数学演習講座

2

行列と行列式

行列と行列式

大阪市立大学教授・理学博士
浅　野　啓　三
大阪市立大学助教授・理学博士
永　尾　汎

秋月康夫
功力金二郎
佐々木重夫
福原満洲雄
吉田耕作
編　集

数学演習
講　座
2

共立出版株式会社

版権所有
共立出版之印
共立出版株式会社

数学演習講座 2（全 15巻） ©

行列と行列式　　定価 350円

昭和31年10月20日 初版1刷発行
昭和37年8月20日 初版10刷発行

著者 浅野啓三
永尾汎

発行者 南條初五郎
東京都千代田区神田駿河台3—9

印刷者 片岡義郎
東京都中央区越前堀2-22

発行所 東京都千代田区神田駿河台3—9 共立出版株式会社 電話(291)7121番(代表) 振替東京57035

印刷 共立印刷K.K.　製本 中條製本所工場　Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会員

序

本書はさきに基礎数学講座「行列と行列式」で講述した事項に関する演習書である．行列と行列式に関する理論は線型代数学の主要事項をなすものであるが，最近の数学では線型代数学の占める比重が増大したから，数学の研究入門としても，工科方面での理論的な研究においても，この理論の重要性が強調される次第である．この点を考慮して，問題を選ぶに当っては，単なる演習問題はなるべく少数にとどめ，基本的概念の明確な理解に役立つもの，数学の他の分野とも関連して有用であるものを重視した．

基礎数学講座「行列と行列式」にしたがって，全体を四つの章に分け，各章ごとに主要事項を要項としてまとめ，その基礎の上に立って適当な問題を例題として詳解した．演習問題は紙面の許す限り数多く集め，読者の便宜を考慮して〔A〕,〔B〕の2種類に分けた．〔A〕は初めて学ぶ読者の練習用ともいうべきもので，要項に挙げた定理や例題で述べたことの直接の応用として，比較的容易に解けるもの，〔B〕は若干の技巧を要するもの，多少程度の高い興味ある問題を集めた．なお，講座「行列と行列式」では触れ得なかった事項で，興味多いと思われるものを問題として随所に収めて，講座の補遺となるようにした．また，問題の種類を多くすることによって，全体としてある程度辞典的な性格をもつようにに心掛けた．これは，そのようなものとして利用されることが少なくないと考えたからである．

1956 年 9 月

著者しるす

目　　　　次

第1章 行列式

要　項

1・1 ベクトル，行列

Kを与えられた体，すなわち加減乗除の四則が可能な領域とする.*

定　義　順序づけられたn個のKの元の組

$$\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n\}\quad (a_i\in K,\ i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n)$$

をKにおける**n項のベクトル**といい，$a_1,\ a_2,\cdots\cdots,a_n$をその**組成分子**という.

n項のベクトル$\{a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n\}$と$\{a_1',\ a_2',\cdots,\ a_n'\}$は，$a_i=a_i'\ (i=1,\ 2,\cdots,\ n)$のとき，そのときに限り相等しいものとする．ベクトルを一つの文字で示す場合には，$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$,……などを使う.

定　義　ベクトルの加法，減法，ベクトルとKの元との積をつぎのように定める.

$$\mathfrak{a}=\{a_1,\ a_2,\cdots\cdots,\ a_n\},\qquad \mathfrak{b}=\{b_1,\ b_2,\cdots\cdots,\ b_n\}$$

であるとき，

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\{a_1+b_1,\ a_2+b_2,\cdots\cdots,\ a_n+b_n\}$$
$$\mathfrak{a}-\mathfrak{b}=\{a_1-b_1,\ a_2-b_2,\cdots\cdots,\ a_n-b_n\}$$
$$c\mathfrak{a}=\mathfrak{a}c=\{ca_1,\ ca_2\cdots\cdots,\ ca_n\}$$

定　義　ベクトル$\{0,\ 0,\cdots\cdots,\ 0\}$を**零ベクトル**といい，簡単のため0で示す.

