シュヴァルツ

解析学 6

複素関数

東京大学教授
清水英男 訳

東京図書株式会社

シュヴァルツ

解析学 6

複素関数

清水英男 訳

東京図書株式会社

シュヴァルツ解析学 6

複 素 関 数 ¥1600

1971年2月20日 第1刷発行 Printed in Japan
1978年10月20日 第2刷発行

著 者 L. シュヴァルツ
訳 者 清 水 英 男
発行所 東 京 図 書 株 式 会 社

東京都 文京区 水道 2-5 カキビル
振替東京4-13803 電話(814)7818〜9

3341-2106-5160

LAURENT SCHWARTZ

COURS D'ANALYSE

II

HERMANN

Paris 1967

序

しばしば語られて来たように，物理学者や技術者のための《涙なしの数学》は存在しない．現代の物理学者や技術者は，莫大な量の，しかも広大な領域にわたっての数学的知識を必要とする．だから，これら数学の《利用者》にとって，必要なすべての結果を，完全な証明つきで習得することは，もはや絶対に不可能である．ところが，数学では，一つ一つの結果に厳密な証明を付けることが通念となっている．したがって，数学の教程は，つぎの二つのうちのどちらかを選ばざるを得ない．一つは短い教程で，ほんの少しの結果をきちんと証明する．こうすると，数学の学生は満足するだろうが，物理の学生は満足しないだろう．もう一つはやはり短い教程で，結果は豊富だが，証明はごく概略だけ付けるか，またはまったく省略してしまう．この場合には，読者のデカルト精神がまったく満たされないことになるだろう．

そこで，我々はこのどちらとも異なる第三の道を選んだ．私は長い教程，非常に長い教程を作った．それは定理をふんだんに含み，しかも，それらすべてに原則として完全な証明が付けてある．したがって，これは本来の意味での教程というよりはむしろ一冊の本，参考図書である．この教程を実際に講義するときには，その要約だけしか話すひまがないと思う．学生諸君は，したがって，この本全部を義務的に学ぶ必要はない．その都度明確に指示される必須部分だけを学べばよい．必須部分は，たくさんの結果と少しの証明とから成っている．

そのかわり，学生諸君は，この本で出会う新しい考えかたや構造をすべて理解

しなければならない．また，諸定理とその精神とを知らなければならない．さらに，習得した定理が楽々と使いこなせるようにならなければならない．これは思ったほどやさしいことではない．もし，定理に述べられていることの意味を一度も深く考えなかったとしたら，たとえ本を見ながらでも，その定理をすぐに使いこなすことは絶対に不可能である．

必須と指示した証明は，すべてもっとも教育的でしかももっとも特徴的なものばかりである．

しかし，学生諸君は，必須でない部分からも，自分の好みに一番よく合ったところを選んで勉強することができるし，しかも私はそれを強くすすめる．その際，講義担当者や私自身に相談するとよい．我々は，諸君に助言を与えることを切に望んでいるのである．こうすることによって，いろいろな好みの学生，いろいろな学力水準の学生が，ひとしく満足を得ることになるだろう．その結果，本校（Ecole Polytechnique）の同学年の学生が，人によってそれぞれ別々の部分を深く学んだことになれば大変結構なことであろう．

ロラン・シュヴァルツ

訳　者　序

本書は，Laurent Schwartz 著

«*Cours d'analyse*» (1967)

の全訳である．これは，シュヴァルツ教授の Ecole Polytechnique での解析学の講義の教程として書かれた．

原書は全二巻の仮綴本であるが，訳書は全7巻に分けた．訳書の構成はつぎのとおりである．

第1巻	集合・位相	Ch. 1	集　合
		Ch. 2	位　相
第2巻	微分法	Ch. 3	微分法
第3巻	積分法 上	Ch. 4	積分法
第4巻	積分法 下	Ch. 4	積分法（つづき）
第5巻	外微分法	Ch. 6	外微分法
第6巻	複素関数	Ch. 7	複素関数
第7巻	微分方程式	Ch. 5	微分方程式
	ヒルベルト空間	Ch. 22	ヒルベルト空間
	フーリエ級数	App.	フーリエ級数

