自動制御計算法

カリフォルニア大学教授
工学博士
高橋安人著

自動制御計算法

定価 380 円

昭和29年6月30日 初版1刷(A4判)発行
昭和33年10月15日 初版2刷(改装判)発行

著者 高橋安人
発行者 南條初五郎
東京都千代田区神田駿河台3の9
印刷者 福田三郎
東京都渋谷区猿楽町51

発行所 東京都千代田区神田駿河台3の9
電話東京(29)2951～3・2624番
振替口座東京57035番
共立出版株式会社

印刷所・合資会社・真興社 製本所・菊地製本所 Printed in Japan

自動制御計算法

カリフォルニア大学教授
工学博士
高橋安人著

CONTROL
SYSTEM
DESIGN
NOTES

共立出版株式會社

自動制御計算法（正誤表）

頁	行	誤	正	頁	行	誤	正
15	↑ 4	36	61	58	↓13	17	30
19	↓ 8	18	31		↓14	17	29
	↑11	6	14		↑ 6	19	33
20	↓ 9	14	23	61	↓ 6	18	32
21	↓ 2	6	11	62	↓ 4	26	44
25	↓ 1	6	11		↓ 6	16	27
	↓10	6	11	64	↓ 9	21 ページの図	36ページの次の図
	↑14	23	37		↑11	27	45
	↑ 9	20～22	35～36		↑ 6	18	31
			および図7.2, 7.3	65	↓ 9	25	40
26	↓ 5	4	8		↓10	26	43
	↑10	2	4		↑ 5	24	42
27	↓ 2	2～3	4～5	66	↓ 7	2	3
31	↓11	12	20	67	↓ 7	19	33
	↓12	2	4		↑ 6	27	45
32	↑ 3	12	20	68	↓ 1	2	4
33	↑ 8	12	19		↓ 2	10 ページ図	17 ページ前図
34	↓ 5	17	29		↑ 3	14	23
36	↑ 1	37	63	69	↓ 4	15	25
38	↓ 4	15	25		↓11	19	33
	↑ 3	32	54		↑ 4	15	25
	↑ 6	26	44	70	↓ 7	14	24
	↑ 7	26	44	71	↓10	23	37
	↑ 9	18	31		↓11	22	37
	↑14	12	20		↓12	20	36
39	↓ 7	2～4	4～8		↑13	18	31
	↑13	16	27		↑ 2	28	48
	↑ 7	12	20	72	↓ 3	28	43
42	↑ 7	12	20		↓13	18	31
44	↓ 8	2～3	3～6		↑ 6	28	48
	↑15	18	31	73	↓ 6	29	50
45	↓ 2	23	38		↓ 7	31	51
	↓14	23	38		↓ 8	30 ページ表	50ページの次の表
46	↑ 6	18	32	75	↑ 3	29	49
50	↑ 4	18	32		↑ 8	30 ページ表	50ページの次の表
52	↑10	18	32		↑10	29	50
55	↑ 7	5	9	76	↓10	31	52
	↑ 6	7	13		↓10	42	73
	↑ 4	8	16		↓11	30 ページ表	50ページの次の表
	↑ 3	18	31		↑ 6	31	52
	↑ 1	4	8	78	↓ 1	32	53
	↑ 1	2	4		↑11	32	53
56	↑ 3	19	34		↑ 5	32	54
	↑ 7	16	28	79	↑ 7	32	54
57	↓ 8	16	27		↑ 8	11	18
	↓11	16	28		↑10	32	54
	↓14	14	24		↓ 4	32	53

2. ラプラス変換計算[1)]

(時間的に変る信号はラプラス変換して計算する)

2.1 定　　義

$f(t)$ を時間 t [sec または mn] の関数，複素量 $s=\sigma+j\omega$ [1/sec または 1/mn] を変換変数，σ と ω は実数とする。$f(t)$ のラプラス変換とは，

$$F(s)=\boldsymbol{L}f(t)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot1)$$

例　$f(t)=e^{-\alpha t}$ なら　$F(s)=\int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t}dt=1/(s+\alpha)$

$F(s)$ を $f(t)$ にするのがつぎのラプラス逆変換 (2·3 参照) である。

$$f(t)=\boldsymbol{L}^{-1}F(s)=\text{留数の和} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot2)$$

