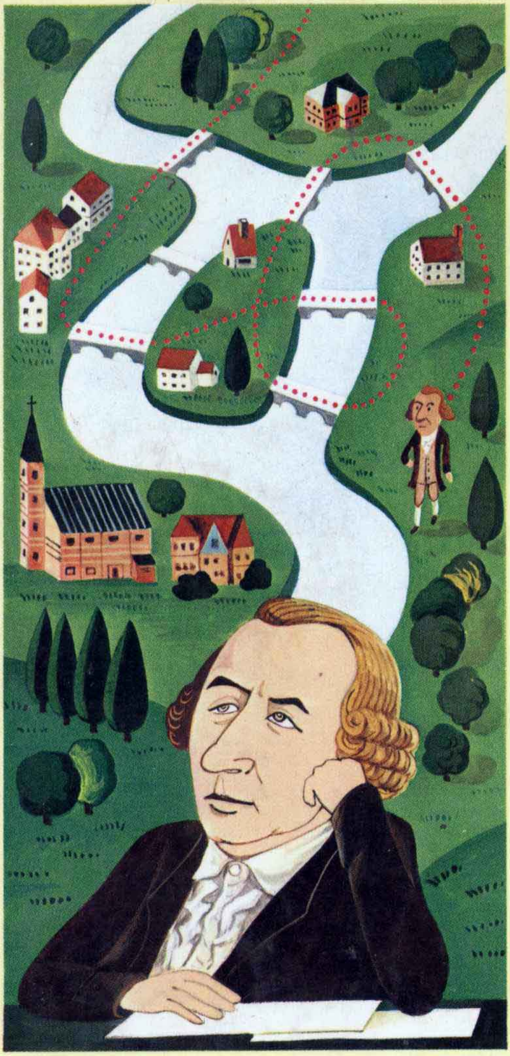
身近な数学

数学って何だ



M・オッテ　H・シュタインブリンク　R・シュトヴァッサー著
小山慶太訳

講談社

身近な数学
——数学って何だ

・オッテ H・シュタインブリンク R・シュトヴァッサー著
小山慶太訳

講談社

Mathematik die uns angeht

M. Otte/H. Steinbring/R. Stowasser

訳者まえがき

数学はきわめて抽象的な思考をしいられることから「学問の女王」と呼ばれることがあります。逆にその実用性から「学問の奴隷」と呼ばれることもあります。この二つのことばは数学の対照的な二面性を表していますが、いずれにしても、身のまわりの私たちの生活のなかで具体的に現れた問題をうまく処理しようとする努力のなかで数学は芽ばえて行ったはずです。

世にいう数学嫌いが生まれる一つの原因はこの芽ばえの面白さや必要性を取り除き、結果として残った抽象性と実用性の技術（記号の意味や計算方法）だけを押しつけられるからではないでしょうか。ちょうど栄養はあっても味や調理の楽しみを無視した宇宙食でも食べさせられているような気になってしまうのではないでしょうか。

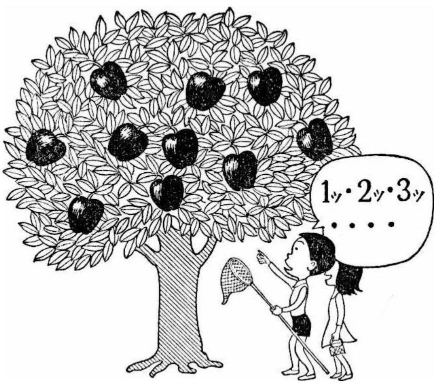
本書は計算方法の説明をするというよりも数学という眼で身のまわりの世界を眺めたときの楽しさを知ってもらうことに主眼を置いています。身近な問題から例をとりあげていますから、数学を使う工夫次第でものごとがいかに明白になり取り扱いやすくなるかを実感として感じ取ってもらえると思います。

一九七八年十月　　小山慶太

もくじ

イラスト・斉藤たけし

第一章　数えることと計算すること



一番簡単な数学の作業は数えることであろう。そしてこのとき用いられる道具が数である。しかし逆に数の概念を必ずしも数えるという作業にもどせるとは限らない。後でいくつかの例をあげて説明するように、一般的に数というものを考えるには数学のいろいろな計算や理論の中でとらえなければならない。

人間が数の概念をどのように発展させてきたかを知るひとつの手がかりは現在でも一部の未開民族のなかに見られる。たとえばフィージー諸島では一〇そうのカヌーをボラ、一〇個のココナツをコロと呼んでいる。ここでは数と数える対象物が密着しており、抽象化された数という概念が十分発達していないことを示している。また、多くの未開民族に共通してみられるが、ある数以上を「たくさん」という表現でひとまとめにしてしまうことがあげられる。実はこの痕跡は英語などの文法で名詞の単数複数の区別にも残っている。

