常微分方程几何理论与分支问题

张锦炎

北京大学出版社

常微分方程几何理论与分支问题

张 锦 炎

北京大学出版社

内　容　简　介

本书不仅包括平面自治系统与稳定性理论初步，而且还较系统地阐述了不少学科所需要的常微分方程分支理论。全书共分九章，有：基本定理、二维系统的平衡点、二维系统的极限环、动力系统、振动方程与生态方程、n维系统的平衡点、Hopf分支、从闭轨分支出极限环、高维问题。

本书可作为高等学校数学系高年级及研究生教材或教学参考书，也可供物理、化学、生物等有关方面科学技术工作者参考。

常微分方程几何理论与分支问题

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
850×1168毫米 32开本 8.5印张 215千字
1981年7月第一版 1981年7月第一次印刷
印数：1—16000册

统一书号：13209·15　定价：1.25元

序　言

编写本书的目的是希望提供一本包括平面自治系统与稳定性理论初步，以及分支问题的教材。

在平面自治系统与稳定性部分，本书力图做到深入浅出，使凡掌握数学分析、线性代数与常微分方程的读者都能顺利阅读。第四章中抽象动力系统的一些基本概念(如导算子、流等)，既是后面部分章节所需要的，又是进一步研究一般动力系统的基础。因此，希望读者能熟练掌握。第五章中除了传统的非线性振动方面的应用之外还编入了在生态学方面的应用。常微分方程在生物学中的应用是极其广泛的，生态学中的应用只不过是其中的一个方面，我们介绍它是希望通过它引起读者对这类问题的兴趣。

常微分方程分支理论是不少学科所需要的，但至今国内尚未有一本书较系统地阐述过这方面的内容。本书整理了 Hopf 分支问题现有文献中的两种主要方法，即 Friedrich 方法和后继函数法；另外作者采用 Liapunov 第二方法建立了分支问题与失稳现象的联系。在分支问题部分把这三种方法同时介绍给读者，希望在掌握了这些之后就能够阅读有关问题的近代文献并从事研究工作。

当然这些都只是作者的愿望。由于水平有限，缺点错误一定不少，欢迎读者批评指正。

此书稿曾作为选修课的讲义，于1979年度在北京大学数学系进修班和研究生中讲授过，并且还在部分教师讨论班中报告过。因此，书稿的编写过程中，讨论班的同志们与选修课的同学们曾提出多方面的宝贵意见，特此表示感谢。

张　锦　炎

1980年8月于北京大学

目　录

第一章 基本定理

本章作为以后各章的基础，介绍微分方程的解的一些基本性质。初读本书时，也可以先弄清各定理的条件与结论，而把证明留待以后需要时再细读。

为方便起见，我们常采用向量与矩阵的符号。

设 R^n 是 n 维欧氏空间，x 是 R^n 中的向量。

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

若 $x,y\in R^n$，

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

则向量 x 与 y 的和或差，向量 x 与数 α 的乘积定义如下：

$$x\pm y=\begin{pmatrix} x_1\pm y_1 \\ x_2\pm y_2 \\ \vdots \\ x_n\pm y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha x=\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

向量 x 与 y 的**内积**用符号$\langle x,y\rangle$表示，内积定义为：

$$\langle x,y\rangle=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

用符号 $|x|$ 表示 x 的**模**,模定义为:

$$|x| \equiv \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

不难检验内积有性质:

1. 对称性 $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
2. 双线型 $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;
   $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;
3. 正定的 $\langle x, x\rangle \geqslant 0$;
   $\langle x, x\rangle = 0$, 当且仅当 $x = 0$;
4. 有 Schwartz 不等式

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant |x| \cdot |y|.$$

模有性质:

1. $|x| \geqslant 0$; $|x| = 0$, 当且仅当 $x = 0$;
2. $|\alpha x| = |\alpha||x|$;
3. $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (三角不等式)。

很自然的, R^n 中两个向量 x 与 y 间的**距离**定义为:

$$|x-y|.$$

向量序列 $x_k (k=1,2,\cdots)$ 以向量 x_0 为**极限**的定义为:

$$|x_k - x_0| \to 0, \quad \text{当} \quad k \to \infty.$$

现在考虑自变量为实数 t, 在 R^n 中取值的向量函数 $\varphi(t)$。不难模仿一元函数的连续性、微商与定积分的定义给出向量函数的连续性、微商与定积分的定义。其实只要把一元函数的符号理解为向量函数的符号,把绝对值理解为模就可以了。