読者への注意

1. 欄外の注意記号 ☡（危険な曲り角）は，そこが重大な誤りを犯しやすい箇所であることを示す．
2. 記号〘——〙は，反復を避けるための略記号である．たとえば，«A〘A′〙ならば B〘B′〙である» は，«A ならば B であり，A′ ならば B′ である» を意味する．
3. 訳者の補注は原注と同じ脚注の形とし，最後に［訳注］と断りを入れた．

目　　次

第6章　複　素　関　数

§1.　実数体と複素数体に関する可導性

第3章微分法で論ぜられたことはすべて実数体に関するか複素数体に関するかにかかわりなく成立していた．しかし，本質的に関数が実数値をとることを仮定する最大値と最小値の定理（したがって，とくに変分法）は例外であった．一方，第7章微分方程式ではつねに実変数の，すなわち $\mathbf{R}$ のある区間で定義され，実数体または複素数体上のバナハ空間 F に値をとる関数を考察する．

すでに第3章のはじめに述べたように，E および F が $\mathbf{C}$ 上のノルム・アフィン空間であるならば，それらはもちろん $\mathbf{R}$ 上のノルム・アフィン空間であり，E の開集合 Ω から F の中への，$\mathbf{C}$ に関して可導な写像はすべてまた $\mathbf{R}$ に関しても可導である．しかしこの場合，Ω の点 a における導写像 $f'(a)$ は $\vec{\mathrm{E}}$ から $\vec{\mathrm{F}}$ の中への写像であるが，それは $\mathbf{R}$ 線型なばかりでなく $\mathbf{C}$ 線型ともなる．逆に，もし f が Ω から F の中への，点 a において $\mathbf{R}$ 可導な写像であり，導写像 $f'(a)$ が $\mathbf{R}$ 線型なばかりでなく $\mathbf{C}$ 線型でもあるならば，f は $\mathbf{C}$ 可導で，同じ導写像 $f'(a)$ をもつ．これは定義（第3章，(3.13)）からすぐにわかることである．

定理 1.　$\vec{\mathrm{E}}$ および $\vec{\mathrm{F}}$ は複素数体上のベクトル空間であるとする．$\vec{\mathrm{E}}$ から $\vec{\mathrm{F}}$ の中への $\mathbf{R}$ 線型な写像 L が $\mathbf{C}$ 線型であるためには，$\vec{\mathrm{E}}$ の任意のベクトル $\vec{\mathrm{X}}$ に対して等式

$$\mathrm{L}(i\vec{\mathrm{X}}) = i\mathrm{L}(\vec{\mathrm{X}}) \tag{1.1}$$

が成立つことが必要十分である．もし $\vec{\mathrm{E}}$ が有限次元で，$(\vec{e}_j)_{j=1,2,\cdots,n}$ が $\vec{\mathrm{E}}$ の $\mathbf{C}$ 基底ならば，これが成立つためには，この基底の任意の元に対し

て

(1.2) $$\mathrm{L}(i\vec{e}_j) = i\mathrm{L}(\vec{e}_j)$$

となることが必要十分である.

証明.　上記の条件は明らかに必要である. それらが十分であることを証明しなければならない. もし (1.1) が成立つならば, $\lambda + i\mu$ が任意の複素数であるとき,

(1.3) $$\mathrm{L}((\lambda + i\mu)\vec{\mathrm{X}}) = \lambda\mathrm{L}(\vec{\mathrm{X}}) + \mu\mathrm{L}(i\vec{\mathrm{X}}) = (\lambda + i\mu)\mathrm{L}(\vec{\mathrm{X}})$$

となるはずであるが, これは確かに L が **C** 線型であることを示す.

