

マグロウヒル大学演習シリーズ

集合論

リプシュッツ著 金井省二/清澤毅光 訳

演習530題解答付き

THEORY AND PROBLEMS OF

SET THEORY

マグロウヒル好学社

マグロウヒル大学演習シリーズ

集合論

リプシュッツ著 金井省二/清澤毅光 訳

訳者略歴

金井 省二

1941 年(昭和 16 年)神奈川県横浜生まれ

東京教育大学理学部数学科卒, 同大学院理学研究科修士課程修了
同博士課程中退

現在, 静岡大学教育学部助教授

訳書 『運と偶然の科学』(共訳, 講談社)

清澤 毅光

1941 年(昭和 16 年)長野県生まれ

東京教育大学理学部数学科卒, 同大学院理学研究科修士課程修了
同博士課程中退

現在, 静岡大学教育学部教授

著書 『線形代数と幾何』(共著, 山海堂)

マグロウヒル大学演習シリーズ

S. リプシュッツ: 集合論

定価2,500円

昭和 57 年 7 月 5 日 初版発行 ©

〔無検印制〕 訳 者 金井省二／清澤毅光

発行者 稲垣 利一

発 行 所 (株)マグロウヒル好學社

東京都中央区銀座 4-14-11(七十七ビル)

〒104 京橋局私書箱 281 電話 03-542-8821

無断転載複製を禁ず

株式会社 廣済堂 印刷・製本

Copyright © 1982 by McGraw-Hill Kogakusha, Ltd.
All rights reserved. No part of this publication may be
reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted
in any form or by any means, electronic, mechanical,
photocopying, recording, or otherwise, without the prior
written permission of the publisher.

訳者まえがき

本書は McGraw-Hill Book Company により刊行されている Schaum's Outline Series 中の 1 巻で、「集合論」の演習書である。

集合論は現代数学の基礎であると言われる。実際、現代数学において現われている諸概念はすべて集合で記述されており、このシリーズでも多くの巻が先ず集合について触れてからそれぞれの分野に入っている。集合は、性質とか論理とかをわかりやすい言葉に言い換えるための翻訳語である。だから、より高等な複雑な数学に直面しないとその意義も便利さもわかりにくい面がある。

本書は三部に分かれていて、各章は定義、定理、それらにまつわる性質や注意が先ず述べられていて、次に演習問題、補充問題と続いている。演習問題では、先に述べた定理の証明やその具体的な応用問題の解説を、さらに補充問題で演習に取り組ませている。第Ⅰ部では、集合の基本的知識の理解にあてられている。高校生までに学習したことを集合論的にまとめ直し、さらに集合で良く使用される概念の定義、定理、性質を詳しく解説し、抽象化された数学に対しての便利性を深く理解させるための準備をしている。第Ⅱ部は、いわゆる本来の集合論といわれる内容である。集合論の創始者であるカントールの仕事を中心に述べている。これは歴史的に重要であるだけでなく、現在でも諸分野の奥深くに陰に陽に使われる。第Ⅲ部では、集合と切っても切れない論理との関係について述べている。ここでは日常良く用いられている言葉使いなども例にとり、論理、ひいては集合をもっと深く理解させようとしている。

このようにして本書は予備知識をほとんど必要なくして読めるし、全体に亘ってアメリカの数学書らしいいいいさで、何度も何度も反復し徹底してなんとしてでも理解させようという気迫を感じさせる。そのような著者の意図が読者に伝わるように、訳としては直訳に近いものとした。例えば、第Ⅰ部で「関数」と訳した概念がある。これはむしろ「写像」と訳した方が集合論として適当であったかもしれないが、本文中にもその相違について触れてあるので、あえて原文どおり関数と訳した。しかし、あまり直訳にすぎると、広く使用されている言葉にそぐわないところもあったので、そのような場合は読みやすい言葉に直した。それにより著者の意図が読者にさらに良く伝わるように心掛けたつもりである。本書が読者の集合論に対する興味を深める手引きとなれば訳者の望外の喜びとするところである。なお訳に当っては奇数章は清澤が偶数章は金井が主に担当した。

最後に、本書の翻訳の機会を与えて下さったうえに、あたたかい励ましと御指導をいただいた東海大学教授 氏家勝巳、根本精司両先生、企画から出版までいろいろお世話いただいたマグロウヒル好学社の制作部長梶川寧氏、編集部長杉谷繁氏、ならびに印刷校正の段階でたいへんお世話になった高松直子氏に心からお礼を申し上げます。

