高等院校数学教材配套辅导用书

线性代数辅导及教材习题解析

同济四版

北京大学数学科学学院 李文 主编

◆ 突出考点 ● 例题精解精析
◆ 归纳题型 ● 内容涵盖教材
◆ 精练技巧 ● 方法易学实用

朝华出版社

高等院校数学教材辅导配套用书

线性代数辅导
及教材习题解析

同济四版

北京大学数学科学学院　李　文　主编
张同信　　赵修坤　　　李　欧　编委

朝華出版社

前　　言

同济大学应用数学系主编的《线性代数》第四版教材与第三版教材相比，更加符合教材改革精神，内容更加丰富，层次更加清晰，逻辑更加缜密，更加有利于学生学习和掌握。

为了使学生学好这本教材，我们特别邀请各方面的专家，对教材进行全面系统的研究、分析。总结出一套特别适合学生学习、掌握、提高的好方法，好经验编纂成书。

本书编写具有几个特点：一、画龙点睛，指出了每一节教材的学习目的要求，使学生学习做到心中有数，有的放矢。二、知识、内容表格化、网络化、提纲挈领，使同学们一目了然，一清二楚，便于学习和掌握数学本身的规律。三、题型集粹与解题方法技巧，是本书的精华，倾注了作者大量心血，我们把各种题型和解题方法、技巧集中起来，对同学们实行点对点、面对面的复习指导。同学们掌握了这些题型与解题方法、技巧，做题时就等于走了捷径，能起到事半功倍的效果，考试时不管试题如何变化总出不了这些范围，肯定能取得满意的成绩。四、本书有大量例题，对各知识点、考点进行了深入浅出的论述和分析，旁征博引，同学们务必仔细阅读、品味，做到明其精髓举一反三。五、本书又一特点是将知识点的讲解、分析与习题的解析与答案合二为一，编成一本书，这样更便于同学们的学习和使用，经济上也更实惠一些。六、本书与教材完全同步，全真课堂感受，真正做到了一书在手，辅导老师时常伴随着你。

在本书编写过程中，张同信、赵修坤老师发挥了很大的作用，耗费了大量心血，张进荒、谭青恒也做了很大贡献。同时我们也参阅了许多学者的著作。在此我们表示衷心地感谢。

作者于北京

2004 年 8 月

目　录

第一章　行列式

一、本章大纲目的要求

1. 会用对角线法则计算 2 阶和 3 阶行列式
2. 掌握 n 阶行列式的定义及性质
3. 了解代数余子式的定义及性质
4. 会利用行列式的性质及按行(列) 展开计算简单的 n 阶行列式
5. 掌握克拉默法则

二、本章基本内容

1. **全排列及其逆序数**

(1) 全排列：把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列.

(2) 逆序和逆序数：在一个排列$(i_1, i_2, \cdots\cdots i_s, \cdots\cdots i_n)$ 中，若 $i_t > i_s$，则称这两个数组成一个逆序.

一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数，记作 $t(i_1, i_2, \cdots\cdots, i_n)$，若 t 为奇数，则称$(i_1, i_2, \cdots\cdots, i_n)$ 为奇排列，若 t 为偶数，则称此排列为偶排列.

2. **n 阶行列式的定义**

(1) 定义：n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1 p_2 \cdots p_n)} (-1)^t a_{1_{p_1}} a_{2_{p_2}} \cdots a_n p_n$$

其中，$(p_1, p_2 \cdots p_n)$ 为自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数，求和符号 $\sum\limits_{(p_1 p_2 \cdots p_n)}$ 是对所有排列$(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 求和.

n 阶行列式 D 中所含 n^2 个数叫做 D 的元素，位于第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 叫做 D 的(i, j) 元.

(2) 二阶和三阶行列式适用对角线法则

(3) 由 n 阶行列式的定义可得到一些特殊行列式：

i) 上、下三角行列式等于主对角线上的元素之积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

ii) 对角行列式等于对角线元素之积，即

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

iii) 对角行列式(次对角)为

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \therefore & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

3. **对换**

(1) 定　义：在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续叫做对换，将相邻两个元素对换，叫做相邻对换.