设 $\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是向量函数 $\varphi(t)$ 的分量,即

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}.$$

显然有下列结论:

1. $\varphi(t)$连续当且仅当$\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$都连续。

2. $\varphi(t)$的微商是向量函数，记作$d\varphi(t)/dt$或$\dot{\varphi}(t)$。并且有

$$\dot{\varphi}(t)=\frac{d}{dt}\varphi(t)=\begin{pmatrix}\frac{d}{dt}\varphi_1(t)\\ \frac{d}{dt}\varphi_2(t)\\ \vdots\\ \frac{d}{dt}\varphi_n(t)\end{pmatrix}.$$

3. $\varphi(t)$在区间$[t_0,t]$上的积分$\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)d\tau$是向量函数$\psi(t)$，即

$$\psi(t)=\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)d\tau=\begin{pmatrix}\int_{t_0}^{t}\varphi_1(\tau)d\tau\\ \int_{t_0}^{t}\varphi_2(\tau)d\tau\\ \vdots\\ \int_{t_0}^{t}\varphi_n(\tau)d\tau\end{pmatrix}.$$

4. 根据积分的定义与三角不等式，不难证明下列不等式：

$$\left|\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)d\tau\right|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|\varphi(\tau)|d\tau\right|. \tag{1}$$

这个不等式在下面的定理证明中常要引用。

下面来考虑自变量为R^n中的向量x，且取值也在R^n中的向量函数$g(x)$，即

$$g(x)=\begin{pmatrix}g_1(x)\\ g_2(x)\\ \vdots\\ g_n(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ g_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \vdots\\ g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{pmatrix}.$$

向量函数 $g(x)$ 连续，即 $g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 作为 x_1, $x_2,\cdots,x_n$ 的函数都连续。

我们称 $g(x)$ 在 R^n 中某区域 W 上是**李氏的**，如果存在一个常数 L，使得当 $x,y\in W$ 时，有

$$|g(x)-g(y)|\leqslant L|x-y|,$$

其中 L 称为 g 在 W 上的李氏常数。

例如，若向量函数在某凸集 W 上满足

$$\left|\frac{\partial g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_j}\right|\leqslant K \quad (i,j=1,2,\cdots,n),$$

K 是常数，则 $g(x)$ 在 W 上是李氏的。这是因为对 $g(x)$ 的第 i 个分量 $g_i(x)$ 有不等式

$$|g_i(x)-g_i(y)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial g_i(x+\theta(y-x))}{\partial x_j}\right||x_j-y_j| \quad (0<\theta<1).$$

因为 W 有凸性，所以当 $x,y\in W$ 时，$x+\theta(y-x)$ 在 W 内，于是由上不等式得

$$|g_i(x)-g_i(y)|\leqslant nK|x-y|.$$

再由模的定义得到：当 $x,y\in W$ 时

$$|g(x)-g(y)|\leqslant n^{3/2}K|x-y|,$$

而其中 $n^{3/2}K$ 是常数，所以 $g(x)$ 在 W 上是李氏的。

我们称 $g(x)$ 在 R^n 中某区域 W 上是**局部李氏的**，如果对于 W 的每一个点，存在该点的一个邻域 $W_0(W_0\subset W)$，使得 $g(x)$ 在 W_0 上是李氏的。

显然，若向量函数 $g(x)$ 在区域 W 上有 $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 都连续，则 $g(x)$ 在 W 上局部李氏。

最后，我们证明一个命题。

命题 若 $g(x)$ 在区域 W 上局部李氏，A 是 W 内的有界闭区域，则 $g(x)$ 在 A 上是李氏的。

证明 若结论不对，即对无论多大的正数 K，总存在 A 内的

x 与 y 使得

$$|g(x)-g(y)|>K|x-y|.$$

特别地，对自然数 n，存在 x_n 与 $y_n\in A$，使

$$|g(x_n)-g(y_n)|>n|x_n-y_n| \quad (n=1,2,\cdots). \qquad (*)$$

因 A 是有界闭区域 所以 x_n 与 y_n 有收敛子序列，不妨设就是 x_n 和 y_n，其极限在 A 内，即 $x_n\to x^*\in A$，$y_n\to y^*\in A$。