1982 年 4 月

訳 者

序 文

集合論は数学の基礎である。関数や関係のような集合論の概念は数学の各分野に陰に陽に現われる。この本では集合論の公理主義的、形式的な取り扱いはいしない。

内容は三部に分かれている。それによって論理的展開を乱してはいないし、むしろあらゆるレベルの参考書やテキストとしての有用性を増していることになっている。第Ⅰ部は集合の基本的演算の入門と関数や関係の概念を詳細に説明している。第Ⅱ部はカントールの古典的な方法による基数と順序数の理論の解説である。さらに半順序集合とツォルンの補題を含む選択公理と同値な命題を説明した。第Ⅲ部では基本的な集合論に関連した話題にふれている。もちろん挙げてある話題の述べ方は著者の好みに多分に影響されている。例えば、関数は関係を定義する以前に導入し、初めに順序対の集合としては定義しなかったことなどである。

各章は初め当面関係のある定義、原理、定理をわかりやすく、具体的に説明し、演習問題を分類してつけ、さらに補充問題へと続けている。演習問題の目的は学習者が集合論を誤って理解しないようにすることにある。そのため鋭く焦点を絞り、効果的に学習できるように基礎的な原理をくり返し出題してある。定理の証明と基礎的な結果からすぐ導ける命題も演習問題に含めてある。補充問題は各章の全体の内容の復習である。

この本では初歩的な入門で学ぶべき内容より、かなりたくさんの内容を含んでいる。このことはこの本を扱いやすい、有効な参考書にし、この分野の関心を刺激するはずである。

つぎのテキストは参考になる。とくに Halmos と Kamke の本は第Ⅱ部の補助的読物として推薦できる。

Bourbaki, N., *Théorie des Ensembles*, Hermann, Paris, 1958

Halmos, P. R., *Naive Set Theory*, Van Nostrand, 1960

Hausdorff, F., *Set Theory*, Chelsea, 1957

Kamke, E., *Theory of Sets*, Dover, 1950

Kuratowski, C., *Introduction to Set Theory and Topology*, Addison-Wesley, 1962

Natanson, I. P., *Theory of Functions of a Real Variable*, Chap. 1, 2, 14, Ungar, 1955

貴重な示唆と、原稿の批評をいただいた私の友人、同僚に感謝の意を表す。とくに、優れた企業、シャウム出版のスタッフの方々に感謝する。

1964年1月 Polytechnic Institute of Brooklyn にて

Seymour Lipschutz

SCHAUM'S OUTLINE SERIES
THEORY AND PROBLEMS OF
SET THEORY and Related Topics
BY
SEYMOUR LIPSCHUTZ

Copyright ©1964 by McGraw-Hill, Inc.

目 次

訳者序文
序 文

第 I 部 集合の基本的理論

第 1 章 集合と部分集合 1

集合 記号 有限と無限集合 集合の相等 空集合 部分集合 真部分集
合 比較可能 定理と証明 集合の集合 全体集合 ベキ集合 互いに素
な集合 ベン・オイラー図 線図 集合論の公理的展開

第 2 章 基本的な集合演算 20

集合演算 和 共通集合 差 補集合 比較できる集合についての演算

第 3 章 数の集合 35

数の集合 実数 整数 有理数 自然数 無理数 数の体系の線図 小
数と実数 不等式 絶対値 区間 区間の性質 無限区間 有界集合と非
有界集合

第 4 章 関数 53

関数の定義 写像, 作用素, 変換 関数の相等 関数の値域 1 対 1 の関数
上への関数 恒等関数 定値関数 合成関数 合成関数の結合法則 関数に
よる逆像 逆関数 逆関数の定理

第 5 章 直積集合と関数のグラフ 78

順序対 直積集合 座標図 関数のグラフ 関数のグラフの性質 グラフと
座標図 座標図上における関数のグラフの性質 順序対の集合としての関数 一
般の直積集合

第 6 章 関係 97

命題関数, 真偽未決定文 関係 関係の解集合とグラフ 順序対の集合としての

関係 逆関係 反射的な関係 対称的な関係 反対称的な関係 推移的な関係
 係 同値関係 関係の定義域と値域 関係と関数

第7章 続・集合の理論 122

集合の代数 双対の原理 添数集合 一般化された演算 分割 同値関係と分割

第8章 続・関数と演算の理論 136

関数と図式 関数の制限と拡張 集合関数 実数値関数 実数値関数の代数
 最大定義域の原則 特性関数 選択関数 演算 可換演算 結合的な演算
 分配的な演算 単位元 逆元 演算と部分集合

