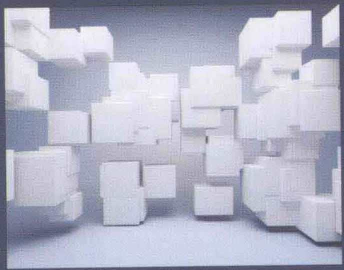
工程微分几何

周哲波 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

工程微分几何

周哲波　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是依据机械制造业发展现状和企业生产需求，以数学理论推导为主线，结合编者多年现场工作经验编著的。全书共分四章：第 1 章重点阐述了工程微分几何的理论基础；第 2 章全面论述了各种工程应用的典型表线的推导方法和特性；第 3 章详细分析了各种工程应用的典型表面的推导方法和特性；第 4 章综合概述了工程应用典型曲线、曲面包络法推导原理及特点。书中案例丰富，每章均配有适量的复习思考题。

本书可作为高等院校机械类和近机类各专业的研究生和本科生教材，也可以供一般工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

工程微分几何/周哲波编著. —北京：北京大学出版社，2014.1

ISBN 978-7-301-23583-6

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①工程数学—微分几何—高等学校—教材 Ⅳ. ①TB113

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 300040 号

书　　名：工程微分几何

著作责任者：周哲波　编著

策 划 编 辑：童君鑫

责 任 编 辑：宋亚玲

标 准 书 号：ISBN 978-7-301-23583-6/TH·0378

出 版 发 行：北京大学出版社

地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871

网　　址：http://www.pup.cn　新浪官方微博：@北京大学出版社

电 子 信 箱：pup_6@163.com

电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62750667

出版部 62754962

印 刷 者：三河市北燕印装有限公司

经 销 者：新华书店

650 毫米×980 毫米　16 开本　12.5 印张　228 千字

2014 年 1 月第 1 版　2014 年 1 月第 1 次印刷

定　　价：30.00 元

前　言

随着我国制造业“由制造大国变成制造强国”的发展战略的确定，以发展机械制造技术为核心内容的目标更加明确。为了适应我国机械制造业迅速发展的需要，培养高素质高级工程技术人才已成为当务之急。在此背景下，对高素质高级工程人才培养提出了全新的要求，既要求掌握雄厚的理论基础，又要求具备应用极高理论知识解决工程实际问题能力。为适应我国21世纪高素质高级工程技术人才培养的需求，编者在总结多年来专业教学和生产实践的基础上编写了本书。

本书从工科研究生教学的数学基础出发，并根据工程技术领域中应用本学科的需要来安排章节体系和取舍内容，文字通俗易懂。编排的原则是由浅入深、循序渐进，既讲述基本原理，又注重到现代最新应用技术与生产实际需要相联系。在突出专业技术应用方面，本书具有较强的针对性和实用性。

本书共有四章内容，由安徽理工大学周哲波编著，在写作中参阅了有关的教材、资料和文献，在此对其作者表示衷心的感谢!

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2013年10月

目　　录

第1章 矢量分析

1.1 矢量及其坐标表达式

自然界中既有大小又有方向的物理量称为**矢量或向量**，如力、力矩、速度及加速度；而仅有大小没有方向的物理量称为**标量或纯量**，如体积、温度、时间及质量等。矢量以线段表示，其长度表示大小，箭头所指表示方向。

如图 1－1 所示，有向线段$\overrightarrow{OM}$表示矢量 $\boldsymbol{a}$，O 与 M 两点分别为 $\boldsymbol{a}$ 的起点与终点。起点和终点相重合的矢量称为**零矢量**，其大小为零，而没有确定的方向，可记做 $\mathbf{0}$，或者写成 $\boldsymbol{O}$。我们规定，两个大小相等方向相同的矢量为相等的矢量。

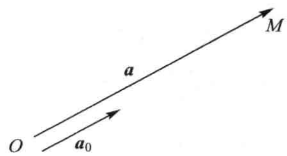


图 1－1

在许多工程的研究中，矢量的起点位置无关紧要，只需考虑其大小和方向，这种矢量可以做任意平动，称为自**由向量**；在另一些问题中，两个相等的矢量必须共线而且起点重合才能完全等价，这种矢量的起点位置固定，称为**点矢量**。无论自由矢量或点矢量，其大小和方向恒定者，称为**常矢量**；若大小或方向是变化的，则称为**变矢量**。

设 $\boldsymbol{a}$ 为非零矢量，其大小以 $|\boldsymbol{a}|$ 表示，称为它的**模**或**绝对值**，模为 1 的矢量，称为**幺矢**或**单位矢量**。设沿 $\boldsymbol{a}$ 方向的幺矢以 $\boldsymbol{a}_0$（图 1－1）表示，则可以写成：

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}_0 \tag{1-1}$$

如图 1－2 所示，以矢量 $\boldsymbol{a}$ 的起点 O 为原点取笛卡儿直角坐标系 $\{O;\ x、y、z\}$。设沿各坐标轴正方向的幺矢分别为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，则构成右手系直角坐标架 $\{O;\ i、j、k\}$，简称**标架**，常以 σ 表示。幺矢 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 称为标架 σ 的**底矢**。于是矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示为：