事实上有 $x^*=y^*$。因为对一切 n，有

$$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}|g(x_n)-g(y_n)|.$$

又由 $g(x)$ 在W上局部李氏可知，$g(x)$ 在 W 上连续。令 M 是$|g(x)|$ 在有界闭区域A上的最大值，于是有

$$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}\cdot 2M.$$

从而

$$|x^*-y^*|=\lim_{n\to\infty}|x_n-y_n|=0.$$

由假设，存在 x^* 的一个邻域 W_0，使得 $g(x)$ 在 W_0 上李氏，有李氏常数L。又存在N，使得当 $n\geqslant N$ 时 x_n，$y_n\in W_0$。于是当 $n\geqslant N$ 有不等式

$$|g(x_n)-g(y_n)|\leqslant L|x_n-y_n|.$$

当 $n>L$ 时，上面的不等式与($*$)不等式矛盾。

命题证完。

§1 微分方程解的存在性与唯一性

设 t 是时间变量，$t\in I$，I 是实数轴上的开区间，也可以是无穷区间。x 是 n 维向量，$x\in W$，W 是 n 维欧氏空间 R^n 中的区域，也可以是无界区域或全空间。

考虑微分方程

$$\dot{x}=f(t,x), \qquad (2)$$

其右端向量函数 $f(t,x)$ 在 $I\times W$ 上连续；又关于 x 在 W 上是局部李氏的，且有对 $t\in I$ 一致的李氏常数。

定理 1 对微分方程(2)，$t_0\in I$ 与 $x_0\in W$ 存在常数 $a>0$，使得在区间 $J=[t_0-a,t_0+a]$ 上有(2)的唯一解 $x=x(t)$，且连续并满足初条件

$$x(t_0)=x_0. \tag{3}$$

证明 分以下几步进行。

第一步，化微分方程(2)为等价的积分方程。设 $x=x(t)$ 是方程(2)满足条件(3)的解，即有

$$\dot{x}(t)\equiv f(t,x(t)). \tag{4}$$

并且 $x(t_0)=x_0$。把上式两边从 t_0 到 t 积分就得到

$$x(t)-x(t_0)=\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds.$$

即 $x(t)$ 满足积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds. \tag{5}$$

反之，若 $x(t)$ 满足(5)，则 $x(t)$ 满足微分方程(2)与条件(3)。

第二步，构造一个向量函数序列 $\varphi_k(t)$ $(k=1,2,\cdots)$。因为 W 是开的，对 $x_0\in W$，有 $b>0$，使闭球 $W_0\subset W$，其中

$$W_0=\{x\,|\,x\in R^n,\ |x-x_0|\leqslant b\}.$$

令 I' 是闭区间，$t_0\in I'\subset I$。设 M 是 $|f(t,x)|$ 在 $I'\times W_0$ 上的上界；L 是 $f(t,x)$ 关于 x 在 W_0 上的李氏常数(对 $t\in I'$ 一致)。令 $a>0$，$a<\min\{b/M,1/L\}$，又使区间 $J=[t_0-a,t_0+a]\subset I'$。

在区间 J 上按以下方法构造向量函数序列：令

$$\varphi_0(t)=x_0.$$

因 $\varphi_0(t)=x_0\in W_0\subset W$，所以可以令

$$\varphi_1(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_0(s))\,ds.$$

若 $\varphi_k(t)$ 已定义，并且 $\varphi_k(t)\in W_0$，即 $|\varphi_k(t)-x_0|\leqslant b$ $(t\in J)$，就可以令

$$\varphi_{k+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s))\,ds.$$

如果有 $\varphi_{k+1}(t)\in W_0\,(t\in J)$，序列就可以继续构造下去。而事实上，的确有

$$|\varphi_{k+1}(t)-x_0|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|f(s,\varphi_k(s))|\,ds\right|$$

$$\leqslant Ma<b.$$

即 $\varphi_{k+1}(t)\in W_0\,(t\in J)$。

注意，序列中的每一个向量函数 $\varphi_k(t)$ 都是 J 上的连续函数，并且在 W_0 内取值，又 $\varphi_k(t_0)=x_0$。

第三步，证明序列 $\varphi_k(t)$ 在 J 上一致收敛。令

$$K=\max_{t\in J}|\varphi_1(t)-\varphi_0(t)|.$$

于是当 $t\in J$ 时，有

$$|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}[f(s,\varphi_1(s))-f(s,\varphi_0(s))]\,ds\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|f(s,\varphi_1(s))-f(s,\varphi_0(s))|\,ds\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}L\,|\varphi_1(s)-\varphi_0(s)|\,ds\right|$$

$$\leqslant aLK.$$

若对某一个 $k\geqslant2$，当 $t\in J$ 时，有

$$|\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)|\leqslant(aL)^{k-1}K,$$