定　義　n個のn項のベクトル

$$\{1,\ 0,\cdots\cdots,\ 0\},\ \{0,\ 1,\ 0,\cdots\cdots,\ 0\},\ \cdots\cdots,\ \{0,\cdots\cdots,\ 0,\ 1\}$$

をn項の**単位ベクトル**といい，それぞれ$\mathfrak{e}_1,\ \mathfrak{e}_2,\cdots\cdots,\ \mathfrak{e}_n$で示す．ただし，1は$K$の単位元とする.

単位ベクトルを使えば，

$$\mathfrak{a}=\{a_1,\ a_2,\cdots\cdots,\ a_n\}=a_1\mathfrak{e}_1+a_2\mathfrak{e}_2+\cdots\cdots+a_n\mathfrak{e}_n$$

となる.

定　義　mn個のKの元を縦（上下）がm個で横（左右）がn個の長方形の形に配置したものを，**$(m,\ n)$型の行列**といい，行列を構成する各元を行列の**組成分子**という．特

* たとえば，実数の全体や複素数の全体など.

に，(n, n) 型の行列を **n 次の正方行列**または，単に，**n 次の行列**という．

行列は通例つぎのように書き表わす．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1·1}$$

これをしばしば (a_{ik}) $(i=1, 2, \cdots\cdots, m; k=1, 2, \cdots\cdots n)$ と略記する．i が上から下への番号を示し，k が左から右への番号を示すことを明示するために，

$$(a_{ik}) \ (i\downarrow 1, 2, \cdots\cdots, m; \ k\to 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

と書くこともある．

定　義　行列 (1·1) において，横（左右）の並列を**行**といい，縦（上下）の並列を**列**という．また，一つの行からできるベクトル $\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{in}\}$ を**行ベクトル**といい，列からできるベクトル $\{a_{1k}, a_{2k}, \cdots\cdots, a_{mk}\}$ を**列ベクトル**という．

(m, n) 型の行列は m 個の行と n 個の列を有する．a_{ik} は第 i 行と第 k 列との交叉するところにある組成分子で，これを行列の (i, k) **組成分子**という．

行列を一つの文字で示す場合には，A, B, C, ……などをもってする．

定　義　列ベクトル（したがってまた行ベクトル）が単位ベクトル e_1, e_2, ……, e_n になる n 次の行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 1 \end{pmatrix}$$

を**単位行列**とよび，E で示すことが多い．次数が n であることを明示するときは，E_n と書く．

注意　行列記法における両端の括弧は，配置にまとまりをつけるためのものにすぎない．印刷上の都合などで，丸い括弧の代わりに角の括弧や2本棒などを使って，行列を

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

などと書くこともある．近時は2本棒を使うことが多い．本書ではこれらの記号を混用する．

1・2 行列式の定義

行列式は次数の低いものから順次帰納的に定義される．

定　義　一次の行列の行列式は，組成分子そのものとする．二次の行列$(a_{ik})(i, k=1,2)$の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

とする．一般に，$n-1$ 次の行列について，すでに行列式が定義できたとき，n 次の行列 $A=(a_{ik})(i,\ k=1,\ 2, \cdots\cdots,\ n)$ の行列式 D をつぎのように定義する．

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13} - \cdots\cdots + (-1)^{n-1} a_{1n}D_{1n} \qquad (1 \cdot 2)$$

ここに D_{1k} は A の第1行及び第 k 列をとり去ってできる $n-1$ 次の行列の行列式である．すなわち，

$$D_{1k} = \begin{vmatrix} a_{21} \cdots\cdots a_{2,k-1} & a_{2,k+1} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots\cdots a_{n,k-1} & a_{n,k+1} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

D を $|a_{ik}|$ $(i,\ k=1,\ 2, \cdots\cdots,\ n)$ または $|A|$ または $\det A$ と略記することもある．

