シュヴァルツ

解析学 3

積分法 上

京都大学助教授
小針晛宏 訳

東京図書株式会社

シュヴァルツ

解析学 3

積分法 上

小針晛宏 訳

東京図書株式会社

シュヴァルツ解析学 3
積 分 法 上 ¥1600

1970年12月19日 第1刷発行 Printed in Japan
1978年10月20日 第2刷発行

著 者 L. シュヴァルツ
訳 者 小 針 睍 宏
発行所 東 京 図 書 株 式 会 社
東京都 文京区 水道 2-5 カキビル
振替東京4-13803 電話(814)7818〜9

3341-2103-5160

Laurent Schwartz

COURS D'ANALYSE

I

HERMANN

Paris 1967

序

しばしば語られて来たように，物理学者や技術者のための《涙なしの数学》は存在しない．現代の物理学者や技術者は，莫大な量の，しかも広大な領域にわたっての数学的知識を必要とする．だから，これら数学の《利用者》にとって，必要なすべての結果を，完全な証明つきで習得することは，もはや絶対に不可能である．ところが，数学では，一つ一つの結果に厳密な証明を付けることが通念となっている．したがって，数学の教程は，つぎの二つのうちのどちらかを選ばざるを得ない．一つは短い教程で，ほんの少しの結果をきちんと証明する．こうすると，数学の学生は満足するだろうが，物理の学生は満足しないだろう．もう一つはやはり短い教程で，結果は豊富だが，証明はごく概略だけ付けるか，またはまったく省略してしまう．この場合には，読者のデカルト精神がまったく満たされないことになるだろう．

そこで，我々はこのどちらとも異なる第三の道を選んだ．私は長い教程，非常に長い教程を作った．それは定理をふんだんに含み，しかも，それらすべてに原則として完全な証明が付けてある．したがって，これは本来の意味での教程というよりはむしろ一冊の本，参考図書である．この教程を実際に講義するときには，その要約だけしか話すひまがないと思う．学生諸君は，したがって，この本全部を義務的に学ぶ必要はない．その都度明確に指示される必須部分だけを学べばよい．必須部分は，たくさんの結果と少しの証明とから成っている．

そのかわり，学生諸君は，この本で出会う新しい考えかたや構造をすべて理解

しなければならない．また，諸定理とその精神とを知らなければならない．さらに，習得した定理が楽々と使いこなせるようにならなければならない．これは思ったほどやさしいことではない．もし，定理に述べられていることの意味を一度も深く考えなかったとしたら，たとえ本を見ながらでも，その定理をすぐに使いこなすことは絶対に不可能である．

必須と指示した証明は，すべてもっとも教育的でしかももっとも特徴的なものばかりである．

しかし，学生諸君は，必須でない部分からも，自分の好みに一番よく合ったところを選んで勉強することができるし，しかも私はそれを強くすすめる．その際，講義担当者や私自身に相談するとよい．我々は，諸君に助言を与えることを切に望んでいるのである．こうすることによって，いろいろな好みの学生，いろいろな学力水準の学生が，ひとしく満足を得ることになるだろう．その結果，本校（Ecole Polytechnique）の同学年の学生が，人によってそれぞれ別々の部分を深く学んだことになれば大変結構なことであろう．

ロラン・シュヴァルツ

訳 者 序

本書は, Laurent Schwartz 著

«*Cours d'analyse*» (1967)

の全訳である. これは, シュヴァルツ教授の Ecole Polytechnique での解析学の講義の教程として書かれた.

原書は全二巻の仮綴本であるが, 訳書は全7巻に分けた. 訳書の構成はつぎのとおりである.

第1巻	集合・位相	Ch. 1	集 合
		Ch. 2	位 相
第2巻	微分法	Ch. 3	微分法
第3巻	積分法 上	Ch. 4	積分法
第4巻	積分法 下	Ch. 4	積分法（つづき）
第5巻	外微分法	Ch. 6	外微分法
第6巻	複素関数	Ch. 7	複素関数
第7巻	微分方程式	Ch. 5	微分方程式
	ヒルベルト空間	Ch. 22	ヒルベルト空間
	フーリエ級数	App.	フーリエ級数

読者への注意

1. 欄外の注意記号 ☡（危険な曲り角）は，そこが重大な誤りを犯しやすい箇所であることを示す.
2. 記号〘——〙は，反復を避けるための略記号である．たとえば，«A〘A′〙ならば B〘B′〙である» は，«A ならば B であり，A′ ならば B′ である» を意味する.
3. 訳者の補注は原注と同じ脚注の形とし，最後に［訳注］と断りを入れた.