(2) 定理 1：一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

推　论　奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

定理 2：n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots\cdots a_{p_n n}$$

其中 t 为行标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数

4. **行列式的性质**

(1) 性质 1　行列式 D 与它的转置行列式 D^T 相等.

(2) 性质 2　互换行列式的两行(列)，行列式变号.

(3) 性质 3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

推论　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

(4) 性质 4　行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零.

(5) 性质 5　若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和，例如第 i 列的元素都是两数之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(6) 性质 6　把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

例如以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上(记作 c_i+kc_j)，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\overset{c_i+kc_j}{=\!=\!=}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}(i\neq j)$$

(以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上，记作 r_i+kr_j)

5. 行列式按行(列)展开

(1) 代数余子式：把 n 阶行列式中 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后所成的 $n-1$ 阶行列式称为 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，则称 A_{ij} 为 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 引理：一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素除 (i,j) 元 a_{ij} 外都为零，那么这行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即　$D=a_{ij}A_{ij}$.

(3) 定理 3：行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即为行列式按行(列)展开法则，有

按第 i 行展开 $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1、2\cdots,n)$

按第 j 行展开 $D=a_{ij}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1、2\cdots,n)$

(4) 推论：行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即　$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0, i\neq j$

或 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0, i\neq j$

(5) 范德蒙行列式

n 阶范德蒙行列式的形式和结果为

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i\geqslant j\geqslant 1}(x_i-x_j)$$

6. 克拉默法则

克拉默法则:考虑含有 n 个方程的 n 元线性方程组:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\qquad\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

当 $b_1,b_2\cdots b_n$ 全为零时,称为齐次线性方程组,否则,称为非齐次线性方程组.

i) 如果上述方程组的系数行列式 $D\neq 0$,那么,它有唯一解:$x_i=\dfrac{D_i}{D}(i=1,2,\cdots n)$,其中 $D_i(i=1,2,\cdots n)$ 是把 D 中第 i 列元素用方程组的右端的自由项替代后所得到的 n 阶行列式.

ii) 如果线性方程组无解或有两个不同的解,那么,其系数行列式 $D=0$.

iii) 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$,那么,它只有零解,如果齐次线性方程组有非零解,那么,它的系数行列式必定等于零.

三、题型集粹与解题方法技巧

[题型一] 计算排列的逆序数

方法与技巧 计算任意一个排列 $i_1,i_2\cdots\cdots i_n$ 的逆序数方法:$t(i_1i_2\cdots i_n)=i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 $+i_2$ 后面比 i_2 小的数的个数 $+\cdots+i_{n-1}$ 后面比 i_{n-1} 小的数的个数,即为逆序数.

[例 1] 求下列排列的逆序数,并确定它们的奇偶性

(1)1347265 (2)$n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ (3)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$

解: (1)$t(1347265)=0+1+1+3+0+1=6$,故为偶排列

(2) $t(n(n-1)\cdots 2\cdot 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$

可知当 $n=4k$ 时或 $n=4k+1$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为偶数,为偶排列,

当 $n=4k+2$ 时或 $n=4k+3$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为奇数,为奇排列.

(3) 该排列中前 n 个数 $135\cdots(2n-1)$ 不构成逆序,后 n 个数 $246\cdots(2n)$ 也不构成逆序,只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序,$t(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 故奇偶性与(2)题

排列完全一致.

［例 2］　设排列 $i_1\cdots i_n$ 的逆序数为 I，求排列 $i_n\cdots i_1$ 的逆序数

解： 在排列 $i_1\cdots i_n$ 中任取两个数 i_k 和 $i_l(k<l)$，则数对 (i_k,i_l) 或为逆序对或为顺序对，而该排列所有数对的总和为 C_n^2，故 $t(i_1\cdots i_n)$ 的顺序数对共有 C_n^2-I 个，而 $t(i_n\cdots i_1)$ 的逆序数对正好是 $t(i_1\cdots i_n)$ 中的顺序数对，则 $t(i_n\cdots i_1)=C_n^2-I$