2.2 一　般　則

(a) 微　　分　$df(t)/dt$ を $f'(t)$ と書き，(0^+) で $t=0$ 直後の値を示すと，

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0^+)\\
&\boldsymbol{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0^+)-f'(0^+)\\
&\boldsymbol{L}[f'''(t)]=s^3F(s)-s^2f(0^+)-sf'(0^+)-f''(0^+)\\
&\text{以下同様。}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(2\cdot3)$$

例　$f(t)=e^{-\alpha t}$ なら $F(s)=1/(s+\alpha)$，$f(0^+)=1$ だから

$$\boldsymbol{L}[f'(t)]=s/(s+\alpha)-1=-\alpha/(s+\alpha)$$

(b) 積　　分

$$\boldsymbol{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right]=F(s)/s \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot4)$$

一般に $\int f(t)\,dt$ を $f^{(-1)}(t)$ と書き (0^+) により $t=0$ 直後の値を示すと，

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{L}[f^{(-1)}(t)]=F(s)/s+f^{(-1)}(0^+)/s\\
&\boldsymbol{L}[f^{(-2)}(t)]=F(s)/s^2+f^{(-1)}(0^+)/s^2+f^{(-2)}(0^+)/s\\
&\boldsymbol{L}[f^{(-3)}(t)]=F(s)/s^3+f^{(-1)}(0^+)/s^3+f^{(-2)}(0^+)/s^2+f^{(-3)}(0^+)/s\\
&\text{以下同様。}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(2.5)$$

例 $f(t)=e^{-\alpha t}$, $F(s)=1/(s+\alpha)$ なら

$$L\left[\int_0^t e^{-\alpha t}dt\right]=L\left[\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\right]=\frac{1}{s(s+\alpha)}$$

(c) 時間単位変更 $Lf(t)=F(s)$ ならば, $f(t)$ 中の t を τT とおくとき, $F(s)$ 中の s を q/T とおき, さらに全体へ $1/T$ を掛けたものが $\int_0^\infty e^{-q\tau}f(\tau T)d\tau$ になる (たとえば τ と q は t と s の無次元量)。

$$Lf(t\to\tau T)=(1/T)F(s\to q/T) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot6)$$

例 $1/T=\alpha$, $Le^{-\alpha t}=1/(s+\alpha)$, $\alpha t=\tau$ なら $t=\tau/\alpha$ を左辺に適用するとき, 右辺の s を $q\alpha$ とおき, 全体へ α を掛けると

$$Le^{-\tau}=1/(q+1)$$

(d) 両端値

$$\lim_{t\to0}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s),\quad \lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot7)$$

例 $f(t)=e^{-\alpha t}$, $F(s)=1/(s+\alpha)$ なら

$$\lim_{t\to0}f(t)=\lim_{s\to\infty}s/(s+\alpha)=1$$

例 $f(t)=(1-e^{-\alpha t})/\alpha$, $F(s)=1/[s(s+\alpha)]$ なら

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to0}s/[s(s+\alpha)]=\lim_{s\to0}1/(s+\alpha)=1/\alpha$$

2·3 逆変換

$F(s)$ の分子, 分母はそれぞれ s の多項式 (集中定数系) $A(s)$, $B(s)$ とし, 分母 $B(s)$ の次数 k が分子 $A(s)$ のそれより高いとして (2·2) 式右辺を求める。

$$F(s)=A(s)/B(s) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot8)$$

(a) $B(s)=0$ に等根がない場合 $B(s)=0$ の根を s_1, s_2, $\cdots$, s_k とし, $dB(s)/ds=B'(s)$ と書くと,

$$f(t)=\frac{A(s_1)}{B'(s_1)}e^{s_1t}+\frac{A(s_2)}{B'(s_2)}e^{s_2t}+\cdots\cdots+\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}e^{s_kt} \qquad \cdots\cdots\cdots(2\cdot9)$$

根の一つがゼロ, たとえば $s_1=0$ なら

$$f(t)=\frac{A(0)}{B'(0)}+\frac{A(s_2)}{B'(s_2)}e^{s_2t}+\cdots\cdots+\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}e^{s_kt} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot10)$$

1 対が共やく根, たとえば $s_1=-\alpha+j\beta$, $s_2=-\alpha-j\beta$ なら

$$A(s_1)/B'(s_1)=D_1+jD_2,\quad A(s_2)/B'(s_2)=D_1-jD_2$$

とおくとき

$$\frac{A(s_1)}{B'(s_1)}e^{s_1t}+\frac{A(s_2)}{B'(s_2)}e^{s_2t}=2e^{-\alpha t}[D_1\cos\beta t-D_2\sin\beta t] \quad \cdots\cdots(2\cdot11)$$