第II部 基数, 順序数, 超限帰納法

第9章 基数 159

対等集合 可算集合 連続体 基数 基数の計算 基数の大小 カントールの定理 シュレーダー-ベルンシュタインの定理 連続体仮説

第10章 半順序集合と全順序集合 179

半順序集合 全順序集合 順序集合の部分集合 全順序部分集合 最初の元と最後の元 極大元と極小元 上界集合と下界集合 相似(同型)な集合 順序型

第11章 整列集合, 順序数 197

整列集合 超限帰納法 極限要素 切片 整列集合とその部分集合間の相似性
 整列集合の比較 順序数 順序数の大小 順序数の加法 順序数の乗法 順序数の構造 順序数の補助構成

第12章 選択公理, ツォルンの補題, 整列可能定理 213

カルテシアン積と選択関数 選択公理 整列可能定理, ツォルンの補題 基数と順序数 アレフ

第13章 集合論におけるパラドックス 222

序論 すべての集合の集合(カントールのパラドックス) ラッセルのパラドックス
 すべての順序数の集合(ブラリーフォルチのパラドックス) すべての基数の集合
 ある集合と対等なすべての集合のなす族 ある整列集合と相似なすべての集合のなす族

第Ⅲ部 関連話題

第14章 命題の代数	224
命題 合接(かつ) 離接(または) 否定 含意(条件命題) 双条件命題(必要十分条件命題) 多項式とブール多項式 命題と真理表 トートロジー(恒真)と恒偽 論理的に同値 命題の代数 論理的な含意(ならば) 論理的真と論理的に同値な命題	
第15章 限定作用素	247
命題関数と真理集合 全称作用素 存在作用素 限定作用素を含む命題の否定 反例 記号 1変数より多くの変数を含む命題	
第16章 ブール代数	257
定義 ブール代数の双対性 基本定理 ブール代数における順序 スイッチ回路図	
第17章 演繹	268
推論 推論とベン図 推論と命題 推論と限定作用素 条件命題と変形	
索引	279

第 I 部

集合の基本的理論

第 1 章

集合と部分集合

集 合

数学のすべての分野における基本的な概念は集合の概念である。直観的にいえば、**集合** (set) とは、ものを明確に定義したリスト、ものの集り、または、もののクラスのことをいう。集合において、ものとは、つぎの例からでもわかるように、数、人、文字、川などなんでもよい。これらのもののことを、集合の**要素**、または、**元** (elements, members) という。

これからは集合を抽象的なものとして研究していくけれども、ここでは 10 個の特別な集合の例をあげてみる。

例 1.1 : 数 1, 3, 7, 10

例 1.2 : 方程式 $x^2 - 3x - 2 = 0$ の解

例 1.3 : アルファベットの母音, a, e, i, o, u

例 1.4 : 地球上に住んでいる人間

例 1.5 : 3 人の学生, トム, デイック, ハリー

例 1.6 : 学校を休んでいる学生

例 1.7 : イギリス, フランス, デンマークの 3 か国

例 1.8 : ヨーロッパの首都

例 1.9 : 数 2, 4, 6, 8, ...

例 1.10: 合衆国にある川

ここにあげた奇数番目の例の集合は、その要素を実際に書きならべることで定義されているし、偶数番目の例の集合は、その集合の要素を決定する性質、すなわち、法則を述べることで集合を定義している。

記 号

集合はふつう大文字

$$A, B, X, Y, \dots$$

を用いて表され、その要素は小文字

$$a, b, x, y, \dots$$

を用いて表される。集合をその要素を書きならべることで定義する場合、たとえば、 A が数 1, 3, 7, 10 からなりたっている集合のとき

$$A = \{1, 3, 7, 10\}$$

のように書く。すなわち、要素をコンマで区切り、カッコ $\{ \}$ で包む。このような表し方を集合の外延形式という。それに対して、集合を、その要素が満たしている性質を述べることで定義する場合、た

例えば, B をすべての偶数の集合とすると, 任意の要素を表すために文字, ふつうは x を用いて

$$B = \{x \mid x \text{ は偶数}\}$$

のように書く. これを“ B は, x は偶数であるような数 x の集合”と読む. このような表し方を集合の内包形式という. 縦線“ $\mid$ ”を“ $\cdots$ であるような”と読む. 上述の使用法について明らかにするために, 例 1.1–1.10 をもう一度あげる. それらの集合をそれぞれ $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ とする.