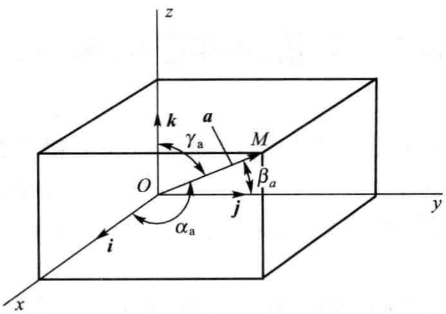


图 1－2

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1-2}$$

式中，a_x、a_y、a_z 是代表矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小的线段长 $\overline{OM}$ 在相应坐标轴上的投影，或者说是矢量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 M 的坐标值。

上式称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标表达式**，矢量 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$ 称为 M 点在标架 σ 里的**径矢**。

矢量 $\boldsymbol{a}$ 也可以用任意三个不共面的幺矢 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 所构成的线性组合表达式，即

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3 \tag{1-3}$$

式中，a_1、a_2、a_3为同矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小成比例的系数，称为**线性组合系数**，所以式(1-3)称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的**线性组合式**。显然，式(1-2)是矢量 $\boldsymbol{a}$ 在特定条件下，即 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 三个幺矢互相垂直的一种线性组合。

1.2 矢量的基本运算

1.2.1 数量乘矢量

一数量 λ 同矢量 $\boldsymbol{a}$ 相乘，其积为矢量 $\lambda\boldsymbol{a}$，大小等于 $\lambda|\boldsymbol{a}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 平行。若 $\lambda>1$，相当于把 $\boldsymbol{a}$ 放大 λ 倍；若 $\lambda<1$，则把 $\boldsymbol{a}$ 缩小 λ 倍。当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 同 $\boldsymbol{a}$ 的指向相同；当 $\lambda<0$ 时，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同 $\boldsymbol{a}$ 的指向相反。

数量乘矢量满足结合律和分配律，即

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\mu\boldsymbol{a} \tag{1-4}$$

以及

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a} \tag{1-5}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b} \tag{1-6}$$

式中，μ 为另一数量，$\boldsymbol{b}$ 是另一矢量。

根据上述运算规律，可把 $\lambda\boldsymbol{a}$ 写成坐标表达式

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k} \tag{1-7}$$

1.2.2 矢量和与差

两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，规定为以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形对角线上的矢量，如图 1-3所示；$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，可认为是 $\boldsymbol{a}$ 与($-\boldsymbol{b}$)的和，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$。($-\boldsymbol{b}$)与 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，方向相反。

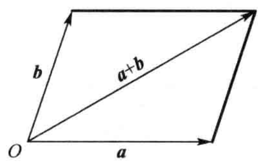


图 1-3

矢量和与差满足结合律及交换律，即

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\pm\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\pm\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\pm\boldsymbol{c} \tag{1-8}$$

以及

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\pm\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{1-9}$$

式中，$\boldsymbol{c}$ 为另一矢量。

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 二矢量在标架 σ 中

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{b}&=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}\end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

则其和或差的坐标表达式为

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}\pm(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k} \tag{1-11}$$

对于更多的矢量求和或差，其原则及方法是一样的。

1.2.3 矢量的数量积

如图 1－4 所示，二矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**定义为：

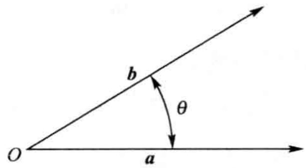


图 1－4

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{1-12}$$

它是一个数量，其中 θ 是 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 之间的夹角，应取 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$。在运算书写中，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的“·”号不应遗漏，不能把 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 写成 $\boldsymbol{ab}$，因为这二者在矢量运算中有完全不同的含义，所以又常把二矢量的数量积称为**点乘积**或简称**点乘**。

由定义可知，矢量的数量积满足交换律，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \tag{1-13}$$

它也满足分配律与结合律，即

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \tag{1-14}$$

以及

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{1-15}$$

由定义又知矢量 $\boldsymbol{a}$ 的自身点乘为：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos0=|\boldsymbol{a}|^2$$

并可记做 $\boldsymbol{a}^2$，亦即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2$。类似有：

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1 \tag{1-16}$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0 \tag{1-17}$$

于是由式(1-11)及式(1-14)～式(1-17)可得：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \tag{1-18}$$

设矢量 $\boldsymbol{a}$ 在标架 σ 里同 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的夹角分别为 α_a、β_a、γ_a(图 1-2)，则由式(1-2)可得：

$$\left.\begin{aligned}a_x&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha_a\\a_y&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}=|\boldsymbol{a}|\cos\beta_a\\a_z&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma_a\end{aligned}\right\} \tag{1-19}$$

式中，$\cos\alpha_a$、$\cos\beta_a$、$\cos\gamma_a$ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**。

由式(1-19)得：

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_a&=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}\\\cos\beta_a&=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}\\\cos\gamma_a&=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\end{aligned}\right\} \tag{1-20}$$