右辺の [ ] はつぎの公式により一括できる。

$$a\cos\beta t\pm b\sin\beta t=\pm\sqrt{a^2+b^2}\sin(\beta t\pm\varphi) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot12)$$

ただし a と b は正，$\varphi=\tan^{-1}a/b$ は正の鋭角

例 $F(s)=1/[s\{(s+\alpha)^2+\beta^2\}]$ なら $s_1=0$, $s_2=-\alpha+j\beta$, $s_3=-\alpha-j\beta$, $A(s)=1$, $B'(s)=3s^2+4\alpha s+(\alpha^2+\beta^2)$, $D_1=-1/[2(\alpha^2+\beta^2)]$, $D_2=\alpha/[2\beta(\alpha^2+\beta^2)]$ だから (2·10), (2·11), (2·12) 式により

$$f(t)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[1-e^{-\alpha t}\left(\cos\beta t+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[1-\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\varphi)\right]$$

ここに $\varphi=\tan^{-1}\beta/\alpha$

(b) $B(s)=0$ に等根がある場合 $B(s)=0$ の根の一つ s_1 が m 重根ならば

$$B(s)=(s-s_1)^m(s-s_2)(s-s_3)\cdots\cdots(s-s_k)$$

の形になる。いま

$$\frac{A(s)}{B(s)}(s-s_1)^m=C(s),\quad \frac{d}{ds}C(s)=C'(s)$$

とおけば m 重根からの留数は

$$\text{留数}=\left[\frac{C(s_1)}{(m-1)!}t^{m-1}+\frac{C'(s_1)}{(m-2)!}t^{m-2}+\frac{C''(s_1)}{2(m-3)!}t^{m-3}\right.$$
$$\left.+\frac{C'''(s_1)}{3!(m-4)!}t^{m-4}+\cdots\cdots\right]e^{s_1t} \quad \cdots\cdots(2\cdot13)$$

ただし右辺 [ ] 内の項数は m 個，また $0!=1$。

重根でない根 (s_2 以下) からの成分の計算は (2·9)～(2·11) と同じ。

例 $F(s)=1/[s^2(s+\alpha)]$ ならば $m=2$, $s_1=0$, $C(s)=1/(s+\alpha)$, $C'(s)=-1/(s+\alpha)^2$ および単一根 $s_2=-\alpha$ だから

$$f(t)=\underbrace{\left[\frac{t}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right]}_{2\text{重根 } s_1=0 \text{ から}}+\underbrace{\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2}}_{s_2 \text{ から}}=\frac{e^{-\alpha t}+\alpha t-1}{\alpha^3}$$

2·4 信号の計算

二つの信号 $b(t)$ と $c(t)$ の関係を微積分方程式により与え，一つの信号 $b(t)$を指定して他の信号（応答）$c(t)$ を求めるには，つぎの順序により計算する：

(1) 微積分方程式をラプラス変換する，(2) 未知量 $C(s)$ について解く，(3) $b(s)$ の変換形 $B(s)$ を算入する，(4) $C(s)$ をラプラス逆変換する。

例　つぎの式と初期条件（$t=0$ で $c=c_0$）を与えられたとする。

$$T\frac{dc}{dt}+c=kb \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot14)$$

(1) $L[b(t)]=B(s)$，$L[c(t)]=C(s)$，$L[dc/dt]=sC(s)-c_0$，ただし $c_0=c(0^+)$，ゆえに (2·14) 式は，

$$T[sC(s)-c_0]+C(s)=kB(s)$$

(2) これを $C(s)$ について解くと

$$\underbrace{C(s)}_{\text{応答}}=\underbrace{\left[\frac{k}{1+Ts}\right]}_{\text{伝達関数}}\underbrace{\left[B(s)+\frac{T}{k}c_0\right]}_{\text{入力関数}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot15)$$

(3) たとえば $b(t)=t$ なら $B(s)=1/s^2$（表 2·1）だから

$$C(s)=C_1(s)+C_2(s) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot16)$$

$$C_1(s)=k/[s^2(1+Ts)]$$

$$C_2(s)=+Tc_0/(1+Ts)$$

(4) ラプラス逆変換：

$$c(t)=L^{-1}C(s)=L^{-1}C_1(s)+L^{-1}C_2(s) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot17)$$

ここに 2·3 (b) および 2·1 の例により

$$L^{-1}C_1(s)=kT(e^{-t/T}+t/T-1)$$

$$L^{-1}C_2(s)=+c_0e^{-t/T}$$

$$\therefore \quad c(t)=k(t-T)+e^{-t/T}(kT+c_0) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot18)$$