注意：例 1 中(2) 为本题的特例，因 $t(1\cdot 2\cdots n)=0$，故 $t(n\cdot(n-1)\cdots 1)=C_n^2-t(1\cdot 2\cdots n)=\frac{1}{2}n(n-1)$

$i=3$　　3 8

［例 3］　选择 i 和 k，使(1)$1i25k4897$ 成奇排列　　(2)$1274i56k9$ 成偶排列

分析与提示　此类问题，一般取小数在先，大数在后，如果符合要求，即为所求，否则另一种情况则符合要求

解： (1) 由题意 i,k 只有两种选择 $i=3,k=6$ 或 $i=6,k=3$，在第一种情况中，$t(132564897)=5$，即为所求.

(2) 由题意 i,k 可能选择 $i=3,k=8$ 或 $i=8,k=3$，在第一种情况中，$t(127435689)=5$，则第二种情况符合，从而有 127485639 成偶排列.

［题型二］　有关行列式的概念

方法与技巧　对于行列式的定义的理解应把握几点

(1)n 阶排列的总数是 $n!$，对所有排列求和，共有 $n!$ 项

(2) 每一项都是不同行和不同列的几个元素的乘积，冠以正负号

(3) 正负号的确定是当第一个下标为自然顺序时，由第二个下标排列的奇偶性确定.

(4) 行列式的值是一个具体数

［例 4］　已知 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}$ 在 4 阶行列式中带负号，求 j 和 k

分析与提示　先将该项行指标按自然顺序排好，然后再用列指标应当是奇排列(因为该项带负号)来确定 j 和 k.

解： 由于 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}=a_{12}a_{2k}a_{3j}a_{41}$，而 $2,k,j,1$ 是 1 至 4 的排列，故 j 和 k 只能取自 3 和 4.

若 $j=3,k=4$，则 $t(2431)=1+2+1=4$

是偶排列，与该项带负号不符，故 $j=4$ 和 $k=3$

［例 5］　若 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$

则方程 $f(x)=0$ 的根的个数是多少

分析与提示　四阶行列式，每个元素都有 x，首先会想到 $f(x)$ 是 4 次多项式，由于组成 x 的四次幂的项有若干个，则它们的和有可能为零，可将行列式进行化简.

解：由于原行列式第 2,3,4 行各元素中 x 前的系数均是第一行各元素中 x 系数的倍

数,将第一行的 $-i$ 倍加到第 i 行($i=2,3,4$)得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & x+1 & 4 \\ 8 & 1 & x+1 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & x+1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

由行列式定义可知,$f(x)$ 是一个二次多项式,故 $f(x)$ 只能有两个根.

[例 6] 填空题

(1) 在 5 阶行列式中,项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号应取 正号 .

(2) 4 阶行列式中,带负号且包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项为 a_{14} . a_{42}

(3) 如果 n 阶行列式中,负项的个数为偶数,则 $n\geqslant$ ________.

(4) 如果 n 阶行列式中等于零的元素个数大于 n^2-n,那么此行列式的值为________.

(5) 在函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中,x^3 的系数是________.

解: (1) 适当调整该项元素位置,使第一个下标按自然数顺序排列,则第二个下标排列为 25134,其逆序数 $t(25134)=4$,故取正号.

(2) 由行列式的定义可知,包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项必为 $a_{1i}a_{23}a_{31}a_{4j}$,其中 i,j 为 2,4 或 4,2. 又此项符号为负,所以 $i31j$ 为奇排列,从而有 $i=4,j=2$.

(3) n 阶行列式中,共有 $n!$ 项,其中正负项各占一半,若负项的个数为偶数,必有 $n\geqslant 3$. & $n!$

(4) n 阶行列式中共有 n^2 个元素,若等于零的元素个数大于 n^2-n,那么不等于零的元素个数就小于 n,又 n 阶行列式的每一项是 n 个不同元素的乘积,所以必定为零,从而此行列式的值也为零.

(5) 根据行列式的定义,仅当 $a_{12},a_{21},a_{33},a_{44}$ 四个元素相乘才能出现 x^3,这时该项排列的逆序数为 $t(2134)=1$,故此项为

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-x^3,$$

因此 x^3 项的系数为 -1.