定理　1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots\cdots\cdots a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n2} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

系　1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots\cdots a_{nn}$$

系　2　単位行列の行列式は1に等しい．

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & 1 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 1 \end{vmatrix} = 1$$

定　義　自然数 1, 2, ……, n の順列 p_1, p_2, ……, p_n において，$i<k$ でかつ $p_i>p_k$ となるような自然数の組 (p_i, p_k) が現われるとき，すなわち p_i の後にそれよりも小さい番号 p_k が出るとき，この順列に**転位**があるという．転位の数が偶数（0を含める）になる順列を**偶順列**，奇数になる順列を**奇順列**という．

定　義　1, 2, ……, n の順列 p_1, p_2, ……, p_n の転位の個数を r とするとき，

$$\mathrm{sgn}\,(p_1,\ p_2, \cdots\cdots,\ p_n)=(-1)^r$$

と定義し，これを順列 p_1, p_2, ……, p_n の符号という．

$$\mathrm{sgn}\,(p_1,\ p_2, \cdots\cdots p_n)=\begin{cases}+1 & (p_1,\ p_2, \cdots\cdots,\ p_n \text{ が偶順列のとき})\\ -1 & (p_1,\ p_2, \cdots\cdots,\ p_n \text{ が奇順列のとき})\end{cases}$$

となる．

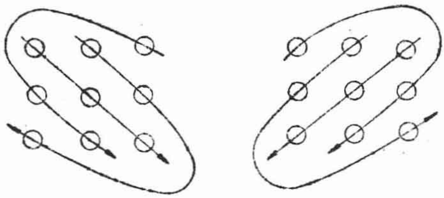
行列式の定義により，三次の行列式について

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

となる．

これは，右の図のように，左方に矢で示すようにとって作った積の和から，右方に矢で示すようにとって作った積の和を引いたものである．



一般に，つぎの定理がなりたつ．

定理　2　n 次の行列 $A=(a_{ik})$ $(i,\ k=1,\ 2, \cdots\cdots,\ n)$ の各行，各列から一つずつ組成分子をとってそれらの積 $a_{1p_1}\ a_{2p_2}\cdots\cdots a_{np_n}$ を作る．ここに $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$ は 1, 2, ……, n の順列とする．A の行列式 D はつぎのようになる．

$$D=\sum \mathrm{sgn}\,(p_1,\ p_2, \cdots\cdots,\ p_n)\ a_{1p_1}\ a_{2p_2}\cdots\cdots a_{np_n} \tag{1·3}$$

ここに $\sum$ は $n!$ 個の順列全部の上にわたる和を示す．この式はまたつぎの形に整頓することもできる．

$$D=\sum \mathrm{sgn}\,(p_1,\ p_2, \cdots\cdots,\ p_n)\ a_{p_11}a_{p_22}\cdots\cdots a_{p_nn} \tag{1·4}$$

定　義　行列式 D に含まれる項 $a_{11}a_{22}\cdots\cdots a_{nn}$ を行列式の**主項**という．

注意　行列 A の行列式の定義として，(1·3) または (1·4) の式を使うこともできる．

行列式を(1・2)の式を使って，帰納的に定義するとき，それが組成分子の多項式として(1・3)または(1・4)の形に整頓できることが証明されるわけであるが，(1・3)または(1・4)をもって行列式の定義とする場合には，それから逆に(1・2)の関係が証明されるのである.

1・3 行列式の基本的性質

定 義 体 K における n 個の変数 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$ の函数が

$$f(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n)=c_1u_1+c_2u_2+\cdots\cdots+c_nu_n$$

の形をなすとき，$u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$ の齊次一次式という．ただし，$c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$ は定数とする.