注意　定係数線型常微分方程式を解く古典手段では，たとえば (2·14) 式に対しては，まず右

辺をゼロとした場合の解（余関数という）を求める：

$$T\frac{dc}{dt}+c=0$$

$$\therefore \quad c(t)=De^{-t/T} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot19)$$

つぎに (2·14) 式の右辺 $b(t)=t$ を満足する特別解を，実際的手段としては試みの法によりたとえばこの場合には t に比例する形を想定して求める。所要の一般解は余関数と特別解の和によって与えられる。ここに (2·19) 式の D のような係数は初期条件を満足するように決定する。ラプラス変換計算では初期条件値は (2·3)，(2·5) 式右辺の第 2 項以降により算入され，入る信号 $b(t)$ のラプラス変換形 $B(s)$ と共に“入力関数”として一括される。所要の応答はこの入力関数と，その系の特性を示す“伝達関数”の積により与えられる，(2·15) 式。それを逆変換すれば初期条件と入る信号の両者を考慮に加えた一般解が直ちに判明するのである。

古典手段で余関数を求めるときには特性方程式を解く。ラプラス変換計算では (2·8) 式の分母 $B(s)=0$ の根を求める操作がこれに対応する。

2·5 ラプラス変換関数表

ラプラス変換と，特にラプラス逆変換には，2·1 と 2·3 の公式の代りに表 2·1 も利用する。この表にない $F(s)$ の逆変換は，2·3 またはつぎの原理により計算する。

(a) 分子の s：これは微分である。

例 $F(s)=s/[(s+\alpha)(s+\gamma)]$ なら表 2·1 (6) の $f(t)$ を微分して，

$$f(t)=[-\alpha e^{-\alpha t}+\gamma e^{-\gamma t}]/(\gamma-\alpha)$$

この結果と表 2·1 (6) とを使うと $F(s)=(s+h)/[(s+\alpha)(s+\gamma)]$ の逆変換は

$$f(t)=[(h-\alpha)e^{-\alpha t}-(h-\gamma)e^{-\gamma t}]/(\gamma-\alpha)$$

(b) 分母の s：これは積分である。

例 $F(s)=1/[s(s^2+\beta^2)]$ なら表 2·1 (8) の $f(t)$ を積分して $f(t)=-(\cos\beta t)/\beta^2+C$，積分定数 C は (2·7) 式により $f(0)=0$ であることからきめ，

$$f(t)=(1-\cos\beta t)/\beta^2$$

(c) 展　開：$F(s)$ を表 2·1 にある項に分ける。

例 $F(s)=\dfrac{1}{(s+\alpha)(s+\gamma)(s+\delta)}$ ならば

$$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\gamma)}-\frac{1}{(s+\alpha)(s+\delta)}=\frac{(\delta-\gamma)}{(s+\alpha)(s+\gamma)(s+\delta)}$$

により表 2·1 (6) の項に分けられ，結果を整理すると

$$f(t)=\frac{e^{-\alpha t}}{(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)}+\frac{e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\delta-\gamma)}+\frac{e^{-\delta t}}{(\alpha-\delta)(\gamma-\delta)}$$

表 2·1 $f(t)$ と $F(s)$ の対照表

番号	$F(s)$	$f(t),\quad 0\leqq t$
1	1	$t=0$ における単位インパルス
2	$\frac{1}{s}$	1 (単位ステップ)
3	$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t
5	$\frac{1}{s(s+\alpha)}$	$\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}$
6	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\gamma)}$	$\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\gamma t}}{\gamma-\alpha}$
7	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
8	$\frac{1}{s^2+\beta^2}$	$\frac{1}{\beta}\sin\beta t$
9	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$\cos\beta t$
10	$\frac{1}{s^2-\beta^2}$	$\frac{1}{\beta}\sinh\beta t$
11	$\frac{s}{s^2-\beta^2}$	$\cosh\beta t$
12	$\frac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{1}{\beta}e^{-\alpha t}\sin\beta t$
13	$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$	$\frac{e^{-\alpha t}+\alpha t-1}{\alpha^2}$
14	$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\gamma)}$	$\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{\gamma e^{-\alpha t}-\alpha e^{-\gamma t}}{\alpha\gamma(\alpha-\gamma)}$
15	$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$	$\frac{1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}}{\alpha^2}$
16	$\frac{1}{s[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[1-e^{-\alpha t}\left(\cos\beta t+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t\right)\right]$
17	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$
18	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\alpha t}$
19	$\frac{e^{-sL}}{s^2}$	$(t-L)$，ただし $t<L$ では 0
20	$\frac{e^{-sL}}{s(s+\alpha)}$	$\frac{1-e^{-\alpha(t-L)}}{\alpha}$，ただし $t<L$ では 0