さて数の世界を分類してみるとまず初めに登場したのが1、2、3、……という自然数である。それに対応する負の数と0が加わり整数ができあがった。となりどうしの整数の間隔は1であるが、このすき間を埋めるのに分数という概念が生まれた。ところがこの分数だけでは整数間のすき間を完全に埋めることができなかった。たとえば後で紹介するピタゴラスの定理から辺の長さが1センチメートルの正方形の対角線は$\sqrt{2}$センチメートルになる。しかし実際にこの対角線の長さを測定しようとするとどんな値になるであろうか？　おおざっぱに測れば約1.4cmであることがわかる。少し精度を上げると1.414cmになる。もっと精度を上げると1.41421cmとなる。ところがこれで終わりではない。いくら測定精度を上げてもそれに応じて小数点以下の数字はいくらでも現れてくる。つまり$\sqrt{2}=1.41421……$という循環しない無

限小数になる。この数は二つの整数A、Bの比（分数B/A）の形で表すことができず、このような数を一般に無理数と呼ぶ。これに対し二つの整数の比で表される数を有理数と呼ぶ。整数は分母が1の分数と考え、有理数の一種になる。この二つの数により整数の間のすき間は連続的に完全に埋められた。

さていま無限小数ということばが出てきたがこの無限という概念は古代から人々の関心をひいていたようである。それを示すひとつの例に有名なゼノンのパラドックスがある。アキレス（ギリシア神話の英雄）が自分より1スタジアン（ギリシア時代の長さの単位約160メートル）前を歩いている亀を10倍の速さで追いかけるとする。アキレスが1スタジアン走り初め亀がいた位置までくると亀は1/10スタジアン前に行っている。次にアキレスが1/10スタジアン走るとその間に亀は1/100スタジアン前に行ってしまう。この論法を繰り返していくとアキレスはいつまでたっても亀に追いつけない！というパラドックスである。これに対する説明は昔から多くの学者が試みているが、これに限らず一般に無限という概念は数学の発展のなかで重要な役割を果たしてきた。ワイルという数学者は「もし数学を表す短い標語は何かと聞かれたら、それは無限を考える学問だ」と述べている。ここで再び話を数の分類にもどそう。有理数と無理数により数を連続的に埋めたのはよかったのだが、これでもまだ不十分なことが生じてきた。それはたとえば$x^2=1$というような簡単な方程式すら解けないことである。そこで二乗が-1になる数を導入し、これを虚数と名づけた。これに対して今までの数（有理数と無理数）を実数と呼ぶ。実数と虚数をまとめて複素数と呼び、これが現在私たちがもっている数の世界である。この章では初めに数えるというごく身近な作業から話を始め、いろいろな計算の例を通して数の興味深かい性質を紹介していこう。

自然数

この章の初めでは数とは何だろうかと問うことはしない。ここではむしろどうやって数を表し計算を行うのかを考えてみよう。私たちは子供のときから数を表すのにアラビア数字0、1、2、3、4、5、6、7、8、9を使っているために、数とこのアラビア記号を同一視しているきらいがある。

しかし人間は読み書きできるようになるずっと以前から数を数え、計算していたのである。古代メソポタミヤやエジプト文明の出土品からも暦の作成、収穫物の管理、土地の分割、税の取り立てなどに必要な数の表し方や計算の技術がかなり進歩していたことがわかる。

遊牧生活から農耕生活を基盤とした国家が形成されて行きつつある時代はまだ数を使うといってもその必要性はそれほど大きくはなかっただろう。重要なことといえばおそらく家畜の群の大小を比較することぐらいであったろう。それには袋に入った小石を使うような簡単な数の表し方で十分である。家畜一頭ごとに袋の小石を置いて行けば、計算もしやすくなる。

二つの袋を一緒にすると二つの数の和になる。逆に二つの袋から一個ずつ小石を取り出していき、やがて片方の袋がからになったとすれば、もう一方の袋に残っている小石により二つの数の差を表すことができる。

かけ算とわり算はたし算とひき算をくり返せばできるし、他の程度の高い計算(対数とかベキ計算)もこの四則演算に帰着できるので、時間はかかるかもしれないが小石による方法で必ず答を出すことができるはずである。しかし時間を節約してなるべく能率よく計算しようと思うと、いろいろな計算方法が必要になってくる。人間の歴史をながめてみると過去の人々が時間のむだをなくすためどんな工夫をして来たかがよくわかる。そこでいくつかの例を紹介しておこう。