目　次

第4章 積 分 法

§ 1. 直線上のリーマン積分

$\vec{\mathrm{F}}$ は実または複素数体 $\mathbf{K}$ 上のバナハ空間，$\vec{f}$ は実数直線 $\mathbf{R}$ の区間 $[a,\ b]$ 上で定義され，$\vec{\mathrm{F}}$ の値をとる関数とする．これの積分

$$(1.1) \qquad \int_{[a,b]} \vec{f}(x)dx \in \vec{\mathrm{F}}$$

を定義することにしよう．それには $\vec{f}$ がバナハ空間の値をとると仮定する必要がある．なぜなら積分は

$$(1.2) \qquad \sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1}-c_i)\vec{f}(\xi_i)$$

の形の有限和の極限と考えられるから．ただし $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n$ は $c_0=a$, $c_n=b$ として区間 $[a,\ b]$ に属する $n+1$ 個の増加点列であり，$\xi_i\in[c_i,\ c_{i+1}]$. ところで，このような和が考えられるためには，まず各項 $(c_{i+1}-c_i)\vec{f}(\xi_i)$ が考えられることが必要であり，それには，$\vec{\mathrm{F}}$ の元 $\vec{f}(\xi_i)$ と実係数 $(c_{i+1}-c_i)$ との積を知る必要があり，つぎに $\vec{\mathrm{F}}$ のこのような元の和が考えられなければならない．したがって $\vec{\mathrm{F}}$ は当然，実数体上の線型空間でなければならない．一方積分は和ではなくて，和の極限だから，$\vec{\mathrm{F}}$ の中に極限が考えられなければならない．だから F は実数体上のノルム線型空間と仮定するのが妥当だ．積分が定義できるためには，理論的にはこれで十分だろう．けれど，F が完備ということを仮定しないと，可積性についての有用で実際的な規準を見つけることは不可能だろう．実際この場合にだけ，一つの列の極限の存在が，前以ってその極限がわかっていなかったとしても，証明できるからだ．だからともあれ今後は，反対の明白な指摘がないかぎり，F はバナハ空間と仮定する．もちろん，それは複素数体

上のバナハ空間であってもよい．というのはそのとき，それはもちろん実数体上のバナハ空間と考えられるから．

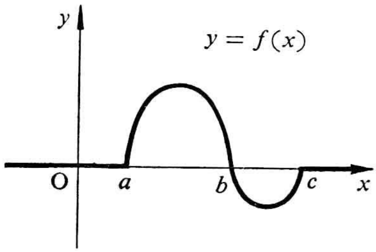
いつでも，関数 $\vec{f}$ は有界と仮定しよう．言いかえると，x が $[a,\ b]$ を走るとき，$\|\vec{f}(x)\|$ は固定したあるノルムで上から押えられている．一方，すでに第1巻114ページでしたように $[a,\ b]$ 上で定義された関数 $\geqslant 0 : x \Rightarrow \|\vec{f}(x)\|$，を $\|\vec{f}\|$ で表わし，この関数の上限を $|||\vec{f}|||$ によって表現しよう*)．

ところで，関数 $\vec{f}$ は全直線上で定義されていると考え，全直線上でそれを積分しよう．とはいえこの関数は，有界区間の外ではつねに零でなければならない．

そこで，つぎのような表現で書こう：

(1.3)　$$\int_{\mathbf{R}} \vec{f}(x)dx, \quad \text{または簡単に} \quad \int \vec{f}(x)dx, \quad \text{または} \quad \int \vec{f}\ .$$

定義から記号 (1.1) は，全直線で定義され，区間 $[a,\ b]$ では $\vec{f}$ に等しく，その区間の補集合では $\vec{0}$ に等しい関数 $\vec{\vec{f}}$ の，全直線上の積分になる．位相空間 $\mathbf{X}$ で定義され，線型空間 $\vec{\mathbf{F}}$ の値をとる関数 $\vec{f}$ があるとき，$\vec{f}(x) \neq \vec{0}$ となる点 x の全体の閉包を $\vec{f}$ の**台**と言う．この定義から，関数の台はつねに閉集合．$\vec{f}$ の台は，その補集合で $\vec{f}$ が $\equiv \vec{0}$ となるようなもののうちで，最小の閉集合である．たとえば，グラフが図に示されているような，$\mathbf{R}$ 上の実関数をとると，



