シュヴァルツ

解析学 7

微分方程式
ヒルベルト空間
補足・フーリエ級数

京都大学助教授
小針晛宏 訳

東京図書株式会社

シュヴァルツ

解析学 7

微分方程式
ヒルベルト空間
補足・フーリエ級数

小針晛宏 訳

東京図書株式会社

編 集 委 員

東京大学教授 齋 藤 正 彦
早稲田大学教授 小 島 順
京都大学助教授 小 針 晛 宏
京都大学教授 森 毅
東京大学教授 清 水 英 男

シュヴァルツ解析学 7

微分方程式・ヒルベルト空間・フーリエ級数 ¥1400

1971年3月9日 第1刷発行
1978年10月20日 第2刷発行

Printed in Japan

著 者 L. シュヴァルツ
訳 者 小 針 晛 宏
発行所 東京図書株式会社

東京都文京区水道2-5 カキビル
振替東京4-13803 電話(814)7818〜9

3341-2107-5160

Laurent Schwartz

COURS D'ANALYSE

I, II

HERMANN

Paris 1967

序

しばしば語られて来たように，物理学者や技術者のための《涙なしの数学》は存在しない．現代の物理学者や技術者は，莫大な量の，しかも広大な領域にわたっての数学的知識を必要とする．だから，これら数学の《利用者》にとって，必要なすべての結果を，完全な証明つきで習得することは，もはや絶対に不可能である．ところが，数学では，一つ一つの結果に厳密な証明を付けることが通念となっている．したがって，数学の教程は，つぎの二つのうちのどちらかを選ばざるを得ない．一つは短い教程で，ほんの少しの結果をきちんと証明する．こうすると，数学の学生は満足するだろうが，物理の学生は満足しないだろう．もう一つはやはり短い教程で，結果は豊富だが，証明はごく概略だけ付けるか，またはまったく省略してしまう．この場合には，読者のデカルト精神がまったく満たされないことになるだろう．

そこで，我々はこのどちらとも異なる第三の道を選んだ．私は長い教程，非常に長い教程を作った．それは定理をふんだんに含み，しかも，それらすべてに原則として完全な証明が付けてある．したがって，これは本来の意味での教程というよりはむしろ一冊の本，参考図書である．この教程を実際に講義するときには，その要約だけしか話すひまがないと思う．学生諸君は，したがって，この本全部を義務的に学ぶ必要はない．その都度明確に指示される必須部分だけを学べばよい．必須部分は，たくさんの結果と少しの証明とから成っている．

そのかわり，学生諸君は，この本で出会う新しい考えかたや構造をすべて理解

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

しなければならない．また，諸定理とその精神とを知らなければならない．さらに，習得した定理が楽々と使いこなせるようにならなければならない．これは思ったほどやさしいことではない．もし，定理に述べられていることの意味を一度も深く考えなかったとしたら，たとえ本を見ながらでも，その定理をすぐに使いこなすことは絶対に不可能である．

必須と指示した証明は，すべてもっとも教育的でしかももっとも特徴的なものばかりである．

しかし，学生諸君は，必須でない部分からも，自分の好みに一番よく合ったところを選んで勉強することができるし，しかも私はそれを強くすすめる．その際，講義担当者や私自身に相談するとよい．我々は，諸君に助言を与えることを切に望んでいるのである．こうすることによって，いろいろな好みの学生，いろいろな学力水準の学生が，ひとしく満足を得ることになるだろう．その結果，本校（Ecole Polytechnique）の同学年の学生が，人によってそれぞれ別々の部分を深く学んだことになれば大変結構なことであろう．

ロラン・シュヴァルツ

訳 者 序

本書は，Laurent Schwartz 著

«*Cours d'analyse*» (1967)

の全訳である．これは，シュヴァルツ教授の Ecole Polytechnique での解析学の講義の教程として書かれた．

原書は全二巻の仮綴本であるが，訳書は全7巻に分けた．訳書の構成はつぎのとおりである．

第1巻	集合・位相	Ch. 1	集　合
		Ch. 2	位　相
第2巻	微分法	Ch. 3	微分法
第3巻	積分法 上	Ch. 4	積分法
第4巻	積分法 下	Ch. 4	積分法（つづき）
第5巻	外微分法	Ch. 6	外微分法
第6巻	複素関数	Ch. 7	複素関数
第7巻	微分方程式	Ch. 5	微分方程式
	ヒルベルト空間	Ch. 22	ヒルベルト空間
	フーリエ級数	App.	フーリエ級数

読者への注意

1. 欄外の注意記号 ☡（危険な曲り角）は，そこが重大な誤りを犯しやすい箇所であることを示す.
2. 記号〖——〗は，反復を避けるための略記号である．たとえば，«A〖A′〗ならば B〖B′〗である» は，«A ならば B であり，A′ ならば B′ である» を意味する.
3. 訳者の補注は原注と同じ脚注の形とし，最後に［訳注］と断りを入れた.