则当 $t\in J$ 时，有

$$|\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|f(s,\varphi_k(s))-f(s,\varphi_{k-1}(s))|\,ds\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}L\,|\varphi_k(s)-\varphi_{k-1}(s)|\,ds\right|$$

$$\leqslant aL(aL)^{k-1}K=(aL)^kK.$$

而 $aL=\alpha<1$，所以，对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使当 r，$s>N$ 时，对 $t\in J$ 有

$$|\varphi_r(t)-\varphi_s(t)|\leqslant\sum_{k=N}^{\infty}|\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)|$$

$$\leqslant\sum_{k=N}^{\infty}\alpha^k K<\varepsilon.$$

所以 $\varphi_k(t)$ 在 J 上一致收敛，记极限函数为 $x(t)$。显然 $x(t)$ 在 J 上连续，在 W_0 内取值，$x(t_0)=x_0$。

第四步，证明 $x(t)$ 满足积分方程(5)，从而是微分方程(2)的解。这只要在恒等式

$$\varphi_{k+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_k(s))ds$$

的两端令 $k\to\infty$ 取极限，再应用 $f(t,x)$ 对 x 的李氏性就得到

$$x(t)=x_0+\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_k(s))ds$$

$$=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))ds.$$

解的存在性证完，下面证明唯一性。

只要证明：如果在 J 上有 $x(t)$ 与 $y(t)$ 都是方程(2)的解，又

$$x(t_0)=y(t_0)=x_0,$$

则对一切 $t\in J$ 有

$$x(t)=y(t).$$

设 $Q=\max\limits_{t\in J}|x(t)-y(t)|$，且此最大值 Q 在闭区间 J 上的某一点 t_1 处达到。有

$$Q=|x(t_1)-y(t_1)|=\left|\int_{t_0}^{t_1}[\dot{x}(s)-\dot{y}(s)]ds\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t_1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|\,ds\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t_1} L\,|x(s)-y(s)|\,ds\right|\leqslant aLQ.$$

因为 $aL=\alpha<1$，所以 $Q=0$，于是在 J 上有 $x(t)=y(t)$。

定理证完。

§2 解的开拓

本节考虑解的开拓，所以我们设方程(2)右端的向量函数 $f(t,x)$ 对 t 的定义区间 I 为 $(-\infty,\infty)$。

定理1保证了局部区间 $J=[t_0-a,t_0+a]$ 上有方程(2)满足条件(3)的解存在，而区间 J 是闭的，所以这个解一定有一个比 J 更大的存在区间。因为，如果我们称区间 J 的右端点 t_0+a 为 t_1，又令 x_1 是解在 t_1 处的函数值：$x_1=x(t_1)=x(t_0+a)$。那么以 t_1,x_1 代替定理1中的 t_0 和 x_0，就得到一个正数 a_1，在区间 $J_1=[t_1-a_1,t_1+a_1]=[t_0+a_0-a_1,t_0+a_0+a_1]$ 上存在方程(2)的解 $y(t)$，满足条件 $y(t_1)=x_1$。这样一来，在区间 J 与 J_1 之交 $J\cap J_1$ 上先后得到两个解 $x(t)$ 与 $y(t)$，但它们在点 $t_1(\in J\cap J_1)$ 处相等，即 $y(t_1)=x(t_1)$。由解的唯一性，它们在整个区间 $J\cap J_1$ 上相等。这样就得到一个定义在 J 与 J_1 的并区间 $J\cup J_1$ 上的解，解原来的定义区间 J 向右开拓了。同样地，也可以向左开拓。所以解存在的区间比定理1中那个闭区间 J 要大。

解的定义区间有多么大呢？

引理 如果向量函数 $u(t)$ 与 $v(t)$ 都是方程(2)满足条件(3)的解，它们的定义区间的交是区间 $\overline{J}$，则在 $\overline{J}$ 上 $u(t)=v(t)$。

证明 由假设 $t_0\in\overline{J}$，$u(t_0)=v(t_0)\,(=x_0)$。

若引理的结论不对，即存在 $t_0'\in\overline{J}$ 使 $u(t_0')\neq v(t_0')$。不失一般性，设 $t_0<t_0'$。考虑 $\overline{J}$ 上的闭区间 $[t_0,t_0']$。用二分法构造区间套 $[t_n,t_n']$，$n=0,1,2,\cdots$，使 $u(t_n)=v(t_n)$；$u(t_n')\neq v(t_n')$。由区间套定理存在一点 $\overline{t}\in[t_n,t_n']$，$n=0,1,2,\cdots$，使 $\lim t_n=\lim t_n'=$