于是式(1-2)又可以写成：

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|(\cos\alpha_a\boldsymbol{i}+\cos\beta_a\boldsymbol{j}+\cos\gamma_a\boldsymbol{k}) \tag{1-2'}$$

从而可得 $\boldsymbol{a}$ 的幺矢为：

$$\boldsymbol{a}_0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\cos\alpha_a\boldsymbol{i}+\cos\beta_a\boldsymbol{j}+\cos\gamma_a\boldsymbol{k} \tag{1-21}$$

由式(1－21)可得：

$$\cos^2\alpha_a+\cos^2\beta_a+\cos^2\gamma_a=1 \tag{1-22}$$

再由式(1－19)得：

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{1-23}$$

再假设矢量 $\boldsymbol{b}$ 在标架 σ 里同 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的夹角分别为 α_b、β_b、γ_b，则由式(1－20)类似可得：

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\cos\alpha_a\cos\alpha_b+\cos\beta_a\cos\beta_b+\cos\gamma_a\cos\gamma_b$$

于是可以得到：

$$\cos\theta=\cos\alpha_a\cos\alpha_b+\cos\beta_a\cos\beta_b+\cos\gamma_a\cos\gamma_b \tag{1-24}$$

1.2.4 矢量的矢积

如图 1－5 所示，二矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**矢积**定义为：

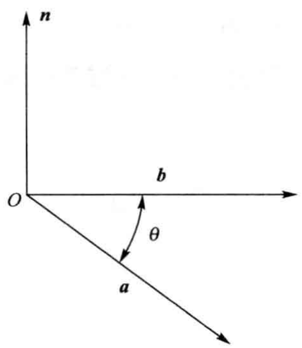


图 1－5

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta\cdot\boldsymbol{n}$$

式中，θ 是从 $\boldsymbol{a}$ 旋转到 $\boldsymbol{b}$ 的有向角，取值范围是 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$；$\boldsymbol{n}$ 是同时垂直

于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的幺矢，其指向按 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{n}$ 构成的右手系标架确定。所以二矢量的矢积为一矢量，其大小及方向均有式(1-24)表达。在书写时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的"×"号不能遗漏，因而又常把二矢量的矢积称为**叉乘积**或简称**叉乘**。

由定义可知，二矢量的矢积不满足交换律，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$，而是：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \tag{1-25}$$

但它满足结合律和分配律，即

$$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{1-26}$$

以及

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} \tag{1-27}$$

根据定义又知，矢量 $\boldsymbol{a}$ 自身的矢积等于零矢量，即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\sin 0\cdot\boldsymbol{n}=0$$

故类似有：

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0 \tag{1-28}$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\end{aligned}\right\} \tag{1-29}$$

于是由式(1-11)及式(1-26)～式(1-29)可得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\ &=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1-30}$$

1.3 混合积与二重矢量积

1.3.1 混合积

设有 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 三矢量，其坐标表达式为：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\\\boldsymbol{b}&=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}\\\boldsymbol{c}&=c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}\end{aligned}\right\}\qquad(1-31)$$

它们的**混合积**定义为 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$，并记做 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$，则有：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})&=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\\&=(a_xi+a_yj+a_zk)\cdot[(b_xi+b_yj+b_zk)\times(c_ai+c_yj+c_zk)]\end{aligned}$$

利用式(1－18)和式(1－30)关系可得：

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}\qquad(1-32)$$

它是一个数量。由行列式的性质可知：

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$$

即

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\qquad(1-33)$$

再由式(1－13)及式(1－25)可得：

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\qquad(1-34)$$

若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 三矢量共面，由于 $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 同 $\boldsymbol{a}$ 垂直，故必定有 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$。因此可得：

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})=0\qquad(1-35)$$

由式(1－32)可知，对于右手系直角标架 σ，必定有：

$$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\qquad(1-36)$$

1.3.2 二重矢量积

三矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的二重矢量积定义为$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$，它是一个矢量。在运算中应注意先求 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的矢积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，再以该矢量叉乘矢量 $\boldsymbol{c}$，然后得二重矢量积$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$。为运算方便，二重矢量积可展开为：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \tag{1-37}$$

该展开式可证明如下。

由式(1-30)和式(1-31)可知式(1-37)等号的左侧为：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\times(c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k})$$

再由式(1-18)和式(1-31)可知上式等号的右侧为：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}=&(a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})-\\&(b_xc_x+b_yc_y+b_zc_z)(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

展开后上列二式相同，即式(1-37)得证。

很明显，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$。

1.3.3 拉格朗日恒等式

四个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 及 $\boldsymbol{d}$，它们满足：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}) \tag{1-38}$$

称为拉格朗日(Lagrange)恒等式，证明如下。

把$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$看作一个矢量，由(1-36)式得：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]=\boldsymbol{a}[-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{b}]$$

再利用式(1-37)的关系可得

$$a\cdot[-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{a}\cdot[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}]=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})$$

于是式(1-38)得证。

由式(1-38)可知：