一方, L は **R** 線型であるから, $\vec{\mathrm{E}}$ が有限次元のとき (1.1) が成立つためには, それが $\vec{\mathrm{E}}$ の **R** 基底の元に対して成立てば十分である. ところが (1.1) が **C** 基底の元 $\vec{e}_j$ に対して成立てば, $\mathrm{L}(i\cdot i\vec{e}_j) = i\mathrm{L}(i\vec{e}_j)$, すなわち $\mathrm{L}(-\vec{e}_j) = i\mathrm{L}(i\vec{e}_j)$, すなわち $\mathrm{L}(i\vec{e}_j) = i\mathrm{L}(\vec{e}_j)$ となり, (1.1) は $i\vec{e}_j$ に対しても成立つ. $\vec{e}_j$, $i\vec{e}_j$ の集合が $\vec{\mathrm{E}}$ の **R** 基底となることは言うまでもない.　終.

系 1.　E および F は **C** アフィン空間で, f は E の開集合 Ω から F の中への, 点 $a \in \Omega$ において **R** 可導な写像であるとき, f が点 a において **C** 可導であるためには, すべての $\vec{\mathrm{X}} \in \vec{\mathrm{E}}$ に対して等式

(1.4) $$f'(a)\cdot(i\vec{\mathrm{X}}) = if'(a)\cdot\vec{\mathrm{X}}$$

が成立つことが必要十分である.

注意.　E が有限次元である場合を考えよう. 0, $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ を **C** 標構とする. $\vec{\mathrm{X}} \in \vec{\mathrm{E}}$ とし, z_j を $\vec{e}_j$ に関する $\vec{\mathrm{X}}$ の (複素) 座標とする. このとき $\vec{\mathrm{X}} = \sum_{j=1}^{n} z_j\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n}(x_j\vec{e}_j + y_j(i\vec{e}_j))$ である. したがって $x_j = \mathscr{R}e\, z_j$ と $y_j = \mathscr{I}m\, z_j$ は **R** 基底 $\vec{e}_j$, $i\vec{e}_j$ に関する $\vec{\mathrm{X}}$ の座標となる. もし x_j と y_j を, 0, $\vec{e}_j$, $i\vec{e}_j$ からなる **R** 標構に関する座標関数と呼ぶならば, $z_j = x_j + iy_j$ は 0, $\vec{e}_j$ からなる **C** 標構に関する座標関数であるということができる. もし f が **R** 可導ならば, それは実数の意味での偏導値 $f'(a)\cdot\vec{e}_j = \dfrac{\partial\vec{f}}{\partial x_j}(a)$, $f'(a)\cdot i\vec{e}_j = \dfrac{\partial\vec{f}}{\partial y_j}(a)$ をもつ. しかし f が **C** 可導ならば, 複素数の意味で $f'(a)\cdot\vec{e}_j = \dfrac{\partial\vec{f}}{\partial z_j}(a)$, $f'(a)\cdot i\vec{e}_j = if'(a)\cdot\vec{e}_j = i\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial z_j}(a)$ ともなる. 言いかえれば, (1.2) によって

系 2.　E が有限次元であり, $\vec{e}_j$ が $\vec{\mathrm{E}}$ の **C** 基底であるならば, Ω の点 a において **R** 可導な写像 $f : \Omega \to \mathrm{E}$ は

(1.5) $$\frac{\partial\vec{f}}{\partial y_j}(a) = i\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_j}(a), \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

となるとき, またそのときに限り **C** 可導である. この場合,

$$\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial z_j}}(a) = \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(a) = -i\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial y_j}}(a) = f'(a)\cdot\vec{e}_j \tag{1.6}$$

となる.

注意.　(1.6) は別な仕方でもできる. x_1, y_1, $\cdots$, x_{j-1}, y_{j-1}, x_{j+1}, y_{j+1}, $\cdots$, x_n, y_n を固定すれば, f は z_j を仲介として x_j, y_j の関数となる. 合成関数の定理を適用すれば

$$\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x_j}} = \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial z_j}}\frac{\partial z_j}{\partial x_j} = \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial z_j}}, \qquad \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial y_j}} = \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial z_j}}\frac{\partial z_j}{\partial y_j} = i\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial z_j}}$$

となる. これはてがるであるが, 実数の意味の導関数と複素数の意味の導関数とが同時に関係しているので多少の注意が必要である. そのため, これを正当化するのはこれまでの方法ほど簡単ではない.