貨幣の計算

有史以前には「ひとまとめにする考え方」を数の表し方や計算に使っている。これは現在私たちの貨幣制度にみられる。たとえば一個の百円硬貨は十個の十円硬貨をひとまとめにした金額と同じになるという考え方である。

ある金額を支払うのに硬貨の数が最小になるようにすると決めたとしよう(最小規定)。たとえば二十六円支払うのに十円一個、五円二個、一円六個などという使い方はしないことにする。

そうすると小石による方法よりもすばやく数の相対的な大小を比較することができる。つまり一番「大きな」硬貨の枚数によって決まるわけである。

たし算は二つの硬貨の組を一緒にし、最小規定に従って硬貨を両替えすればよいわけだ。ひき算は絵を使って説明しよう(図1)。左上の硬貨の組は図に示した順を経ていろいろな硬貨の組み合わせに変換できる。まず五十円硬貨をくずして十円硬貨をつくり、次にそれをくずして五円硬貨をつくり、最後に一円硬

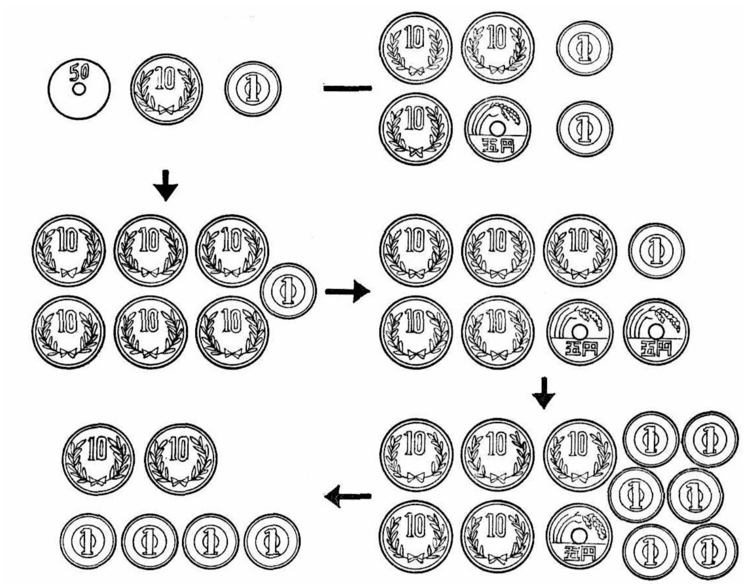


図1

貨をつくる。そうすれば右上の硬貨の組でひき算をするとき、各硬貨ごとに左上の組から右上の組をとり除くことができる。

もちろんかけ算とわり算もこの方法でできる。

たとえば十円硬貨を二十七倍するとしよう。その場合かけ算の定義に従ってこの硬貨の組み合わせのコピーを二十七枚かさねる。そしてさきほど述べた最小規定に従って硬貨を両替えすればよいわけである。つまり十円硬貨についていえば五個で五十円硬貨、十個で百円硬貨それぞれ一個に相当するわけだから結局十倍を二回、五倍と二倍をそれぞれ一回ずつ行ってそれらをすべて合計することになる（図2）。

このようにしてとにかく計算はできるわけだが、どうもまどろっこしくてあまりすばやい方法とはいえそうもない。

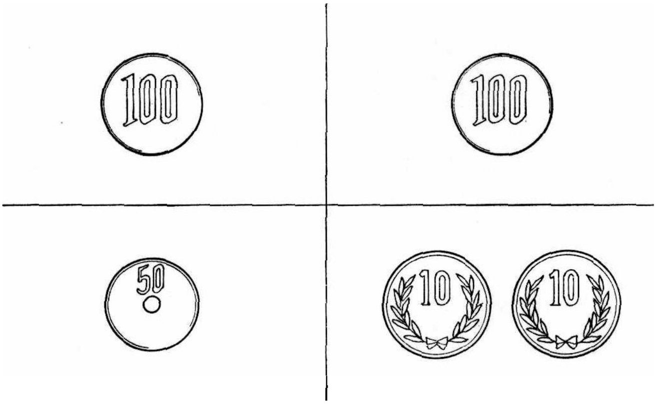


図2

そろばんの考え方

図3に示すように一枚の板を縦に区切る。そして一番右の列に小石を一個置くと1、二番目の列に小石を一個置くと5、三番目に一個置くと 5×5=25、四番目は 5×25=125、……となるよう約束する。また各列に五個小石を置くとそれは左隣りの列に一個小石を置いたのと同じことだとする。これを五進法という。