定理 3 行列 A の一つの列〔行〕，たとえば第 k 列〔第 i 行〕を除いて他の列〔行〕を任意に固定し，第 k 列〔第 i 行〕の文字のみを変数と見れば，行列式 D は A の第 k 列〔第 i 行〕の組成分子の齊次一次式である.

定理 4 行列式の一つの列〔行〕の組成分子が 0 ばかりならば，その行列式の値は 0 に等しい.

定理 5 行列式の一つの列〔行〕の各組成分子に同一の元 t を掛けると，行列式の値が t 倍される.

たとえば

$$\begin{vmatrix} ta_1 & b_1 & c_1 \\ ta_2 & b_2 & c_2 \\ ta_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=t\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ta_2 & tb_2 & tc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=t\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

定理 6 行列式の一つの列〔行〕の各組成分子が同数（m 個）の元の和であるときは，行列式は和の各項を順次その列〔行〕においてできる m 個の行列式の和に等しい.

たとえば

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1'+a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2+a_2'+a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3+a_3'+a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+a_2' & b_2+b_2' & c_2+c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

定理 7 行列 A の列ベクトル〔行ベクトル〕を $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_n$ で示し，A の行列式を $D(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_n)$ と書けば，

$$D(\mathfrak{a}_1\cdots\cdots,\ \mathfrak{a}_{k-1},\ \sum_{\nu=1}^{r} t_\nu \mathfrak{a}_k^{(\nu)},\ \mathfrak{a}_{k+1},\cdots\cdots,\ \mathfrak{a}_n)$$
$$=\sum_{\nu=1}^{r} t_\nu D(\mathfrak{a}_1,\cdots\cdots,\ \mathfrak{a}_{k-1},\ \mathfrak{a}_k^{(\nu)},\ \mathfrak{a}_{k+1},\cdots\cdots,\ \mathfrak{a}_n)$$

定理 8 行列式の二つの列〔行〕が一致すれば，行列式の値は0に等しい．

定理 9 行列式の一つの列〔行〕の各組成分子に同一の元 t を掛けて，それを他の列〔行〕の同位置の組成分子に加えても，行列式の値は変わらない．

たとえば

$$\begin{vmatrix} a_1+c_1t & b_1 & c_1 \\ a_2+c_2t & b_2 & c_2 \\ a_3+c_3t & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+a_1t & b_2+b_1t & c_2+c_1t \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

定理 10 行列式の二つの列〔行〕を交換すれば，行列式の値は符号だけ変わる．

定理 11 行列式の列〔行〕を入れかえて，もとの $p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots,\ p_n$ 番目の列〔行〕がそれぞれ $1,\ 2,\cdots\cdots,\ n$ 番目の列〔行〕にくるようにするとき，$p_1,\ p_2,\cdots\cdots,p_n$ が偶順列ならば行列式の値は変わらないが，奇順列ならば行列式の値は符号だけ変わる．

定義 $(m,\ n)$ 型の行列

$$\|a_{ik}\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots\cdots a_{mn} \end{matrix} \right\| \quad (i\downarrow 1,\ 2,\cdots\cdots,\ m;\ k\rightarrow 1,\ 2,\cdots\cdots,\ n)$$

の行と列を入れかえてできる $(n,\ m)$ 型の行列

$$\|a_{ki}\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{matrix} \right\| \quad (i\downarrow 1,\ 2,\cdots\cdots,\ n;\ k\rightarrow 1,\ 2,\cdots\cdots,\ m)$$

をもとの行列の**転置行列**という．

定理 12 n 次の行列とその転置行列とは，同じ行列式を有する．すなわち

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots\cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots\cdots a_{n2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 13 $x_{ik}(i,\ k=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n)$ を n^2 個の独立な文字とすれば，行列式 $|x_{ik}|$ は n^2 個の文字の多項式として既約（因数分解不能）である．ただし，多項式の係数は一つの体に属するものとする．