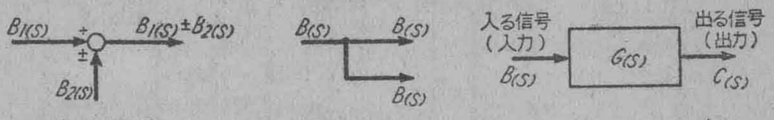
3. ブロック線図

（これは制御系の諸信号の流れを明示し整理するのに使う）

3·1 基本記号

線型系内の信号関係は図 3·1 の記号を用いブロック線図に書く。(a) 信号の流れは線で示し，伝達する向きに矢をつける。(b) 同じ単位の信号の加減算は加え合せ点で表わす。(c) 同じ信号の 2 点以上への作用は引出し点により示す。(d) 信号変換はブロックで表わし，ブロックの中にはたとえば伝達関数を記入する。ここに

$$\text{伝達関数}\,G(s)=\frac{L(\text{出る信号}\,c(t))}{L(\text{入る信号}\,b(t))}=\frac{C(s)}{B(s)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot1)$$



加え合せ点　　引出し点　　ブロック

図 3·1 ブロック線図の基本記号

例　信号 $b(t)$，$c(t)$ の関係が

$$T\frac{dc}{dt}+c=kb$$

そして $b(t)$ が入力なら

$$G(s)=\frac{C(s)}{B(s)}=\frac{k}{1+Ts}$$

図 3·2 (a) はこれを示す。もし必要なら初期条件値も入力に加算される，図の (b) および (2·15) 式参照。

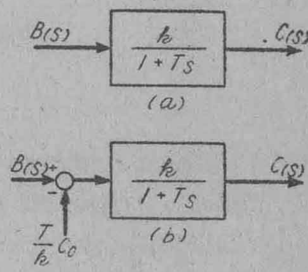


図 3·2 ブロックの例

3·2 線図の作り方

ブロック線図は主としてつぎの手がかりにより書く。(a) 3·1 のように微分方程式を図示する，(b) 理論的，実験的，経験的に各部の信号とそれらの関係を追跡，(c) これら諸手法の混用。

ブロックおよび信号をどの程度まで図示するかは定則はない。実際上重大な間違いや見逃しのないくらいに忠実に，いたずらに細かくて見にくくならない程度にまとめ

るがよい。つぎの例は限度まで細分した場合を示す。

例　図 3·3 (a) のばね質量系において，ばね上端の変位 $B(s)$ を入力，質量の変位 $C(s)$ を出力とし，両者の関係を求める。

この関係を支配する信号変換は力学法則により図 (b) の諸ブロックである。これらを用いて図 (c) を作図する。まず入力変位①と出力変位②の差③によりばね力④が定まる。この④と粘性摩擦力⑤の差⑥が質量 M を加速する正味の力。これが M の速度⑦を決定し，この⑦により摩擦力⑤がきまる。また速度⑦から変位⑧すなわち出力②が決定される。

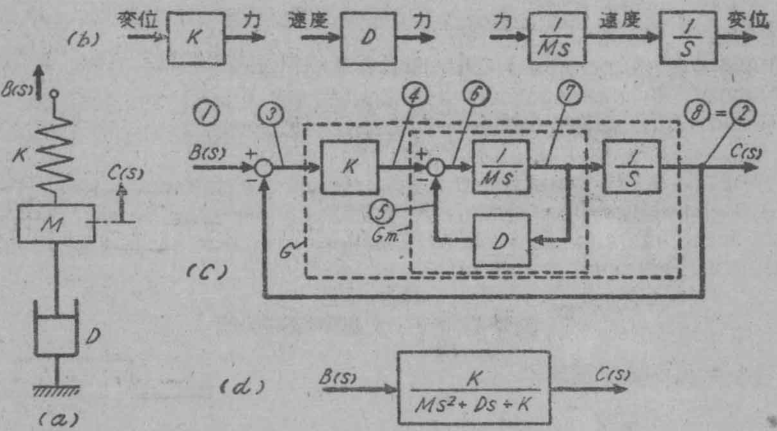


図 3·3　ばね質量系の例

例　L-R 回路に加える電圧 $E(s)$ と電流 $I(s)$ の関係は，図 3·3 (c) で点線で仕切った G_m 部分と類似のブロック線図に表わされる。この場合は図の④が $E(s)$，⑦が $I(s)$ となり，図の $\dfrac{1}{Ms}$ の代りに $\dfrac{1}{R}$，D の代りに Ls とする。