$f(x) \neq 0$ となる点の全体は，開区間 $]a,\ c[$ から点 b を取除いたものだが，台は閉区間 $[a,\ c]$ である．

$\vec{f}$ は $\mathbf{R}$ の無理座標の点のすべてで 0 に等しく，有理座標の点のすべてで 1 に等しい実関数とすると，それが 0 でないような点の全体は有理数の集合 $\mathbf{Q}$ であり，台は実数直線 $\mathbf{R}$ 全体となる．$\vec{f}$ と $\vec{g}$ は $\mathbf{X}$ 上の関数で，値は線型空間 $\vec{\mathbf{F}}$ とすると，$\vec{f}+\vec{g}$ の台は明らかに $\vec{f}$ と $\vec{g}$ の台の合併に含まれる．実際，

*) とはいえ，$\vec{\mathbf{F}}$ が係数体それ自身のとき，$\|\ \ \|$ は $|\ \ |$ でおきかえられ，$|||\ \ |||$ は $\|\ \ \|$ でおきかえられる．

$\vec{f}(x)+\vec{g}(x) \neq \vec{0}$ となる点 x は $\vec{f} \neq \vec{0}$, となる点の全体 A に属するか，または $\vec{g} \neq \vec{0}$ となる点の全体 B に属するかである．この二つの場合はたがいに他を排除しないから $A \cup B$ に属していることになり，したがって台は $\overline{A \cup B}$ に属し，これ自身は台の合併 $\overline{A} \cup \overline{B}$ に含まれている．だから $\mathbf{R}$ で定義された関数 $\vec{f}$ を $\mathbf{R}$ 上で積分するのに，コンパクトな台の関数でやればよい．

階段関数

実数直線 $\mathbf{R}$ 上で定義され，任意の集合 F の値をとる関数 f は，$\mathbf{R}$ の有限増加点列 c_0, c_1, c_2, …, c_n があって，各開区間 $]-\infty, c_0[$, $]c_0, c_1[$, …, $]c_{n-1}, c_n[$, $]c_n, +\infty[$ で関数 f が定値のとき，**階段関数**と言う．(点 c_i 自身での関数の値については，補足的な仮定は何もなされていない．) このような点 c_i の列は，階段関数 f **に適当な** $\mathbf{R}$ の**分解**または**細分** Δ と呼ばれる．当然 f に関しては《可能なかぎり最良の》分解，つまり点 c_i の数が最小のものが存在するが，これについてはとくに触れないでおこう．同じ階段関数 f について，$\mathbf{R}$ の適当な分解は無数にある．

$\mathbf{R}$ の分解 Δ' は，c'_j の列が c_i の列を含んでいるとき，分解 Δ より**細かい**と言う．f に適当な分解より細かい分解はすべて，また f に適当である．$\mathbf{R}$ の何かある分解 Δ', Δ'' が与えられたとき，それらのいずれよりも細かい分解 Δ が，少なくとも一つあり，それは Δ', Δ'' に関する二つの細分点列を合併することによって得られ，増加する大きさの順序で並んでいる．$\mathbf{R}$ の有限個の点で，階段関数の値を修正してもそれはやはり階段関数であり，$\vec{F}$ を線型空間とするとき，階段関数にスカラーを掛けたもの，および二つの階段関数の和は，また階段である．この最後の点だけは無条件に明らかというわけではない．$\vec{f}, \vec{g}$ を階段関数とすると，これらに対応して $\mathbf{R}$ の分解 Δ', Δ'' があり，したがって，これらのいずれよりも細かい分解 Δ がある．そして Δ は，二つの階段関数 $\vec{f}$, $\vec{g}$ 双方に適当であり，和 $\vec{f}+\vec{g}$ が階段関数で，Δ をその分解にしていることが明らかになる．

では順序として，必ずしもノルムつきでない，$\mathbf{K}$ 上の線型空間 $\vec{F}$ の値をとる，台がコンパクトな階段関数のリーマン積分を定義しよう．

$$\int \vec{f} = \sum_{i=0}^{n-1} (c_{i+1}-c_i)\vec{f}(\xi_i), \qquad \xi_i \in]c_i, c_{i+1}[\tag{1.4}$$

ただし c_0, c_1, c_2, …, c_n はこの階段関数に適当な，$\mathbf{R}$ のある分解とする[*]．

---

[*] $\vec{f}$ はコンパクト台と仮定しているから $]-\infty, c_0[$, および $]c_n, +\infty[$ では必然的に零となる．点 c_i での $\vec{f}$ の値には言及しない．