1・4 行列式の特徴づけ

$f(A)$ を変数が体 K における n 次の行列 $A=(a_{ik})$ で，K に属する値をとる函数とする．すなわち，$f(A)$ は K における n 次の行列のおのおのにそれぞれ一意的に K の元を対応させるような函数である．これは n^2 個の変数 a_{ik} の函数にほかならないが，また，A の n 個の列ベクトル〔行ベクトル〕を順に $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_n$ として，n 個のベクトル $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_n$ の函数と見ることもできる．

$$f(A)=f(a_{11}, \cdots\cdots, a_{ik}, \cdots\cdots, a_{nn})=f(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_n)$$

定理 14 n 次の行列 $A=(a_{ik})$ の函数 $f(A)$ がつぎの性質をもつとする．

I．A の n 個の列〔行〕の中の一つ，たとえば第 k 列〔第 i 行〕を除いて他の列〔行〕を任意に固定し，$f(A)$ を第 k 列〔第 i 行〕の組成分子のみの函数と見れば，$f(A)$ は齊次一次式である．

II．A の相隣る二つの列〔行〕が一致すれば，$f(A)$ の値は 0 になる．

III．A が単位行列 E になれば，$f(A)$ の値は 1 になる．

$$f(E)=1$$

しかるときは

$$f(A)=\det A=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

注意 A の行列式は明らかに上記の三性質を有する函数であり，行列式はこの三つの性質によって完全に特徴づけられる．

定理 15 n 次の行列 $A=(a_{ik})$ の函数 $f(A)$ がつぎの性質をもつとする．

I．A の n 個の列〔行〕の中の一つ，たとえば第 k 列〔第 i 行〕を除いて他の列〔行〕を任意に固定し，$f(A)$ を第 k 列〔第 i 行〕の組成分子のみの函数と見れば，$f(A)$ は齊次一次式である．

II．A の相隣る二つの列〔行〕が一致すれば，$f(A)$ の値は 0 になる．

しかるときは

$$f(A)=c\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

ここに c は定数で，$c=f(E)$．

定理 15 はつぎのように一般化される.

定理 16 （定理 15 の拡張）$(m,\ n)$ 型の行列〔$(n,\ m)$ 型の行列〕

$A=(a_{ik})$ $(i\downarrow 1,\ 2,\cdots\cdots,\ m;\ k\rightarrow 1,\ 2,\cdots\cdots,\ n)$〔$(i\downarrow 1,\ 2,\cdots\cdots,\ n;\ k\rightarrow 1,\ 2,\cdots\cdots,\ m)$〕の函数 $f(A)$ がつぎの性質をもつとする.

I. 行列 A の n 個の列〔行〕の中の一つ，たとえば第 i 列〔行〕を除いて他の列〔行〕を任意に固定し，$f(A)$ を第 i 列〔行〕の組成分子のみの函数と見れば，齊次一次式である.

II. A の相隣る二つの列〔行〕が一致すれば，$f(A)$ の値は 0 になる.

しかるときは，

$m<n$ ならば，$f(A)$ は恒等的に 0 になる.

$m=n$ ならば，$f(A)=c\,|a_{ik}|$ （c は定数）

$m>n$ ならば，$f(A)=\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)} c_{i_1i_2\cdots\cdots i_n} D_{i_1i_2\cdots\cdots i_n}$ 　$(i_1<i_2<\cdots\cdots<i_n)$

ここに，$D_{i_1i_2\cdots\cdots i_n}$ は A の第 $i_1,\ i_2,\cdots\cdots,\ i_n$ 行〔列〕をそれぞれ第 1, 2,……n 行〔列〕とする，n 次の行列式で，$c_{i_1i_2\cdots\cdots i_n}$ は定数である．また，$(i_1,\ i_2,\cdots\cdots,\ i_n)$ は $\binom{m}{n}$ 個の組合わせ全部の上にわたる.

定理 17 　n 次の行列 $A=(a_{ik})$ の函数 $f(A)$ がつぎの性質をもつとする.