力学系で質量，ばね，抵抗，また電気系で L, C, R がそれぞれいくつかに集中しているとみられる“集中定数系”では，上記の例のようにかなり克明なブロック線図を書くことができる。“容量”，“抵抗”の概念は熱系，圧力系，液面系，成分系などいわゆるプロセス系にも適用される。そして容量と抵抗が少数個に集中と考えられる場合にやはり各部の信号関係がかなりくわしく図示される。

しかしくわしく図示することが必ずしも適当とは限らない。たとえば図 3·3 の系は特別の必要がなければ (c) ではなくこれをまとめて (d) の形に書くがよい。つぎの

3·3 にはこのような整理にも役立つ定石が記してある。

整理して一つのブロックにくくる場合には，なるべくブロックへの入出力が一方的のところをそのブロックの区切にするがよい。たとえば図 3·3 では，(c) の G はまだ充分にまとめられた形ではなく，(d) になってはじめて入出力が一方的という最終形になる。3·4 の例および 5·1 も参照。

送電線，弾性体，管系，熱伝導体のように容量，質量，抵抗などが集結しておらない"分布定数系"では，分布特性部分を一括して伝達関数に書いてしまうか，または近似化により等価系（表 5·1 の25, 26 など）へもっていく。

3·3 変 換 定 理

表 3·1 がブロック線図のおもな変換定理。これらは (a) ブロック線図の整理（実際 → 理論），(b) その変形，(c) 実在要素へ結びつける（理論 → 実際）などの目的に役立つ。この表の"変換前"と"変換後"は左端の"名称"に対するものだから，実際の応用では左右のいずれを原形にとってもよい。

(a) の整理に役立つおもな結合法則は 10, 13, 16 と 17 である。結合後の伝達関数を $G(s)$ とすると：

直列結合： $G(s)=G_1(s)\cdot G_2(s)$ ··········(3·2)

並列結合： $G(s)=G_1(s)+G_2(s)$ ··········(3·3)

フィードバック結合： $G(s)=\dfrac{G_1(s)}{1\mp G_1(s)H(s)}$ ··········(3·4)

∓の－は正饋還，＋は負饋還，普通は後者。

直結フィードバック結合： $G(s)=\dfrac{G_1(s)}{1\mp G_1(s)}$ ··········(3·5)