目　　次

記 号 表

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com

第7章　微分方程式

§1. 問題の位置

つぎの形の微分方程式は何を意味するのだろうか．

(1.1) $$\vec{y'} = \vec{\mathrm{L}}(x,\ y)$$

実数直線 $\mathbf{R}$ の開，半開，または閉区間 $|a,\ b|$[*]，ノルムのついたアフィン空間 F[**] の開 Ω，および $|a, b| \times \Omega$ から $\vec{\mathrm{F}}$ への連続写像 $\vec{\mathrm{L}}$ を与えるとき，$|a, b|$ 上で定義され，Ω に値をとり可導な関数 $f: y = f(x)$ で，その導関数を $\vec{f'}$ で表わすと，恒等式：

(1.2) $$\vec{f'}(x) \equiv \vec{\mathrm{L}}(x,\ f(x))$$

を満たすようなものが，あるかどうかを探す．合成関数の定理によって，このことは必然的に関数 $\vec{f'}$ が連続であることを意味し，したがって関数 f は可導であるばかりではなく，連続的に可導であることになる．

このような関数 f は，この**微分方程式の解**，または**積分**と呼ばれる．

F が空間 $\mathbf{R}^n$ であるような特別の場合には，関数 f を与えることは，n 個のスカラー値関数の系 $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n$ を与えることと同値である．また写像 $\vec{\mathrm{L}}$ は，$x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ を変数とする，n 個のスカラー値連続関数の系 $\mathrm{L}_1,\ \mathrm{L}_2,$

---

*) $a,\ b$ は $-\infty,\ +\infty$ でもよいが，そのとき $|a,\ b|$ はこれら[***] を含まない．$|a,\ b| \subset \mathbf{R}$ だが $\overline{\mathbf{R}}$ ではないのである．

**) F は実または複素数体上のアフィン空間だが，$|a,\ b|$ はつねに $\mathbf{R}$ の区間であり，$\vec{f'}(x)$ は導ベクトルで $\vec{\mathrm{F}}$ の元である．$\mathbf{R}$ のかわりに，ノルムのついたアフィン空間 E を代入すると，全微分方程式となり，その性質は非常に異なってくる．E が複素数体の場合は，第二半期で学ぶことになろう．

***) $\pm\infty$ の無限遠点のこと．［訳注］

$\cdots$, L_n と同値であり，この微分方程式は《微分方程式系》

(1.3)
$$\begin{cases} y_1' = \mathrm{L}_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n) \\ y_2' = \mathrm{L}_2(x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = \mathrm{L}_n(x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n) \end{cases}$$

と同値である．このような微分方程式系の積分または解は，つぎの恒等式を満足する n 個のスカラー値関数の系 $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n$ である：

(1.4)　$f_i'(x) \equiv \mathrm{L}_i(x,\ f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x)),\qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n.$

上記の微分方程式は，1階の導関数だけにしか関係しないという意味で，一階である．もちろん，より高階の方程式を考えることもできるが，それらは一階の方程式に帰着できる．

たとえば，つぎの微分方程式を考えよう：

(1.5)
$$\overrightarrow{y^{(p)}} = \mathrm{L}(x,\ y,\ \overrightarrow{y'},\ \overrightarrow{y''},\ \cdots,\ \overrightarrow{y^{(p-1)}}).$$

ここで $|a,\ b|$ は実数直線の区間，F はノルムのついたアフィン空間，$\mathscr{U}$ は F $\times\ \vec{\mathrm{F}}^{p-1}$ の開，そして $\vec{\mathrm{L}}$ は $|a,\ b| \times \mathscr{U}$ から $\vec{\mathrm{F}}$ への連続写像である．$|a,\ b|$ 上で定義され，F の値をとり，p 回可導で，$|a,\ b|$ の任意の点 x に対して，点 $(f(x),\ \overrightarrow{f'}(x),\ \cdots,\ \overrightarrow{f^{(p-1)}}(x))$ が $\mathscr{U}$ 内にあって，つぎの恒等式が成立つような関数 f を探す：