系 3.　f は $\mathbf{C}$ アフィン空間 E の開集合 Ω から複素数体 $\mathbf{C}$ の中への写像であり, P および Q は f の実数部分および虚数部分, $f = \mathrm{P} + i\mathrm{Q}$ であるとする. P および Q が Ω 上で $\mathbf{R}$ 可導な関数であるならば, f が $\mathbf{C}$ 可導であるための必要十分条件は, すべての $\vec{\mathrm{X}} \in \vec{\mathrm{E}}$ に対して

$$\mathrm{D}_{i\vec{\mathrm{X}}}\,\mathrm{P} = -\mathrm{D}_{\vec{\mathrm{X}}}\,\mathrm{Q} \tag{1.7}$$

となることである. もし $\mathrm{E} = \mathbf{C}^n$ ならば, この条件は ($\vec{\mathrm{X}} = \vec{e}_j$, $i\vec{e}_j$ とおくことによって) コーシー＝リーマンの条件

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y_j}, \qquad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y_j} = -\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x_j}, \qquad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1.8}$$

の形に書くことができる.

証明.　これは明白である. (1.4) の実数部分および虚数部分をとればよい.　　終.

系 4.　Ω は $\mathbf{C}$ アフィン空間 E の連結開集合, f は Ω 上で $\mathbf{C}$ 可導な複素数値関数であり, その実数部分が Ω 上で一定ならば, f 自身も一定である.

証明.　実際, (1.7) によって f の虚数部分 Q は恒等的に 0 となる導関数をもつ. Ω は連結であるから, そのとき Q は第3章の定理 41 によって一定となる.　　終.

系 5.　f は連結開集合 $\Omega \subset \mathrm{E}$ で定義され, $\mathbf{C}$ 可導な複素数値関数で, その絶対値 $|f|$ が Ω で一定ならば, f 自身も一定である.

証明.　実際, すべての $\vec{\mathrm{X}} \in \vec{\mathrm{E}}$ に対して

$$\frac{1}{2}\mathrm{D}_{\vec{\mathrm{X}}}|f|^2 = \frac{1}{2}\mathrm{D}_{\vec{\mathrm{X}}}(\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2) = \mathrm{P}\mathrm{D}_{\vec{\mathrm{X}}}\,\mathrm{P} + \mathrm{Q}\mathrm{D}_{\vec{\mathrm{X}}}\,\mathrm{Q} = \mathrm{P}\mathrm{D}_{\vec{\mathrm{X}}}\,\mathrm{P} - \mathrm{Q}\mathrm{D}_{i\vec{\mathrm{X}}}\,\mathrm{P} = 0$$

となる. $\vec{\mathrm{X}}$ を $i\vec{\mathrm{X}}$ でおきかえれば

$$\mathrm{Q}\mathrm{D}_{\vec{\mathrm{X}}}\,\mathrm{P} + \mathrm{P}\mathrm{D}_{i\vec{\mathrm{X}}}\,\mathrm{P} = 0$$

も成立つ. Ω の各点 a において, 二つの未知数 $\mathrm{D}_{\vec{\mathrm{X}}}\,\mathrm{P}(a)$, $\mathrm{D}_{i\vec{\mathrm{X}}}\,\mathrm{P}(a)$ の, 二つの線型方程

式が得られたのであるが，その行列式は $P^2(a)+Q^2(a)$ である．もし定数 $P^2+Q^2=|f|^2$ が 0 ならば，系はすでに証明されたことになる．もしそうでなければ，すべての a および $\vec{X}$ に対して $D_{\vec{X}}P(a)=0$, $D_{i\vec{X}}P(a)=0$ となる．P' はこのとき Ω 上で 0 であり，Q' も同様である．Ω は連結だから，f は一定となる．　終．