これが正確な定義になっていること，言いかえれば，(1.4) の第二項が分解の選び方に依らないことを示さなければならない．そこで $\vec{f}$ に可能な二つの分解を Δ', Δ'' とし，その双方より細かい分解を Δ とすると，Δ', Δ'' に関する (1.4) の表現がともに，Δ に関する表現に等しいということを見るのはたやすい．

(実際，$]c'_i, c'_{i+1}[$ を分解 Δ' の一区間とすると，それは Δ によって，いくつかの区間 $]d_j, d_{j+1}[$, $]d_{j+1}, d_{j+2}[$, $\cdots$, $]d_{k-1}, d_k[$ に細分解され，これらの各区間で関数 $\vec{f}$ は $]c'_i, c'_{i+1}[$ でと同じ定数 $\vec{f}_i$ だから，つぎの等式が成立つ：

$$(1.5)\qquad \sum_{l=j,j+1,\cdots,k-1}(d_{l+1}-d_l)\vec{f}_i=(c'_{i+1}-c'_i)\vec{f}_i$$

Δ' のいろいろな区間に対応するものを加えるとそれは，確かに Δ のいろいろな区間に対応するものを加えることになり，これは Δ', および Δ に対応する和の同一性を証明している.)

λ をスカラーとし，$\vec{f}$, $\vec{g}$ をコンパクト台の階段関数とすると，明らかにつぎの式が成立つ：

$$(1.6)\qquad \int\lambda\vec{f}=\lambda\int\vec{f},\qquad \int(\vec{f}+\vec{g})=\int\vec{f}+\int\vec{g}\ .$$

スカラーを掛ける方は明らかであり，和の場合については $\vec{f}$ と $\vec{g}$ に共通な，したがってまた $\vec{f}+\vec{g}$ にも共通な分解 Δ を選べばよい．そこで

定理 1.　$\mathbf{R}$ 上で定義され，実または複素数体 $\mathbf{K}$ 上の線型空間 $\vec{\mathrm{F}}$ の値をとる，コンパクト台の階段関数の全体は，これ自身 $\mathbf{K}$ 上の線型空間であり，積分 $\vec{f}\mapsto\int\vec{f}$ はこの線型空間から $\vec{\mathrm{F}}$ への線型写像である．$\vec{\mathrm{F}}=\mathbf{R}$ で $f\geqslant 0$ なら $\int f\geqslant 0$. さらに $\vec{\mathrm{F}}$ がノルム線型空間なら，つぎのような二つの上界がある．

$$(1.7)\qquad \left\|\int\vec{f}\right\|\leqslant\int\|\vec{f}\|=\int\|\vec{f}(x)\|dx,\qquad \left\|\int_{]a,b[}\vec{f}\right\|\leqslant(b-a)\sup_{a\leqslant x\leqslant b}\|\vec{f}(x)\|.$$

$\mathbf{R}$ の有限個の点で，コンパクト台の階段関数の値をかえても，やはりコンパクト台の階段関数であり，積分はかわらない．

定理の前半は言明の前に証明されているし，(1.7) の上界は，$\vec{f}$ に適当な分解 Δ をとると明らかだ：

$$\left\|\sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1}-c_i)\vec{f}_i\right\|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1}-c_i)\|\vec{f}_i\|\leqslant(b-a)\sup_i\|\vec{f}_i\|,$$

ただし　$c_0=a$, $c_n=b$.

ところで，$\vec{f}$, $\vec{g}$ は $\mathbf{R}$ の有限個の点でしか異ならない，コンパクト台の階段

関数とすると，それらの点は $\tilde{f}$ と $\tilde{g}$ に同時に適当な分解 Δ の c_i の中に必然的にはいり，積分は分解 Δ の点 c_i における関数の値に影響を受けない．

さて，任意の関数の積分を定義することにしよう．それには極限移行を働かせる必要がある．

有界でコンパクト台の関数 $f \geqslant 0$ のリーマン上積分

定義.　$\mathbf{R}$ 上で定義され，有界でコンパクト台の実関数 $\geqslant 0$，を f とする．

f を上から押えるコンパクト台の階段関数 f_1 の積分の下限を，f の**リーマン上積分**と言い，$\int^* f$ と記す．言いかえると，つぎのように書ける．

$$\int^* f = \operatorname*{Inf}_{\substack{f_1 \text{ 階段} \\ f_1 \geqslant f}} \left(\int f_1\right) \geqslant 0. \tag{1.8}$$