1)　A の一つの列〔行〕の各組成分子を t 倍すると，$f(A)$ の値が t 倍される.

2)　A の一つの列〔行〕に他の列〔行〕を加えても，$f(A)$ の値は変わらない.

しかるときは

$$f(A)=c\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots\cdots a_{nn}\end{vmatrix}\quad (c=f(E))$$

系 　n 次の行列 $A=(a_{ik})$ の函数 $f(A)$ がつぎの性質をもつとする.

1)　A の一つの列〔行〕の各組成分子を t 倍すると，$f(A)$ の値が t 倍される.

2)　A の一つの列〔行〕に他の列〔行〕を加えても，$f(A)$ の値は変わらない.

3)　　　$f(E)=1$

しかるときは

$$f(A)=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots\cdots a_{nn}\end{vmatrix}$$

注意 　行列式は上記の三性質によっても特徴づけられる.

1·5 余 因 子

定 義 n 次の行列 (a_{ik}) $(i, k=1, 2, \cdots\cdots, n)$ の第 i 行及び第 k 列をとり去ってできる $n-1$ 次の行列の行列式を D_{ik} とするとき，$(-1)^{i+k}D_{ik}$ を (i, k) 組成分子 a_{ik} の余因子という．

a_{ik} の余因子を $\tilde{a}_{ik}$ で表わすことにする．

注意 余因子では符号 $(-1)^{i+k}$ がたいせつである．これはつぎのようになる．

$$\begin{array}{cccccc} + & - & + & - & + & \cdots\cdots\cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots\cdots\cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots\cdots\cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots\cdots\cdots \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{array}$$

定理 18 行列 $A=(a_{ik})$ $(i, k=1, 2, \cdots\cdots, n)$ の行列式 D はつぎのように表わされる．

$$D=a_{i1}\tilde{a}_{i1}+a_{i2}\tilde{a}_{i2}+\cdots\cdots+a_{in}\tilde{a}_{in} \tag{1·5}$$

$$D=a_{1k}\tilde{a}_{1k}+a_{2k}\tilde{a}_{2k}+\cdots\cdots+a_{nk}\tilde{a}_{nk} \tag{1·6}$$

注意 行列式 D は，第 i 行の組成分子 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{in}$ について整頓すると，

$$D=a_{i1}P_{i1}+a_{i2}P_{i2}+\cdots\cdots+a_{in}P_{in}$$

となる．ここに $P_{i1}, P_{i2}, \cdots\cdots, P_{in}$ は a_{jk} $(j\neq i,\ 1\leqq j\leqq n,\ 1\leqq k\leqq n)$ の多項式で，$a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{in}$ には全然無関係である．このとき P_{ik} がちょうど a_{ik} の余因子 $\tilde{a}_{ik}$ に等しくなるのである．行列式 D は，また，第 k 列の組成分子 $a_{1k}, a_{2k}, \cdots\cdots, a_{nk}$ について整頓すると，

$$D=a_{1k}Q_{1k}+a_{2k}Q_{2k}+\cdots\cdots+a_{nk}Q_{nk}$$

となる．ここに $Q_{1k}, Q_{2k}, \cdots\cdots, Q_{nk}$ は a_{ij} $(j\neq k,\ 1\leqq i\leqq n,\ 1\leqq j\leqq n)$ の多項式で，$a_{1k}, a_{2k}, \cdots\cdots, a_{nk}$ には全然無関係である．この Q_{ik} がまた a_{ik} の余因子 $\tilde{a}_{ik}$ に等しくなるのである．

定理 19
$$a_{i1}\tilde{a}_{j1}+a_{i2}\tilde{a}_{j2}+\cdots\cdots+a_{in}\tilde{a}_{jn}=\begin{cases}0 & (i\neq j \text{ のとき}) \\ D & (i=j \text{ のとき})\end{cases} \tag{1·7}$$

$$a_{1k}\tilde{a}_{1l}+a_{2k}\tilde{a}_{2l}+\cdots\cdots+a_{nk}\tilde{a}_{nl}=\begin{cases}0 & (k\neq l \text{ のとき}) \\ D & (k=l \text{ のとき})\end{cases} \tag{1·8}$$

