度の高い応用問題もかなりはいっています。時間がかかっても，自分で考えて解いてみることが，数学の力をつけるのに役だつのです。

I・数の集合と演算



★

2つの自然数の和や積は自然数になるが，差や商は自然数になるとはかぎらない。しかし，有理数どうしの和・差・積・商はみな有理数になる。このように，いろいろな数の集合は，演算についてきまった性質をもっている。また，加減乗除のほかにも，さまざまな演算を考えることができる。ここでは，いろいろな数の集合が演算に対してどんな性質をもっているかを調べることにしよう。

★

I　数の集合と演算

§1　数の集合と演算

数の集合と四則計算

1年で学んだように，自然数の全体に0と負の整数全体を合わせると整数全体の集合になり，整数全体に正や負の分数全体を合わせると有理数全体の集合になる。

1図

★-2，$-\frac{3}{2}$，-1，0，1，$\frac{3}{2}$，2 のうち，

① 自然数を全部あげよ。

② 整数を全部あげよ。

③ 有理数を全部あげよ。

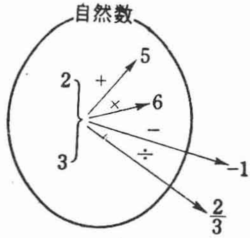
自然数どうし，整数どうし，有理数どうしの間に，加減乗除の四則計算を行った結果が，どのような数になるかを調べてみよう。

たとえば，$2+3=5$，$7+9=16$ のように，どんな2つの自然数をとっても，その和は自然数になる。

このことを，“自然数全体の集合のなかで，加法は自由に行える”とか，“自然数全体の集合は，加法について**閉じている**”という。

また，どんな2つの自然数をとっても，その積は自然数になる。すなわち，自然数全体の集合は，乗法についても閉じている。

ところが，たとえば $2-3=-1$ のように，2 つの自然数の差は，自然数になるとはかぎらない。すなわち，自然数全体の集合は，減法については閉じていない。



2図

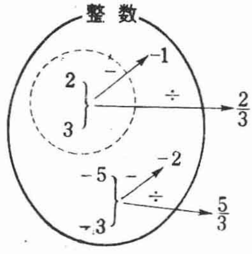
問 1　自然数全体の集合は，除法について閉じているか。

問 2　集合 $E=\{0, 2, 4, 6, 8, \cdots\cdots\}$ は，加法，乗法について閉じているか。また，減法についてはどうか。

★任意の整数を 2 つ選んで，加法，乗法，減法，除法を行ってみよ。結果が整数になるとはかぎらないのは，どの計算のときか。

【注意】 除法というときは，“0 で割(わ)る” ことはいつも除いて考える。

整数全体の集合は，0 や負の整数を要素にもっているから，加法，乗法のほか，減法についても閉じている。しかし，たとえば $2\div3$ の結果は整数でないから，除法については閉じていない。



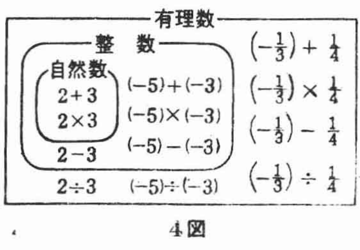
3図

有理数全体の集合は，加法，乗法，減法のほか，除法についても閉じている。

これまで調べたことをまとめると，1 表のようになる。

	加	乗	減	除
自然数	○	○	×	×
整　数	○	○	○	×
有理数	○	○	○	○

1 表



4図

1表からもわかるように，減法は自然数全体の集合のなかでは自由に行えないが，数の範囲（はんい）を整数全体にまで拡張すると，自由に行えるようになる。さらに数の範囲を有理数全体の集合に拡張すると，除法もふくめて，四則のすべてが自由に行えるようになる。

このように，自由に行えなかった計算が自由に行えるように，数の範囲は，自然数から整数，有理数へと拡張されたと考えられる。

いろいろな演算

四則の計算では，２つの数，たとえば３と４をきめると，

加法では　$3+4=7$　　乗法では　$3\times4=12$

のように，計算の結果１つの数がきまる。減法や除法についても，同じことがいえる。すなわち，四則計算はすべて，

"２つの数に対して１つの数を対応させる"させ方であると考えることができる。

$$\boxed{(a\text{と}b) \longrightarrow c}$$

このように，２つの数 a と b に１つの数 c を対応させるさせ方は，四則のほかにも，いろいろ考えられる。

例１　２つの有理数 a，b に，それらの平均を対応させる。このとき，５と９には７が対応する。

$$(a\text{と}b) \rightarrow \frac{a+b}{2}$$
$$(5\text{と}9) \longrightarrow 7$$

例２　２つの有理数 a，b に，$a-b$ の絶（ぜっ）対値（たいち）を対応させる。このとき，５と９には４が対応する。

$$(a\text{と}b) \rightarrow |a-b|$$
$$(5\text{と}9) \longrightarrow 4$$

問３　a, b の値（あたい）を次のようにきめたとき，例１の対応のさせ方ではどんな数が対応するか。また，例２の場合ではどうか。

①　$a=4$,　$b=4$　　②　$a=-3$,　$b=-6$

四則や例1，例2のように，ある集合に属する2つの数（同じ数でもよい）に対して1つの数を対応させるさせ方を，一般(いっぱん)に**演算**という。例1や例2は，それぞれ有理数の集合における1つの演算である。