例 図 3·3 (c) を整理する。まず図示の G_m を (3·4) 式により一括すると

$$G_m(s)=1/(Ms+D)$$

つぎに K, $G_m(s)$, $1/s$(③→⑧) を (3·2) 式によりまとめて $G(s)$ とすると

$$G(s)=K/[s(Ms+D)]$$

これへ (3·5) 式を適用すると

$$C(s)/B(s)=G(s)/[1+G(s)]=K/(Ms^2+Ds+K)$$

表 3·1　おもな変換定理

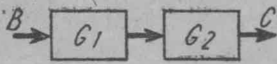
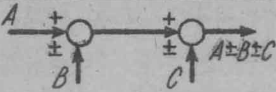
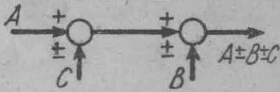
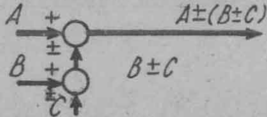
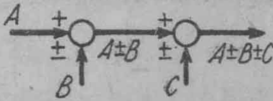
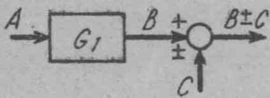
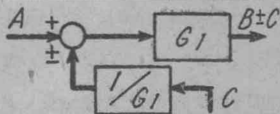
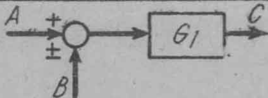
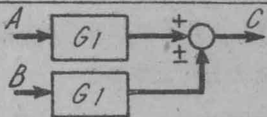
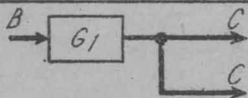
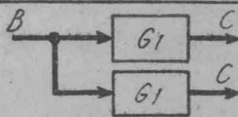
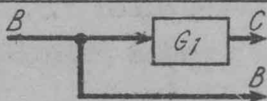
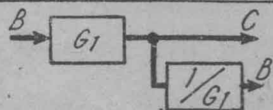
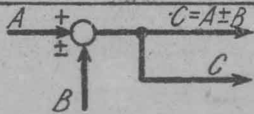
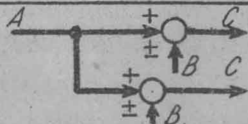
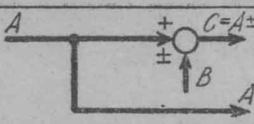
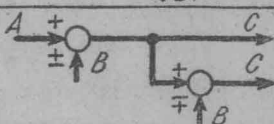
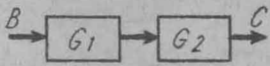
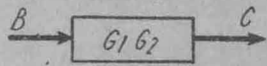
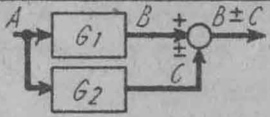
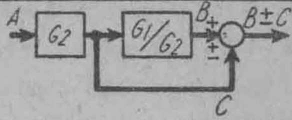
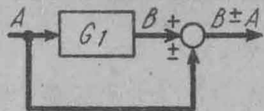
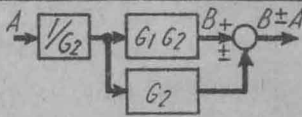
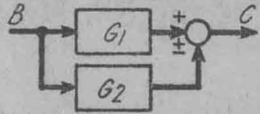
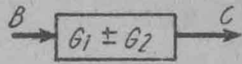
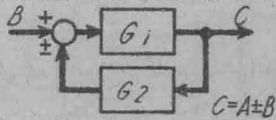
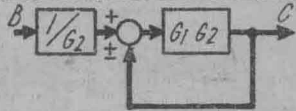
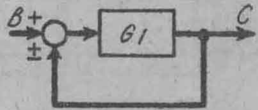
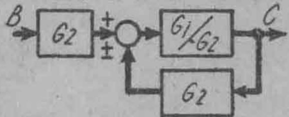
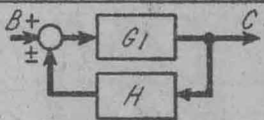
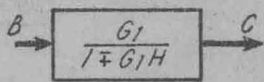
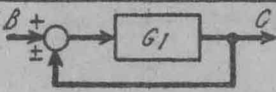
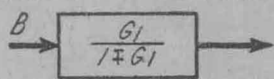
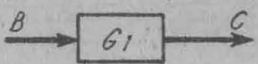
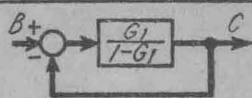
	名称	変換前	変換後
1	ブロック置換		
2	加合せ点置換		
3	加合せ点移動		
4	加合せ点を ブロックの前へ		
5	加合せ点を ブロックの後へ		
6	引出し点を ブロックの前へ		
7	引出し点を ブロックの後へ		
8	引出し点を 加合せ点の前へ		
9	引出し点を 加合せ点の後へ		

表 3·1（続き）

	名 称	変 換 前	変 換 後
10	直列結合		
11	前向き径路からブロック除去		
12	前向き径路へブロック挿入		
13	並列結合		
14	後向き径路からブロック除去		
15	後向き径路へブロック挿入		
16	フイードバック結合		
17	同・直結フイードバック		
18	フイードバック径路挿入の一方法		

として図 3·3 (d) を得る。これは直接に図 (a) に対する微分方程式からも得られる。

3·4 要素の接続

ブロック線図の各ブロックは実在の要素に対応することもあり，しないこともある。また実在の要素間の信号伝達がブロック線図における１本の一方的な信号伝達線で示されることもあり，そうでないこと (4 端子結合) もある。

例　図 3·4 (a) は二つのばね-質量系の直列接続ではない。図 3·3 にならってブロック線図を書くと図 3·4 (b) を得る。これによると中間信号 $C_1(s)$ と最終応答 $C(s)$ の間に、$C_1(s) \rightarrow C(s)$ ばかりでなく $C(s) \rightarrow C_1(s)$ の信号径路が存在する。