記号 $\dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ の導入

E を $\mathbf{C}$ 上有限次元の空間とし，$(\vec{e}_j)_{j=1,2,\cdots,n}$ を $\vec{E}$ の $\mathbf{C}$ 基底とする．前のように実座標関数 x_j, y_j を考えれば，それらの微分 dx_j, dy_j をとることができる．同様に複素座標 z_j は E 上の複素数値関数であって，微分 dz_j をもつ．このとき等式 $dz_j=dx_j+idy_j$ が成立つ．複素共役な関数 $\bar{z}_j=x_j-iy_j$ をとれば，$d\bar{z}_j=dx_j-idy_j$ が成立つ．さて f は E の開集合 Ω から複素数体上のアフィン空間 F の中への写像であるとする．f は Ω の点 a において $\mathbf{R}$ 可導であるとだけ仮定しよう．このときその導写像は，第3章の微分記号を用いて

$$\overrightarrow{df}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_j}dx_j+\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial y_j}dy_j\right) \tag{1. 9}$$

の形に表わされる．dx_j および dy_j を

$$dx_j=\frac{dz_j+d\bar{z}_j}{2},\qquad dy_j=\frac{dz_j-d\bar{z}_j}{2i} \tag{1. 10}$$

によって dz_j および $d\bar{z}_j$ で表わせば，$\overrightarrow{df}$ の別な表示

$$\overrightarrow{df}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_j}-i\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial y_j}\right)dz_j+\frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_j}+i\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial y_j}\right)d\bar{z}_j\right) \tag{1. 11}$$

が得られる．このことから，われわれはつぎのように定義することにする（たんに $\mathbf{R}$ 可導な関数 f に対してであることをもう一度思いだそう）．

$$\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial z_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_j}-i\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial y_j}\right),\qquad \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial \bar{z}_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_j}+i\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial y_j}\right), \tag{1. 12}$$

したがって

$$\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_j}=\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial z_j}+\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial \bar{z}_j},\qquad \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial y_j}=i\left(\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial z_j}-\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial \bar{z}_j}\right). \tag{1. 13}$$

こうすれば導写像（やはり実数の意味での）は，微分記号を用いて，格段にわかり易い形に表わされる．

$$\overrightarrow{df}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial z_j}dz_j+\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial \bar{z}_j}d\bar{z}_j\right). \tag{1. 14}$$

ここで導入された記号，$\dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ は非常に実用的な工夫である．条件 (1. 5) からただちにつぎの系が得られる．

系 6. $\mathbf{C}^n$ の開集合 Ω から F の中への，$\mathbf{R}$ 可導な写像 f が $\mathbf{C}$ 可導であるためには，それが偏微分方程式

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \bar{z}_j} = \vec{0} \tag{1.15}$$

を満たすことが必要十分である．このとき，式 (1.6) で定義される複素数体に関する偏導値 $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial z_j}$ は，(1.12) で定義される $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial z_j}$ と一致する．

定理 2. $\vec{\omega}$ は $\mathbf{C}^n$ の開集合 Ω 上で定義され，$\vec{\mathrm{F}}$ に値をとる $\mathbf{R}$ 可導な p 次の微分形式であるとする．このとき，余境体 $d\vec{\omega}$ はつぎの式で与えられる．これは第 5 章，(4.1) の第二式の類似である．

$$d\vec{\omega} = \sum_{j=1}^{n}\left(dz_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial z_j} + d\bar{z}_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \bar{z}_j}\right). \tag{1.16}$$

証明. 実際，第 5 章の式 (4.1) を用いれば，

$$\begin{aligned} d\vec{\omega} &= \sum_{j=1}^{n}\left(dx_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial x_j} + dy_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial y_j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{dz_j + d\bar{z}_j}{2} \wedge \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial z_j} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \bar{z}_j}\right) + \frac{dz_j - d\bar{z}_j}{2i} \wedge i\left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial z_j} - \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \bar{z}_j}\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(dz_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial z_j} + d\bar{z}_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \bar{z}_j}\right). \end{aligned} \tag{1.17}$$

終.