(1.6)
$$\overrightarrow{f^{(p)}}(x) \equiv \mathrm{L}(x,\ f(x),\ \overrightarrow{f'}(x),\ \cdots,\ \overrightarrow{f^{(p-1)}}(x))$$

そこで，

(1.7)
$$f = g_0,\qquad \overrightarrow{f'} = \vec{g}_1,\qquad \cdots,\qquad \overrightarrow{f^{(p-1)}} = \vec{g}_{p-1}$$

とおこう．f を求めることは，微分方程式系，

(1.8)
$$\begin{cases} \vec{g}_0' = \vec{g}_1 \\ \vec{g}_1' = \vec{g}_2 \\ \cdots\cdots \\ \vec{g}_{p-2}' = \vec{g}_{p-1} \\ \vec{g}_{p-1}' = \mathrm{L}(x,\ g_0,\ \vec{g}_1,\ \cdots,\ \vec{g}_{p-1}) \end{cases}$$

を満たす関数系 $g_0,\ \vec{g}_1,\ \vec{g}_2,\ \cdots,\ \vec{g}_{p-1}$ を求めることと，確かに同値である．ところでこの系は，現在までわれわれが考えてきた系と類似の微分方程式であることは，まったく明らかであり，空間 F が積 F $\times\ \vec{\mathrm{F}}^{p-1}$ に，開 Ω が $\mathscr{U}$ におきかえられているに過ぎない．そこで $(y_0,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{p-1}) = z$ とおくと，単に微分方程式：

(1.9)　$\vec{z}' = \vec{\mathscr{L}}(x, z)$　ただし $z = g(x) = (g_0(x), \vec{g}_1(x), \cdots, \vec{g}_{p-1}(x))$

を解くことになる．ここで $\mathscr{L}$ は $|a,\ b| \times \mathscr{U}$ から $\vec{\mathrm{F}}^p$ への写像

$$(x, (y_0, \vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_{p-1})) \mapsto (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_{p-1}, \mathrm{L}(x, y_0, \vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_{p-1}))$$

である．

われわれはつねに，考えている微分方程式は正規，つまり最高階の導関数に関して解ける，と仮定してきた．実際にはこの形に解けるとは限らない．そのことから多くの困難がでてくるし，特に，解がなかったり，与えられた初期条件に対して多くの解があったりする．これからやろうとしている理論的な定理では，方程式はいつでも最高階の導関数に関して解かれていて，したがって最終的には (1.1) の形におけるもの，と仮定しよう．

このような方程式の解に対して，区間 $|a, b|$ の一点 x_0 での，解 f の値 y_0 を与えることを，**コーシーの条件**と呼び，簡単のため《コーシーの条件 x_0, y_0》と言う．(1.4) の形の p 階の微分方程式を解くに当って，今しがた指摘してきたように，これが (1.1) の形に帰着することを考慮すると，コーシーの条件は $x = x_0$ に対して，関数 $z = g(x)$ の値 $z_0 = (y_0, y_1, \cdots, y_{p-1})$ を与えることになる．つまり区間 $|a, b|$ の点 x_0 での，関数 f および 1, 2, …, $p-1$ 階の導関数の値を与えることになる．

関数 $\vec{\mathrm{L}}$ に関するある種の条件を使って，微分方程式 (1.1) は，与えられたコーシーの条件に対応して，一つただ一つの解をもつことを証明しよう．