例 2.1 : $A_1 = \{1, 3, 7, 10\}$

例 2.2 : $A_2 = \{x \mid x^2 - 3x - 2 = 0\}$

例 2.3 : $A_3 = \{a, e, i, o, u\}$

例 2.4 : $A_4 = \{x \mid x \text{ は地球上に住んでいる人間}\}$

例 2.5 : $A_5 = \{\text{トム, デイック, ハリー}\}$

例 2.6 : $A_6 = \{x \mid x \text{ は学生で, } x \text{ は学校を休んでいる}\}$

例 2.7 : $A_7 = \{\text{イギリス, フランス, デンマーク}\}$

例 2.8 : $A_8 = \{x \mid x \text{ は首都で, } x \text{ はヨーロッパにある}\}$

例 2.9 : $A_9 = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

例 2.10 : $A_{10} = \{x \mid x \text{ は川で, } x \text{ は合衆国にある}\}$

x が A の要素である, すなわち, A が要素の 1 つとして x を含むとき

$$x \in A$$

で表す. このとき“ x は A に属する”または“ x は A に入っている”という. 逆に x が A の要素ではないとき, すなわち, A は要素として x を含まないとき

$$x \notin A$$

で表す. 数学では記号の反対とか否定の意味を表すのに, その記号の上に縦線“ $\mid$ ”とか“ $/$ ”を書くことがよくある.

例 3.1 : $A = \{a, e, i, o, u\}$ とする. このとき, $a \in A$, $b \notin A$, $e \in A$, $f \notin A$ である.

例 3.2 : $B = \{x \mid x \text{ は偶数}\}$ とする. このとき, $3 \notin B$, $6 \in B$, $11 \notin B$, $14 \in B$ である.

有限と無限集合

集合は有限かまたは無限のどちらかである. 直観的にいえば, 集合が有限であるとは, 異なった要素のはっきりした個数からなるとき, すなわち, 集合の異なった要素を数えることができることをいう. そうでないとき集合は無限であるという. あとの章で無限集合と有限集合の正確な定義を述べる.

例 4.1 : M を 1 週間の曜日の集合とする. M は有限集合である.

例 4.2 : $N = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ とする. N は無限集合である.

例 4.3 : $P = \{x \mid x \text{ は地球上の川である}\}$ とする. 世界中の川の数を知ることは困難ではあるが, P は有限集合である.

集合の相等

集合 A と集合 B とが等しいとは, 両方の集合が同じ要素をもつときにいう. すなわち, A に属するすべての要素は B に属し, また B に属するすべての要素は A に属するときである. 集合 A と B が等しいことを

$$A = B$$

で表す.

例 5.1 : $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 1, 4, 2\}$ とする. このとき $A = B$, すなわち, $\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\}$.

1, 4, 2| である. というのは A の要素 1, 2, 3, 4 のどれも B に属しているし, また B の要素 3, 1, 4, 2 のどれも A に属しているからである. このことから集合はその要素の配列を変えてもかわらないことがわかる.

例 5.2 : $C = \{5, 6, 5, 7\}$, $D = \{7, 5, 7, 6\}$ とする. このとき $C = D$, すなわち, $\{5, 6, 5, 7\} = \{7, 5, 7, 6\}$ である. というのは C の各要素は D に属し, D の各要素は C に属するからである. このことから集合はその要素をくり返してもかわらないことがわかる. だから集合 $\{5, 6, 7\}$ は C と D に等しい.

例 5.3 : $E = \{x \mid x^2 - 3x = -2\}$, $F = \{2, 1\}$, $G = \{1, 2, 2, 1\}$ とする. このとき $E = F = G$ である.

空集合

空集合 (empty set), すなわち要素を含まない集合の概念を導入しておくくと便利である. この集合を時には**零集合** (null set) という. 空集合を $\emptyset$ で表す.

例 6.1 : A を 200 より多い年齢の地球上の人間とする. 知る限りでは A は空集合である.

例 6.2 : $B = \{x \mid x^2 = 4, x \text{ は奇数}\}$ とする. このとき B は空集合である.