[例 7] 写出 4 阶行列式中含 $a_{11}a_{23}$ 的项

分析与提示 行列是不同行不同列元素乘积的代数和,含 $a_{11}a_{23}$ 的项应当有形式 $a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$,由此分析 j_3,j_4 的取值及该项所带的正负号.

解: 因为含 $a_{11}a_{23}$ 的项可写为 $a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$,其中 $13j_3j_4$ 是 1 至 4 的排列,所以 j_3,j_4 取 2 和 4,共有两项含 $a_{11}a_{23}$,

若 $j_3=2,j_4=4$,则 $t(1324)=1$,是奇排列,带负号为 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$

若 $j_3=4,j_4=2$,利用对换改变排列的奇偶性,知 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 带正号,即 4 阶行列式中,含 $a_{11}a_{23}$ 的项为:$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

[例 8]　证明：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$

证明：由题设知，当 $k \geqslant 3$ 时，$a_{3k}=a_{4k}=a_{5k}=0$，而行列式 D 中的一般项是

$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$

由于 j_3,j_4,j_5 互不相同且取于 1 至 5，故其中至少有一个要大于或等于 3，那么 $a_{3j_3},a_{4j_4},a_{5j_5}$ 中至少有一个为 0，所以 D 的展开式中每一项都是 0，故行列式 $D=0$

[题型三]　利用性质进行计算行列式

方法与技巧　利用性质将行列式化为上(或下)三角形行列式以及利用其他性质计算(如提取公因式法，逐行或列相加减等等)

[例 9]　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解：　方法一：分别从第 2,3,n 行中减去第 1 行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

将第 2,3,$\cdots n$ 列加到第 1 列，有

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

方法二：将第 2,3,$\cdots n$ 行加到第 1 行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

再将第 1 行的 $-a$ 倍加到第 $2,3,\cdots n$ 行，有

$$D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

［例 10］ 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

解： 由 D 的主对角线及第 1 行与第 1 列元素非零，其余元素为零，把第 2 行的 $-\frac{1}{2}$ 倍，第 3 行的倍 $-\frac{1}{3}$ 倍……第 n 行的 $-\frac{1}{n}$ 倍都加到第 1 行上，使 D 化成下三角行列式，得

$$D=\begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}=n!(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i})$$

［例 11］ 计算下列行列式

(1)

$$D=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}$$

(2)

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & a_j+b & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

(3)
$$D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \qquad \text{其中 } a_i \neq 0, i=1,2,\cdots n$$

分析与提示 (1) 利用逐行(列)相加减的技巧化为三角形行列式.

(2) 所有行(列)对应元素相加后相等的行列式,可把所有行(列)加到第 1 行(或 1 列),提取公因子后再化简计算.

(3) 形似"爪"型行列式,通常提取公因式法化为三角形行列式.

解: (1)
$$D \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(2) 所有列对应元素相加后均为 $b+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$,将第 2 至第 n 列对应元素加到第 1 列,然后提出公因子 $b+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$,有

$$D_n = \begin{vmatrix} b+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$= \left(b+\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

再将第 1 行的(—1) 倍加到其余各行,得

$$D_n = (b+\sum_{i=1}^{n} a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = (b+\sum_{i=1}^{n} a_i)b^{n-1}$$

(3) 将第 i 行提出 $a_{i-1}(i=2,3,\cdots n+1)$ 得

$$D = a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1 - r_2 - r_3 - \cdots - r_n} \prod_{i=1}^{n} a_i \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_i \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

[题型四] 利用行列式按行(列)展开定理

方法与技巧 当行列式的某一行(列)中的零元素较多时,才能显出展开定理的优势,所以往往先利用行列式性质将行列式的某一行(列)出现较多的零元素时,然后再利用展开定理.

[例 12] 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

分析与提示 考虑到行列式各行元素之和都相等,可先把各行每一元素都加到第 1 列,再把第 1 列的公因子提出来,最后按第 1 列展开.