§ 2. 存在と一意性の定理

いくつかの定義をしよう：

$|a, b|$ に含まれる有界区間 $\mathrm{J} = |x_0 - \alpha,\ x_0 + \beta|$, α, $\beta > 0$, および Ω に含まれる，中心 y_0, 半径 R（有限または無限 > 0）の閉球 B は，$x_0 \in |a, b|$, $y_0 \in \Omega$ において，つぎのとき $\vec{\mathrm{L}}$ に対する**安全区間**と**安全球**を構成していると言う：有限または無限の数 $\mathrm{M} \geqslant 0$ があって，一方では $\|\vec{\mathrm{L}}(x, y)\|$ が積 $\mathrm{J} \times \mathrm{B}$ 上で M を上界とし，他方では不等式 $\alpha \leqslant \dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{M}}$, $\beta \leqslant \dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{M}}$ が成立する*)．安全区間と安全球の系は常に存在する．というのは，関数 $\vec{\mathrm{L}}$ は連続と仮定されているのだから，$\vec{\mathrm{L}}$ が $\mathrm{J}_1 \times \mathrm{B}$ で有界なような区間 $\mathrm{J}_1 : |x_0 - \alpha_1,\ x_0 + \beta_1|$ と，中心 y_0, 半径

*) この章では例外的に，場合によっては $\mathrm{R} = +\infty$ となることも認めよう．そのとき $\mathrm{B} = \mathrm{F}$ となるが，このときも B は中心 y_0 の球と呼びつづけよう．この場合 $\mathrm{M} = +\infty$ ととれるし，このとき α, β は何でもよいが，有限（J は有界でなければならない）とする．x_0 が区間 $|a, b|$ の下限 a〚上限 b〛であるような，例外的な場合には，安全区間は $[a,\ a + \beta|$, $\beta > 0$〚$|b - \alpha,\ b]$, $\alpha > 0$〛の形となる．このような区間が，$|a, b|$ での x_0 の近傍であるということが重要なのである．この例外的な場合については，再び語るまい．読者が時に応じて必要な適応をすればよい．

R の球 B を選ぶことができる．$J_1 \times B$ での $\|\vec{L}(x,\ y)\|$ の上界を M とする．α, β を $\alpha=\mathrm{Inf}\left(\alpha_1,\ \dfrac{R}{M}\right)$, $\beta=\mathrm{Inf}\left(\beta_1,\ \dfrac{R}{M}\right)$ と定義し，区間 J : $|x_0-\alpha,\ x_0+\beta|$ ととると，J, B は問題に応えている．

もちろん，何かの理由から必要とあれば，R より小さい数 R' を代置することもできるが，その時 R' を一旦選ぶと，R' から出発して新たに α', β' が定まる．そこで，J, B が安全系だとして，$J' \subset J$, $B' \subset B$ としても，J', B' は必ずしも安全系とは限らない．けれども J', B ならよい．

ところで $\vec{L}$ はつぎのとき，$|a,\ b| \times \Omega$ で y について**局所リプシッツ連続**であると言う： $|a,\ b|$ の任意の x_0 および Ω の y_0 に対して，これらの点の近傍 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ および数 $k \geqslant 0$, があって，

$$x \in \mathscr{A},\quad y_1 \in \mathscr{B},\quad y_2 \in \mathscr{B}\quad \text{に対して}$$

$$\|\vec{L}(x,\ y_1)-\vec{L}(x,\ y_2)\| \leqslant k\|\vec{y}_1-\vec{y}_2\| \tag{2.1}$$

が成立つ．x_0, y_0 が与えられたとき，前に述べたように安全区間 J と安全球 B を定めることができるが，この場合，さらに $\vec{L}$ が $J \times B$ で y についてリプシッツ連続であるように，つまり $x \in J$, $y_1 \in B$, $y_2 \in B$ に対して (2.1) が成立するようにすることができる．

局所解の存在と一意性

定理 1 (コーシー)．　(1.1) の微分方程式が与えられていて，$\vec{L}$ は $|a,\ b| \times \Omega$ から $\vec{F}$ への連続写像で，y について局所リプシッツ連続で，$\vec{F}$ は完備とする．そのとき，コーシーの条件 x_0, y_0 が与えられ，$J \times B$ で $\vec{L}$ が y についてリプシッツ連続であるような，x_0, y_0 についての，安全区間 J と安全球 B が与えられると，微分方程式は，与えられたコーシーの条件 $f(x_0)=y_0$ を満足し，J で定義され，$f(J) \subset B$ となるような解 f を，ただ一つもつ．

証明．　初期条件のついたこの微分方程式を，同値な積分方程式でおきかえよう．というのは，f をこの微分方程式の解で，初期条件 $f(x_0)=y_0$ を満たしている可導な関数とすると，f と $\vec{L}$ は連続だから，合成関数の定理によって，$x \longmapsto \vec{L}(x,\ f(x))$ は連続であり，この関数の原始関数である f は不定積分であり，連続関数で，つぎの積分方程式の解であると言える：

$$f(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}\vec{L}(\xi,\ f(\xi))d\xi. \tag{2.2}$$