調 和 関 数

定理 3. f は $\mathbf{C}^n$ の開集合 Ω から F の中への，二回 $\mathbf{R}$ 可導な写像であるとする．このとき f が一回 $\mathbf{C}$ 可導ならば，f は調和である．すなわち

$$\overrightarrow{\Delta f} = \sum_{j=1}^{n}\left(\overrightarrow{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}} + \overrightarrow{\frac{\partial^2 f}{\partial y_j^2}}\right) = \vec{0}$$

を満たす．f が複素数体 $\mathbf{C}$ に値をとり，P および Q がその実数部分および虚数部分であるならば，P および Q もまた調和である．

証明. ラプラシアン Δ は (1.12) の記号で

$$\Delta = 4\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \tag{1.18}$$

の形に表わされる．これから，系 6 によって，前半の結論はすぐにでる．

$\mathbf{F} = \mathbf{C}$ のとき，実数および虚数部分 P, Q に関する結論は明白である．$\Delta(\mathrm{P} + i\mathrm{Q}) = \Delta\mathrm{P} + i\Delta\mathrm{Q}$ であり，$\Delta\mathrm{P}$ および $\Delta\mathrm{Q}$ は実数だからである．　終.

注意.　われわれは定理 10 において，複素次元 $n=1$ の場合は $\Omega\subset\mathbf{C}$ から F の中への，一回 **C** 可導な関数は必ず無限回可導であることを学ぶであろう．したがって，一回 **C** 可導であること以外は何も仮定せずに，f は（したがって $\mathrm{F}=\mathbf{C}$ のときは P と Q も）調和であると言うことができる（定理 10，系 1）.

ある意味で定理 3 の逆を考えることができる．**P** は **C** の開集合 Ω で定義された実関数で，二回 **R** 可導かつ調和であると仮定する．このとき P は Ω で定義された **C** 可導な複素数値関数の実数部分となるであろうか.

定理 4.　Ω は複素数体 **C** の単連結開集合，P は Ω 上で C^2 級の実関数で調和であるとする．すなわちラプラスの方程式 $\Delta \mathrm{P}=0$ を満たすとする．このとき Ω 上で **C** 可導な複素数値関数 f で P を実数部分とするものは無数にある．もし Ω が連結ならば，虚数部分 Q は定数の差を除いて定まる．したがって f は純虚数の差を除いて定まる.

証明.　われわれはコーシー=リーマンの関係式（1.8）（$n=1$ として）が満たされるように Q を定めなければならないから，結局 Q（**R** 可導と仮定する）の偏導関数は与えられていることになる．そのような関数 Q が求められるための一つの必要十分な条件は，Ω は単連結で $-\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}$ と $\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}$ は C^1 級であるから，$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}\right)$ すなわち $\Delta \mathrm{P}=0$ で与えられることはすでに知っている（第5章，定理 62，系 1）．P は C^2 級で調和であると仮定しているからこの条件は満たされている．したがって Q を求めることが可能であり，結果はもし Ω が連結ならば定数の差を除いて一意的である．（なぜなら二つの解の差は一階の偏導関数が 0 となる関数であるから，第 3 章の定理 41 によって定数となる.）終.

注意.　この結果は $\mathbf{C}^n$，$n\geqslant 2$，の上の複素関数に対しては全然通用しない.

$\Omega\subset\mathbf{C}$ の上で **C** 可導な複素数値関数の実数部分および虚数部分は，**一組の共役な実調和関数**と呼ばれる．単連結開集合で調和な関数が与えられていれば，それは無数の共役な調和関数をもち，もし開集合が連結ならば，これは定数の差を除いて決まることがわかる.

Q が P の共役調和関数ならば，Q の共役調和関数は $-\mathrm{P}$ であることを注意しておく.

§2.　一変数整型関数の基礎理論．コーシーの積分公式

E は **C** 上のノルム・アフィン空間，$\vec{\mathrm{F}}$ は **C** 上のバナハ空間であるとする．（$\vec{\mathrm{F}}$ が線型空間で完備であることを仮定する必要のない場合もあるが，$\vec{\mathrm{F}}$ に値をとる連続関数を積分するので，大概はそう仮定している．われわれはつねに $\vec{\mathrm{F}}$ が線型空間で完備であると仮定し，文中では必ずしもそれを繰返さない.）E の開