1・6 連立一次方程式の解，Cramer の公式

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}\right\} \tag{1·9}$$

を n 個の未知数 x_1, x_2, $\cdots\cdots$, x_n を含む連立一次方程式とする．ただし，文字は体 K の元を示すものとする．未知数の係数を組成分子とする行列式を D とする．

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 20 $D\neq 0$ ならば，(1.9) はただ1組の解を有する．D の第 k 列を b_1, b_2, $\cdots\cdots$, b_n で置きかえた行列式を

$$D_k=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots \overset{k}{\widehat{b_1}}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots\cdots b_2\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots b_n\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \quad (k=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n)$$

とすれば，解は

$$x_k=\frac{D_k}{D} \quad (k=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n) \tag{1·10}$$

となる．

この n 元連立一次方程式の解の公式 (1.10) を **Cramer の公式**という．

定理 21 連立一次方程式

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{array}\right\} \tag{1·11}$$

が $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=0$ 以外に解を有するため必要かつ十分な条件は

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

となることである．

1・7 ベクトルの独立性と行列式

この小節で取り扱うベクトルは，体 K の元を組成分子とする n 項のベクトルとする．n は一定の自然数である．

定 義 r 個のベクトル $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_r$ に対して，少なくとも一つが0と異なる K の元 $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_r$ が存在して

$$c_1\mathfrak{a}_1+c_2\mathfrak{a}_2+\cdots\cdots+c_r\mathfrak{a}_r=0$$

となるとき，$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_r$ は**一次的に従属である**または**一次従属である**という．

定 義 ベクトル $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_r$ が一次従属でないとき，**一次的に独立である**または**一次独立である**という．

一次独立であるとは，いいかえれば

$$c_1\mathfrak{a}_1+c_2\mathfrak{a}_2+\cdots\cdots+c_r\mathfrak{a}_r=0 \ (c_i \in K, \ i=1, \ 2, \cdots\cdots, \ r)$$

ならば，必ず $c_1=0, \ c_2=0, \cdots\cdots, \ c_r=0$ となることである．

定 義 ベクトル $\mathfrak{a}$ とベクトル $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_r$ の間に

$$\mathfrak{a}=c_1\mathfrak{a}_1+c_2\mathfrak{a}_2+\cdots\cdots+c_r\mathfrak{a}_r \ (c_i \in K, \ i=1, \ 2, \cdots\cdots, \ r)$$

のような関係があるとき，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_r$ の**一次的結合**または**一次結合**という．

定理 22 r 個のベクトル $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_r$ の一次結合よりなる $r+1$ 個以上のベクトルは一次従属である．

系 n 項のベクトルを $n+1$ 個以上とれば，それらは必ず一次従属である．

定理 23 ベクトル $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_r$ が一次独立で，$\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_r$ が一次従属ならば，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_r$ の一次結合として表わされる．その表わし方は一意的である．

系 1 $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_r$ が一次独立で，$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_r$ の一次結合でなければ，$\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_r$ は一次独立である．

系 2 n 個の n 項のベクトル $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_n$ が一次独立ならば，任意の n 項のベクトルは $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_n$ の一次結合として一意的に表わされる．

定理 24 $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_n$ を n 個の一次独立な n 項のベクトルとする．r 個の n 項のベクトル $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{b}_r$ $(r<n)$ が一次独立ならば，$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots \mathfrak{a}_n$ の中から適当に $n-r$ 個をえらび，これを $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{b}_r$ につけ加えて，それら n 個のベクトルが一次独立になるようにすることができる．

定理 25 n 個の n 項のベクトル