逆に f が連続でこの積分方程式の解なら，この右辺は可導で，その導関数は $x \longmapsto \vec{L}(x,\ f(x))$ であり，したがって f は微分方程式の解であると言える．また，確かに $f(x_0)=y_0$ である．

J から B への連続有界写像の作る距離空間 $(B^J)_{cb}$ を E とし，E の一つの元を f と

しよう．f から始めて，J で定義され F の値をとる関数 g を，つぎの式で構成しよう：

(2.3) $$g(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}\vec{\mathrm{L}}(\xi,\ f(\xi))d\xi.$$

安全な球と区間の選び方によって，この関数は実際 F 内ではなく，安全球 B 内に値をとる．というのは，つぎの優評価が成立するから：

(2.4) $$\begin{aligned}\|\overrightarrow{g(x)-y_0}\| &\leqslant |x-x_0|\sup_{\xi\in\mathrm{J}}\|\vec{\mathrm{L}}(\xi,\ f(\xi))\| \\ &\leqslant |x-x_0|\sup_{\substack{\xi\in\mathrm{J}\\ \eta\in\mathrm{B}}}\|\vec{\mathrm{L}}(\xi,\ \eta)\|\leqslant\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{M}}\mathrm{M}=\mathrm{R}.\end{aligned}$$

こうして E のすべての元 f に対して，E の他の元 g を対応させたから，$g=\Phi(f)$ とおいて，E から E への写像 Φ を定義しよう．われわれが解こうとしている積分方程式は，そうすると方程式，

(2.5) $$f=\Phi(f)$$

と同値である．

この方程式が一つただ一つの解をもつことを示すために，全く単純に，不動点定理を適用しうる状況にあることを示そう（第2章の定理 56）．

まず，E は完備な距離空間である．というのは B は，完備と仮定された F 内で閉だから，第2章の定理 52 によってこれは完備であり，したがって第2章の定理 77 の系 2 によって $(\mathrm{B}^{\mathrm{J}})_{cb}$ は完備である．

そこで Φ が E の縮小写像であるかどうかを考えよう．

$u\in\mathrm{E},\ v\in\mathrm{E}$ に対してつぎが成立つ：

(2.6) $$\begin{aligned}\|\vec{\mathrm{L}}(\xi,\ u(\xi))-\vec{\mathrm{L}}(\xi,\ v(\xi))\| &\leqslant k\|\overrightarrow{u(\xi)-v(\xi)}\| \\ &\leqslant kd(u,\ v)\qquad \text{ただし}\ \xi\in\mathrm{J};\end{aligned}$$

(2.7) $$d(\Phi(u),\ \Phi(v))\leqslant\mathrm{Sup}\,(\alpha,\ \beta)kd(u,\ v)$$

なぜなら $|x-x_0|\leqslant\mathrm{Sup}\,(\alpha,\ \beta)$ だから．ところで，これは確かにリプシッツの関係式であるが，リプシッツの係数は必ずしも <1 ではないから，Φ は必ずしも縮小写像ではない．けれども球 B を選んだあとで，区間 J をもっと小さい区間 J_0 に，$\alpha,\ \beta$ を $\mathrm{Max}\,(\alpha_0,\ \beta_0)<\dfrac{1}{k}$ となるような，もっと小さい $\alpha_0,\ \beta_0$ に，それぞれおきかえて，Φ を縮小写像にすることができる*)．けれどもそれは不必要であり，J，B をどんなふうに選んでも，縮小写像であるような Φ の巾（べき）がいつでも存在することを見よう．実際，E の任意

---

*) 言明を少し修正することによって，この点については完全に満足することもできる：$\mathrm{J}\times\mathrm{B}$ の上で $\vec{\mathrm{L}}$ がリプシッツ連続であるような，どんな安全系 J，B をとっても，ただ一つの解がある，と言うかわりに，ただ一つの解があるような安全系 $\mathrm{J}_0\times\mathrm{B}$ が一つ存在する，と言明すれば十分である．

微分方程式の理論だけしか考えないのならば，修正されたこの言明は完全に満足なものである．というのはいずれにせよ定理3は，解をその最大存在区間にひろげることを保証しているから．