さてこうすると図はいくつの数を表していることになるだろうか？ そう1136である。

ここで二つの数の計算を考えてみよう。図4に示すように横に線を引いて、線の上に一つの数、下にもう一つの数を表す。

まずたし算は簡単である。横に引いた線を取り除き、五進法の約束に従って小石を左隣りに移せばよい。

ひき算はこう簡単にいかない。二つの数を区別するために引く方の数(横線の下の数)を穴のあいた小石で表すことにする(図5)。各列ごとに二種類の小石を相殺すると図6のようになることがわかる。次に右から四番目の列に一個残っている穴なしの小石を五進法の約束に従って逆に右側の列にもどしてやると図7になる。

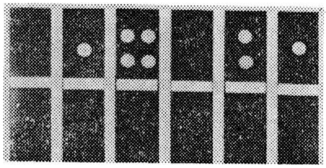


図3

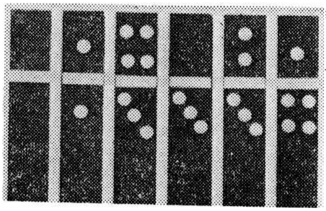


図4

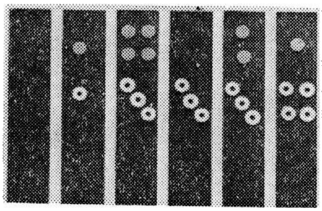


図5

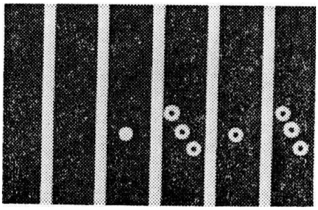


図6

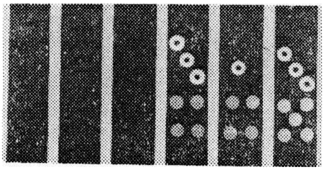


図7

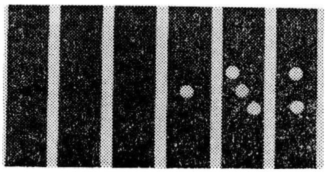


図8

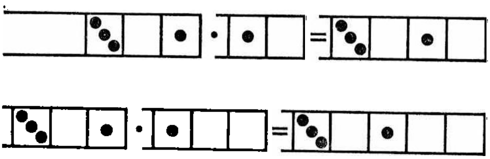


図9

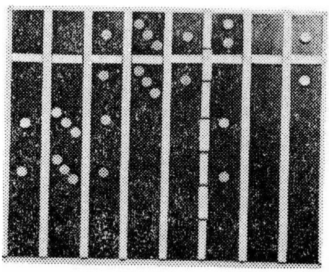


図10

ここでもう一度二種類の小石（穴あきと穴なし）の相殺を行えばひき算が完了というわけである(図8)。

次にかけ算を考えてみよう。五進法のそろばんではある数の五倍を計算するのは簡単である。たとえば図9のようになるのはすぐわかる。これを理解しておけばかけ算の一般的な計算はすぐできる。図10を見てほしい。横線の上にかけられる数（縦の破線の左側）とかける数（破線の右側）が示してある。横線の下、破線の左側にはかける数を分解(今の場合三個の小石に)して各小石ごとにかけ算した結果が示されている。最後にこの三つの数をたせば結局答として図11になる。

五進法のそろばんがよくわかれば、数の表し方とその計算がきわめて簡単な規則に従い、完全に自動的に行えることに、もはや驚かないことと思う。現在使われているハイスピードのコンピュータは電気素子を用いてこれを実行しているわけである。

ローマ時代に使われていたそろばん(図12)も当時はその計算の速さでずい分威力を発揮し、商業を通じローマに莫大な富をもたらす力となった(ローマ数字は筆算には適していなかった)。

もっともローマのそろばんはいま説明した五進法のそろばんほど取り扱いが簡単ではない。縦に線が入った板でできており、線には数を表す玉がはめられている。図12は1977＝*MDCCCCLXXVII* を表している。

この線そろばんは十七世紀までヨーロッパで実際に使われていた。ローマ時代にはいわゆる溝そろばんも使われていた。これは溝に数を表す玉を入れ、それを動かして計算した。おそらくこれが今日まだ使われている中国や日本のそろばんの起源だろうと思われる。