ともあれ先の制限，つまり f は有界でコンパクト台と仮定することは，きちんと断わっておかなければならない．そうでないと f を上から押えるコンパクト台の階段関数が存在しなくなる．もちろん，f が階段状なら f_1 として f 自身をとればよいし，$\int^* f = \int f$ になる．

定理 2.　$f \leqslant g$ なら $\int^* f \leqslant \int^* g$ であり，λ をスカラー $\geqslant 0$，f, g をコンパクト台の有界正値関数とすると，つぎの式が成立つ：

$$\int^* \lambda f = \lambda \int^* f, \qquad \int^* (f+g) \leqslant \int^* f + \int^* g. \tag{1.9}$$

正値関数の上積分は凸性をもっているとも言う．関数の上積分は，$\mathbf{R}$ の有限個の点でその値をかえてもかわらない．

証明.　すべてはほとんど明らかだが，たとえば凸性を証明しよう．

f_1，g_1 はおのおの f，g を上から押えるコンパクト台の有界階段関数とすると $f_1 + g_1$ は $f+g$ を上から押える．したがって

$$\int^* (f+g) \leqslant \int (f_1 + g_1) = \int f_1 + \int g_1. \tag{1.10}$$

したがって第一項は，第三項の下限によって上から押えられており，それは，$\int^* f + \int^* g$，に他ならない．これは (1.9) を証明している．

ところで f と g が $\mathbf{R}$ の有限個の点を除いて等しいとし，f_1 は f を上から押えているコンパクト台の階段関数とすると，g を上から押えるコンパクト台の階段関数で，f_1 と高々有限個の点を除いて等しい g_1 をみつけることができる．そうすると，$\int^* g \leqslant \int g_1 = \int f_1$ だが，第三項の下限をとることによって $\int^* g \leqslant \int^* f$．このことと対称な理由によって，逆

の意味の不等式ができ，したがって等式となる．

注意.　1°　f によって上から押えられている階段関数の積分の上限として，**リーマン下積分** $\int_* f$ を定義することもできよう．けれど，この下積分は

$$\int_*(f+g) \geqslant \int_* f + \int_* g \tag{1.11}$$

として知られる凹性をもっており，実際上はほとんど使われない．

2°　$\int^*(f+g)=\int^* f+\int^* g$，もいえると思うかも知れないが，決してそんなことはない．

実際，$[0, 1]$ の補集合と $[0, 1]$ の無理点で零，$[0, 1]$ の有理点で 1 となる関数 f を考えよう．f_1 を階段関数 $\geqslant f$，とすると，f_1 に適当な分解 Δ のどんな区間 $]c_i, c_{i+1}[$ にも有理点があるから，f_1 の一定値は確かに $\geqslant 1$ だから，f_1 は少なくとも区間 $[0, 1]$ の特性関数に等しい．逆に，この最後の関数は階段状で f を上から押えているから $\int^* f = 1$．ところで，有理数と無理数の役割を交換することによって得られる，f と似た関数を g とすると，やはり，$\int^* g=1$，が言える．けれども $f+g$ は $[0, 1]$ の特性関数だから $\int^*(f+g)=\int(f+g)=1<1+1$.

この例では，注意 1° のリーマン下積分を導入すると，$\int_* f=\int_* g=0$ であり，$\int_*(f+g) = \int(f+g)=1>0+0$ となる．

3°　$\mathbf{R}$ の可算無限個の点で関数の値を修正することによって，上積分を修正することができる．

たとえば注意 2° の関数 f は，0 関数と有理点で異なっており，その上積分は 1 であって 0 ではない．

4°　凸性の不等式はもちろん，有限個の関数の和に拡張されるが，可算無限の和には拡張できない．言いかえると，f_0，f_1，f_2，…，f_n，… が，$\mathbf{R}$ の同じ区間 $[a, b]$ に台をもつ有界な関数 $\geqslant 0$，の列で，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ がすべての x で極限 $f(x)$ に収束していると，f 自身も有界で（台は明らかに $[a, b]$ の中にあり）必ずしも $\int^* f \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\int^* f_n$ になるとは限らない．

たとえば $[0, 1]$ の有理数の全体をとろう．それらは一つの列 a_0，a_1，a_2，…，a_n，… に並べることができる．$\{a_n\}$ の特性関数を f_n としよう．すると $f=\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は注意 2° で定義された関数 f に他ならない．ところで $\int^* f = 1 > \sum_{n=0}^{\infty}\int^* f_n = 0$.

われわれはルベーグ積分論のところで，可算の凸性 $\int^*\sum_{n=0}^{\infty} f_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\int^* f_n$ をも