けれども近くの理論（積分方程式）では，解の断片ではなく，大域解を一挙に探すことが不可欠であり，このような言明に制限することは許されない．他方区間 J を，その中での逐次近似法が，解を与える限りできるだけ大きくとっておくと，つねに便利である．

の二元 u, v をとり，Φ のつぎつぎの巾（べき）による像を構成しよう．$u_0=u$, $u_1=\Phi(u_0)$, $\cdots$, $u_n=\Phi(u_{n-1})$, $\cdots$ および $v_0=v$, $v_1=\Phi(v_0)$, $\cdots$, $v_n=\Phi(v_{n-1})$, $\cdots$ とすると，つぎの優評価が成立つ：

$$\|\overrightarrow{u_1(x)-v_1(x)}\| \leqslant |x-x_0|kd(u_0,\ v_0). \tag{2.8}$$

$$\overrightarrow{u_2(x)-v_2(x)}=\int_{x_0}^{x}(\vec{\mathrm{L}}(\xi,\ u_1(\xi))-\vec{\mathrm{L}}(\xi,\ v_1(\xi)))d\xi, \tag{2.9}$$

したがって

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u_2(x)-v_2(x)}\| &\leqslant \int_{|x_0,x|}k\|\overrightarrow{u_1(\xi)-v_1(\xi)}\|d\xi \\ &\leqslant k^2d(u_0,\ v_0)\int_{|x_0,x|}|\xi-x_0|d\xi=\frac{(x-x_0)^2}{2}k^2d(u_0,\ v_0).\end{aligned} \tag{2.10}$$

容易に一般式が導ける．

つぎの優評価が証明されたと仮定しよう：

$$\|\overrightarrow{u_{n-1}(x)-v_{n-1}(x)}\| \leqslant \frac{|x-x_0|^{n-1}}{(n-1)!}k^{n-1}d(u_0,\ v_0). \tag{2.11}$$

同じ優評価が u_n-v_n に対しても成立することを示す．実際つぎが成立つ：

$$\overrightarrow{u_n(x)-v_n(x)}=\int_{x_0}^{x}(\vec{\mathrm{L}}(\xi,\ u_{n-1}(\xi))-\vec{\mathrm{L}}(\xi,\ v_{n-1}(\xi)))d\xi \tag{2.12}$$

したがって

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u_n(x)-v_n(x)}\| &\leqslant \int_{|x_0,x|}k\|\overrightarrow{u_{n-1}(\xi)-v_{n-1}(\xi)}\|d\xi \\ &\leqslant k^nd(u_0,\ v_0)\int_{|x_0,x|}\frac{|\xi-x_0|^{n-1}}{(n-1)!}d\xi=\frac{|x-x_0|^n}{n!}k^nd(u_0,\ v_0).\end{aligned}$$

だから Φ の巾（べき） Φ^n は

$$d(\Phi^n(u),\ \Phi^n(v)) \leqslant \frac{(\mathrm{Sup}\,(\alpha,\ \beta))^n}{n!}k^nd(u,\ v) \tag{2.13}$$

を満たしている．

ところで十分大きな n に対しては，必然的に

$$\frac{(\mathrm{Sup}\,(\alpha,\ \beta))^n}{n!}k^n<1$$

となるが，これは対応する Φ の巾（べき） Φ^n が E の縮小写像であることを示している．だから第2章の定理 56 につづく注意によって，逐次近似法が有効であり，Φ には不動点がただ一つある，ということになるがこれは，微分方程式 (1.1) の解の存在と一意性を証明している．今示したばかりの優評価はさらに，解 f を逐次近似法で決定すると，解がつぎの級数で表現されることを示している．

$$\begin{cases} f=f_0+(f_1-f_0)+(f_2-f_1)+\cdots+(f_n-f_{n-1})+\cdots \\ f_n(x)=y_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x}\vec{\mathrm{L}}(\xi,\ f_{n-1}(\xi))d\xi \end{cases} \tag{2.14}$$

および優評価，

$$|||\overrightarrow{f_n-f_{n-1}}||| \leqslant \frac{(\mathrm{Sup}\,(\alpha,\ \beta))^{n-1}}{(n-1)!}k^{n-1}|||\overrightarrow{f_1-f_0}||| \tag{2.15}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com