$\bar{t}$.因为解的连续性，由 $u(t_n)=v(t_n)$，得 $u(\bar{t})=v(\bar{t})$.并且由此得知 $\bar{t}\neq t'_0$，$\bar{t}<t'_0$。根据定理1，存在区间 $J=[\bar{t},\bar{t}+a]\subset\bar{J}$，使得在 J 上 $u(t)=v(t)$。这与 $t'_n>\bar{t}$，$t'_n\to\bar{t}$，$u(t'_n)\neq v(t'_n)$ 矛盾.

引理证完。

定义 方程(2)满足条件(3)的一切解的存在区间之并称为方程(2)满足条件(3)的**解存在的最大区间.**

由引理，解存在的最大区间上有唯一的一个解。另外，这个最大区间一定是一个开区间。这是因为，若此区间包含着自己的左或右端点，那么它就可以再开拓。所以今后常说**解存在的最大开区间.**

例1 考虑 R 上的微分方程

$$\dot{x}=x,$$

它满足条件 $x(t_0)=x_0$ 的解是

$$x=x_0e^{t-t_0}.$$

于是解存在的最大开区间是$(-\infty,\infty)$。

例2 考虑 R 上的微分方程

$$\dot{x}=1+x^2.$$

它满足条件 $x(0)=0$ 的解是

$$x=\operatorname{tg}t.$$

显然这个初值问题的解存在的最大开区间就是$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，是一个有限区间，虽然方程右端函数对一切 t 有定义。

什么情况下解存在的最大开区间不是整个数轴呢？

定理2 设 $y(t)$ 是方程(2)的满足条件(3)的解，它的最大开区间为$(\alpha,\beta)\neq(-\infty,+\infty)$，则对任一有界闭集 K，$K\subset W$，存在某个 $t\in(\alpha,\beta)$，使得 $y(t)\notin K$。

证明 无妨设 β 是有限数.我们来证明，存在某个 $t\in[t_0,\beta)$，使 $y(t)\notin K$。

若不然，有某个有界闭集K，使当$t\in[t_0,\beta)$时$y(t)\in K$。因为$f(t,x)$在$I\times W$上连续，所以存在$M>0$，使当$t\in[t_0,\beta]$，$x\in K$时$|f(t,x)|\leqslant M$。

首先证明：$y(t)$可以开拓为$[t_0,\beta]$上的连续函数。为此只要证明$y(t)$在$[t_0,\beta)$上是一致连续的。事实上，对$[t_0,\beta)$内任意t_1与t_2有

$$\left|y(t_1)-y(t_2)\right|=\left|\int_{t_1}^{t_2}\dot{y}(s)\,ds\right|$$
$$\leqslant\left|\int_{t_1}^{t_2}|f(s,y(s))|\,ds\right|$$
$$\leqslant M\,|t_2-t_1|。$$

所以$y(t)$在$[t_0,\beta)$上一致连续。定义$y(\beta)=\lim\limits_{t\to\beta}y(t)$，就得到$y(t)$在$[t_0,\beta]$上的连续开拓。

其次证明：开拓后的向量函数$y(t)$在$t=\beta$处可微。这是因为

$$y(\beta)=y(t_0)+\lim_{t\to\beta}\int_{t_0}^{t}\dot{y}(s)\,ds$$
$$=y(t_0)+\lim_{t\to\beta}\int_{t_0}^{t}f(s,y(s))\,ds$$
$$=y(t_0)+\int_{t_0}^{\beta}f(s,y(s))\,ds。$$

所以表达式

$$y(t)=y(t_0)+\int_{t_0}^{t}f(s,y(s))\,ds,$$

对一切$t,t\in[t_0,\beta]$成立。于是$y(t)$在β处可微，且

$$\dot{y}(\beta)=f(\beta,y(\beta))。$$

于是开拓后的$y(t)$是方程(2)在闭区间$[t_0,\beta]$上的解。由本节开始的讨论，$y(t)$可以开拓到$[t_0,\delta]$上，其中$\delta>\beta$。这与(α,β)是解存在的最大开区间矛盾。定理证完。