演算を表すには，○，△，＊などのいろいろな記号を，四則演算の ＋，×，－，÷ と同じように用いる。

例3　例1の演算を＊という記号で表すことにすれば，

$$a * b = \frac{a+b}{2}$$

問4　例2の演算を記号◎で表して，上のような式を書け。

例4　2つの自然数にそれらの最大公約数を対応させる演算を▽で表せば，▽は自然数の集合における1つの演算である。

2つの自然数の最大公約数はいつも自然数であるから，自然数の集合は演算▽について閉じている。

問5　自然数全体の集合は，例3に示した演算＊について閉じているか。また，正の有理数全体の集合はどうか。

例5　集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ の2つの要素 a, b に対して，それらの最小公倍数を対応させる演算△を行った結果は，右の表のようになる。この表では，たとえば $2 \triangle 3$ の値は，上から2行め，左から3列めに書かれている。

a \ b	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	**6**	4
3	3	6	3	12
4	4	4	12	4

2表　$(a \triangle b)$

問6　集合 A は，例5の演算△について閉じていない。そのことは，表のどこを見ればわかるか。

問7　A は例2の演算について閉じているか。表を作って調べよ。

§2　演算の法則

1年で学んだように，数の加法・乗法について，次の法則がある。

交換法則　$a+b=b+a$　　$ab=ba$

結合法則　$(a+b)+c=a+(b+c)$　　$(ab)c=a(bc)$

分配法則　$a(b+c)=ab+ac$

問 1　$a=3,\ b=5,\ c=-2$ として，上の法則を確かめよ。

これらの法則は，a, b, c がどんな数であっても，つねに成り立ち，数の計算の基礎になっている。

例 1　$12\times 34=408$ を計算するには，右に示した方法が用いられる。それは次のような計算がもとになっている。

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 34 \\ \hline 48 \\ 36 \\ \hline 408 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{12}\times\mathbf{34} &= 12\times(3\times 10+4) \quad &\cdots\cdots (1)\\ &= 12\times(3\times 10)+12\times 4 \quad &\cdots\cdots (2)\\ &= (12\times 3)\times 10+12\times 4 \quad &\cdots\cdots (3)\\ &= \mathbf{36}\times 10+\mathbf{48}=\mathbf{408} \end{aligned}$$

問 2　例1で(1)→(2)，(2)→(3)の変形には，交換・結合・分配の法則のうち，どの法則が用いられているか。

問 3　$12\times 4=48$ を $(10+2)\times 4=40+8$ とし，その計算のとちゅうで用いられている法則をいえ。

上の法則は，いろいろな演算についても考えることができる。

たとえば，ある集合 M における演算 $\circ$ を考えるとき，a, b, c が M のどんな要素であっても，つねに

$$a\circ b=b\circ a$$

となれば，この演算○について交換法則が成り立つという。また，

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

となれば，この演算○について結合法則が成り立つという。

例 2　2つの有理数 a, b にそれらの平均を対応させる演算 $*$ では，

$$a*b = \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2} = b*a$$

であるから，この演算 $*$ について交換法則が成り立つ。

また，$a=3$, $b=5$, $c=-1$ とすると，

$$a*b = \frac{3+5}{2} = 4$$

$$(a*b)*c = 4*(-1) = \frac{4+(-1)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$b*c = \frac{5+(-1)}{2} = 2$$

$$a*(b*c) = 3*2 = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$$

であるから，この演算 $*$ について結合法則は成り立たない。

問 4　2つの整数 a, b に対して次のものを対応させる演算について，交換法則，結合法則が成り立つかどうかをいえ。

①　$a-b$　　②　a, b のうちの大きいほう

（a と b が同じ数のときは，その数自身とする。）

問 5　集合 $B=\{0, 1, 2, 3\}$ の2つの要素 a, b に $|a-b|$ を対応させる演算◎を行った結果は，右の表のようになる。

①　集合 B は演算◎について閉じているか。

②　演算◎では，交換法則が成り立つか。

③　演算◎で，結合法則が成り立つかどうかを，いくつかの場合について調べよ。

a＼b	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	1	2
2	2	1	0	1
3	3	2	1	0

3 表　(a◎b)

§3　単位元と逆元

単位元

加法と乗法を比べてみると，加法における0と乗法における1とは，同じようなはたらきをしていることがわかる。

〔加法における0〕

どんな数aに0を加えても，
0にどんな数aを加えても，
その和はaになる。

$$a+0=0+a=a$$

〔乗法における1〕

どんな数aに1を掛けても，
1にどんな数aを掛けても，
その積はaになる。

$$a\times1=1\times a=a$$

加法における0や乗法における1のように，ある演算で，“どんな要素aとの間に演算を行っても，結果がもとのaになる”ような特別な要素があれば，その要素のことをその演算の**単位元**という。

例 1　加法の単位元は0であり，乗法の単位元は1である。

例 2　集合$C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$の2つの要素a, bに，それらの最大公約数を対応させる演算$\triangledown$を行った結果をまとめると，右の表のようになる。

この演算では，6という要素は，集合Cのどんな要素aに対しても，

$$a\triangledown6=6\triangledown a=a$$

という性質をもっている。したがって，この演算の単位元は6である。

a \ b	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
6	1	2	3	6

4 表　($a\triangledown b$)

問 1　集合$C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$の2つの要素a, bに，それらの最小公倍数を対応させる演算$\triangle$の単位元は何か。