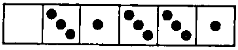


図11

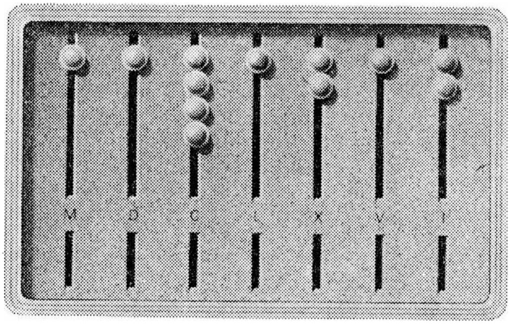


図12

インド人の遺産

古代のそろばんから十進法のインド・アラビア数字が登場するまではそれほど長い道のりだったわけではないが、それでも歴史的にみてやはり何世紀かの時間がかかった。

現在私たちが使っている数字とよく似た数を表す記号を最初に使ったのはインド人である。ただしゼロは紀元後六〇〇年ごろやっと発見された。およそ八〇〇年ごろアラビア人がインドの数字を変形して今日私たちが使っているインド・アラビア数字を作ったわけである。

計算機

たし算、ひき算、かけ算、わり算を機械的に操作し自動化しようという努力はコンピュータの出現により達成された。そろばんもたしかに熟達した人にとってはたいへん便利な計算の道具といえるが、今日手軽に手に入る電卓には計算のスピードまた便利さを考えるととてもかなわない。

電卓は単に計算操作がはやく簡単にできるというだけでなく、工夫しだいでいろいろな可能性をひき出

せるところにむしろその有用性があるといえる。また私たちのまわりを見わたしてみれば、いろいろなところで使われていることに気づくだろう。プログラムのできる電卓も最近は登場しており、これなどはスポーツたとえばヨットの進路をわり出すのに使われているし、ゲーム遊びを楽しむのに使われている。

さて基本的な算術操作によって面倒臭い計算をやろうと思うとき、まずあらかじめ長い計算をどういう手順で進めて行くかをよく考えておく必要がある。つまりプログラムをつくらねばならない。そこでコンピュータを使う場合には次の三つの点が重要になってくる。

1 複雑な課題をコンピュータ計算に適した簡単な操作に直すこと。

2 計算過程全体をチェックし

3 出て来た結果を評価、判断すること。

電卓についていくつかの例をあげこの三点を考えてみることにしよう。同じ計算を行う場合でも電卓の能力に応じて演算のやり方が異なってくる。たとえば円錐台の体積

$$V=\frac{\pi h}{3}(r_1{}^2+r_1r_2+r_2{}^2)$$

（r_1は底円の半径、r_2は上円の半径、hは円錐台の高さ）を考えてみよう。r_1、r_2、hの値を電卓に入れて体積を求めるわけだが、カッコ内の和を計算する場合、使用する電卓にメモリーがあるかないかで計算操作が違ってくる。もしメモリーがなく途中の計算結果をいちいち書きとめておくのが面倒だと思ったらどうすればよいだろうか？　そのためにはちょっとみにくいかもしれないが式を次のように書き変えてみる。

$$V=((((((r_1+r_2)\cdot r_1):r_2)+r_2)\cdot r_2)\cdot\pi\cdot h):3$$

ここで：は割り算の意味である。

こうすると数値の代入と演算操作を交互に行えばそのまま答が得られる。つまりカッコを内側から外側に順に取りはらって行くのである。もう少し見やすく書けば結局体積の式を

$$V=\left(\frac{(r_1+r_2)r_1}{r_2}+r_2\right)\cdot r_2\cdot\frac{\pi h}{3}$$

としたのである。

ところでこの式をよくみると一つ演算がよけいなことがわかる。r_2で割る操作がそれである。しかし、これによって途中の計算結果を計算機が記憶しないでもすむようにしてあるわけである。

もっとも最近はメモリーを備えつけた電卓が手ごろな値段で売り出されているので、このようなやっかいな操作を考える必要はなくなってきた。

たとえば「逆ポーランド法」と呼ばれる演算操作を行う電卓がある。これは初めに二つの数値を入れ、その後で演算ボタンを押すというやり方である。この方法を使う計算機はたいていメモリーも豊富なので計算がたいへん便利になる。

分配則 $(a+b)(c+d)$ を考えてみよう。まずaの値を入れ、次にbの値を入れ(このときaは隣のメモリーに移される)、＋のボタンを押すと$a+b$の値がしるされる。今度は同じようにcとdの値を入れ（cを入れると$a+b$が、次にdを入れるとさらにcが順に隣のメモリーへと移されて行く)、＋のボタンを押すと$c+d$の