解: $D \xlongequal[c_1+c_4]{\substack{c_1+c_2 \\ c_1+c_3}} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{提出 } x} x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 1 列展开}} x\begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ x & 0 & -x \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = x^4$$

[例 13]　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解：　利用行列式的性质知：第 1 行的 (-1) 倍加到第 $i(i=2,3,\cdots n)$ 行上去，行列式值不变，故

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)^{n-1}$$

[例 14]　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

解：　注意到第 2,3,…,n 行的元素的和都是零，将第 2,3,…,n 列都加到第 1 列上去，然后按第 1 列展开，得

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & (n-2) & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}(n+1)!$$

[题型五] 关于代数余子式的计算

方法与技巧 由行列式展开定理知对 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$ 有结论 $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D_n & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$,即可将展开定理反过来使用,可将某些低阶行列式(代数余子式或余子式)的计算转化为高阶行列式计算更为方便.

[例 15] 设 4 阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & P \\ b_1 & b_2 & b_3 & P \\ c_1 & c_2 & c_3 & P \\ d_1 & d_2 & d_3 & P \end{vmatrix}$$

求第 1 列各元素的代数余子式之和 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}$

解: 当 $P=0$,易知 $A_{i1}=0(i=1,2,3,4)$,故 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=0$. 当 $P\neq 0$ 时,可知 $\sum_{k=1}^{n}a_{k4}A_{k1}=0$,即 $PA_{11}+PA_{21}+PA_{31}+PA_{41}=0$,则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=0$

[例 16] 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

求第 4 行各元素余子式之和之值

分析与提示 本题求四个余子式之和 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$,而不是求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$,若能转化为代数余子式为:

$-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$ 可直接计算四个三阶行列式或化为一个四阶行列式.

解: **方法一:**按余子式的定义,化为四个三阶行列式求和

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix}=-56+0+42-14=-28$$

方法二: $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$

$$=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=-7(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=14\begin{vmatrix}3&4&0\\1&1&1\\-1&-1&1\end{vmatrix}=14\begin{vmatrix}3&4&0\\1&1&1\\0&0&2\end{vmatrix}=-28$$

[**例** 17]　已知 5 阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&2&2\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}$$

求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$,其中 $A_{4j}(j=1,2,3,4,5)$ 为 D_5 的第 4 行第 j 个元素的代数余子式.

解:　由已知条件得 $\begin{cases}A_{41}+A_{42}+A_{43}+2(A_{44}+A_{45})=27\\2(A_{41}+A_{42}+A_{43})+A_{44}+A_{45}=0\end{cases}$　?

解方程组可得　$A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9, A_{43}+A_{45}=18$

[**题型六**]　n 阶行列式的计算

n 阶行列式的计算方法多种多样,在此对 n 阶行列式的计算方法作个归纳.

方法与技巧一　定义法 —— 直接根据定义得到特殊行列式的结果,此法对高阶行列式的计算不适合,而对 2 阶 3 阶行列式,用对角线法则计算不易出错.

方法与技巧二　降阶法 —— 利用行列式按行(列)展开定理,将高阶行列式降为低阶行列式,要注意按零元素较多的行(列)展开或将某行(列)通过变形化为较多的零再按该行(列)展开,常用的变形方法有:(1) 初等行(列)对换;对换两行(列);某行(列)乘以不为零的数 k;某行(列)的 k 倍加之于另一行(列). (2) 逐行(列)相减相加. 例题见[题型四]　c_i+kc_j

方法与技巧三　化为三角形行列法 —— 利用行列式的性质化为三角形行列式,此方法适用一些特殊行列式,如:行(列)和相等的行列式,即 n 阶行列式各行(列)元素之和等于同一数值,把第 2,3,……,n 列(行)都加到第 1 列(行),然后提出第 1 列(行)的公因数,便于化为三角形行列式,例题见[题型三]

方法与技巧四　?递推公式法 —— 对于 n 阶行列式 D_n,应用行列式的性质,找出 D_n 与 D_{n-1} 或 D_n 与 D_{n-1}、D_{n-2} 之间的关系,$D_n=aD_{n-1}+bD_{n-2}$ 或 $D_n=\alpha D_{n-1}+\beta D_{n-2}$,再由递推关系式求出 D_n 的值.