この図の整理は 3·3 と同様，まず図 (b) の右半を前図により一括して $G_2(s)$ とする。

$$G_2(s)=K_2/[M_2s^2+Ds+K_2]$$

また左半の信号関係を表 3·1 の 3, 5, 13 により整理すると図 3·4 (c) になる。

図の $G_{1(s)}$ を (3·4) 式により求め，全体を再び (3·4) 式により一括すると最終形として図 3·4 (d) を得る。

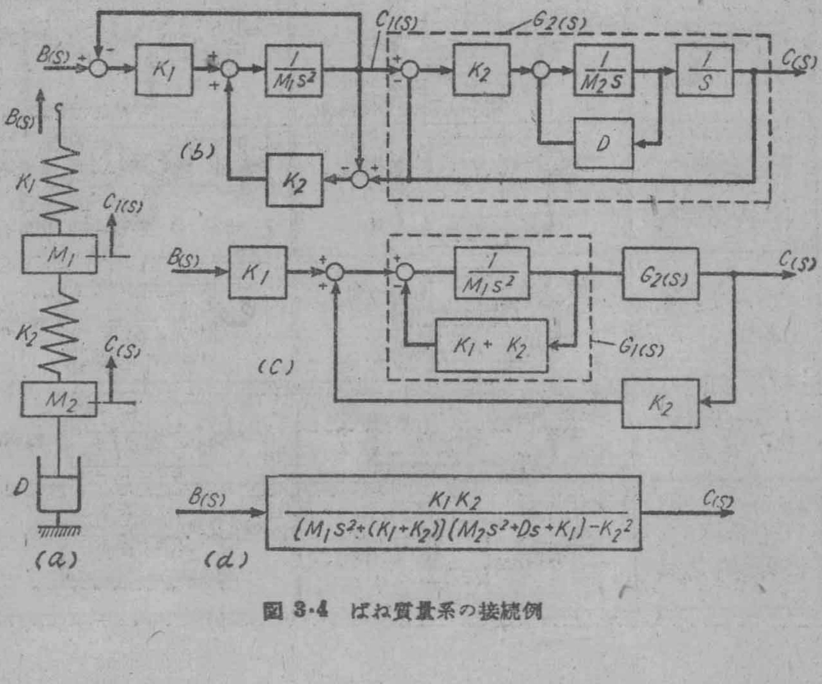


図 3·4　ばね質量系の接続例

4. 基本項の周波数応答

（各種の伝達関数に含まれる共通因子の特性を簡単な法則や定規で与える）

4·1 基　本　項

多くの伝達関数はつぎの項を組み合わせた形をもつ：

$$① \ k, \quad ② \ \frac{1}{s}, \quad ③ \ \frac{\omega_b}{s+\omega_b}, \quad ④ \ \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}, \quad ⑤ \ e^{-sL}$$

ここにつぎのパラメータは定数とする：k＝ゲイン定数，ω_b＝折点周波数，ω_n＝自然周波数，ζ＝減衰係数（1 より小），L＝むだ時間。

例　図 3·2 (a) の伝達関数は ① と ③ の基本項よりなる：

$$\frac{k}{1+Ts}=\frac{k\omega_b}{s+\omega_b}, \quad \omega_b=\frac{1}{T} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4\cdot1)$$

4·2 周波数伝達関数

一般に伝達関数 $G(s)$ の s を

$$s=j\omega, \text{ ただし } j=\sqrt{-1}, \ \omega=\text{角周波数}$$

とおけば，$G(j\omega)$ は複素量すなわちベクトルとなる。

$$G(j\omega)=\underbrace{\mathrm{Re}\,G(i\omega)}_{\text{実数部}}+j\underbrace{\mathrm{Im}\,G(i\omega)}_{\text{虚数部}}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{ゲイン}=|G(j\omega)|=\sqrt{[\mathrm{Re}\,G(j\omega)]^2+[\mathrm{Im}\,G(j\omega)]^2}\\&\text{位　相}=\angle G(j\omega)=\tan^{-1}[\mathrm{Im}\,G(j\omega)/\mathrm{Re}\,G(j\omega)]\end{aligned}\right\}\cdots\cdot(4\cdot2)$$

入出力信号が正弦波状変化のとき，$|G(j\omega)|$ は振幅比，$\angle G(j\omega)$ は位相ずれを与える。

例　基本項 ① は $|G(j\omega)|=k, \ \angle G(j\omega)=0$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(4\cdot3)$

4·3 周波数応答の図示

周波数伝達特性は極線図または対数線図に表わすことが多い。

極線図には極方眼紙（36 ページ図 E など）を用い，ベクトル軌跡または逆ベクトル軌跡を描く。前者は $G(j\omega)$，後者はその逆数 $G^{-1}(j\omega)$ のいずれも ω を変数にしたときの軌跡である。

対数線図では片対数方眼紙を用い，ω を対数目盛の横軸にとって $|G(j\omega)|$ と