部分集合

集合 A のすべての要素がまた集合 B の要素でもあるとき, A は B の**部分集合** (subset) という. すなわち, $x \in A$ ならば $x \in B$ であるとき A は B の部分集合である. この関係を

$$A \subset B$$

と表す. これを “ A は B に含まれる” と読む.

例 7.1 : 集合 $C = \{1, 3, 5\}$ は $D = \{5, 4, 3, 2, 1\}$ の部分集合である. それは C に属する各要素 1, 3, 5 は D にも属しているからである.

例 7.2 : 集合 $E = \{2, 4, 6\}$ は $F = \{6, 2, 4\}$ の部分集合である. それは E の各要素 2, 4, 6 は F にも属しているからである. 特に $E = F$ でもある. このようにすべての集合はそれ自身の部分集合になっていることがわかる.

例 7.3 : $G = \{x \mid x \text{ は偶数}\}$, すなわち, $G = \{2, 4, 6, \dots\}$ とし $F = \{x \mid x \text{ は 2 の正のべき乗}\}$, すなわち, $F = \{2, 4, 8, 16, \dots\}$ とする. このとき $F \subset G$, すなわち F は G に含まれている.

上に述べた部分集合の定義を用いて, 2 つの集合の等号の定義を言い換えることができる.

定義 1.1 : 2 つの集合 A と B が等しいとは, すなわち $A = B$ であるとは, $A \subset B$ および $B \subset A$ を満たしているときである.

A が B の部分集合ならば

$$B \supset A$$

とも表し, “ B は A を含む集合”, または “ B は A を含んでいる” という. さらに, A が B の部分集合でないとき

$$A \not\subset B \quad \text{または} \quad B \not\supset A$$

と表す.

最後に, つぎのことに注意する.

注意 1.1 : 空集合 $\emptyset$ はすべての集合の部分集合として考える.

注意 1.2 : A が B の部分集合でないとき, すなわち $A \not\subset B$ のとき, A の要素であり B の要素でない

ものが少なくとも1つ存在する.

真部分集合

任意の集合 A はそれ自身の部分集合であるが, B が A の部分集合で, A に等しくないとき, B は A の**真部分集合** (proper subset) であるという. もっと簡単にいえば, B が A の真部分集合であるとは,

$$B \subset A \quad \text{かつ} \quad B \neq A$$

のときである. 本によっては, “ B は A の部分集合” であるということを

$$B \subseteq A$$

で表し, “ B は A の真部分集合である” というのを

$$B \subset A$$

で表している. この本では, 部分集合と真部分集合を区別しなくてもよいとき前者の記号を用いる.

比較可能

2つの集合 A と B が比較できるとは

$$A \subset B \quad \text{あるいは} \quad B \subset A$$

のとき, すなわち集合の1つが他の集合に含まれているときにいう. さらに, 2つの集合 A と B が比較できないとは

$$A \not\subset B \quad \text{かつ} \quad B \not\subset A$$

のときにいう. もし A が B と比較できないならば, A に属する要素で B には属さないものがあり, さらに, B に属する要素で A には属さないものがある, ということがわかる.

例 8.1 : $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$ とする. このとき, A は B の部分集合だから, A は B と比較できる.

例 8.2 : $R = \{a, b\}$, $S = \{b, c, d\}$ とする. このとき, $a \in R$, $a \notin S$, $c \in S$ そして $c \notin R$ だから, R と S は比較できない.

定理と証明

数学では, 多くのことがらの正しいことを, 先に述べられている仮定と定義を用いて示すことができる. 事実, 数学の本質は定理と証明からなりたっている. 最初につぎのことを示す.

定理 1.1: A が B の部分集合で, B が C の部分集合ならば, A は C の部分集合である. すなわち

$$A \subset B \quad \text{かつ} \quad B \subset C \quad \text{ならば} \quad A \subset C$$

[証明] (A の任意の要素は C の要素であることを示さねばならない.) x を A の要素とする, すなわち, $x \in A$ とする. A は B の部分集合であるから, x は B に属する, すなわち $x \in B$ である. ところが, 仮定により $B \subset C$ であるから, B のすべての要素は, その中には x も含まれているが, C の要素である. このことは, $x \in A$ ならば $x \in C$ であることを示したことになる. 定義により, $A \subset C$ である.

集合の集合

集合の構成要素が集合それ自身であることがしばしばある. たとえば, A のすべての部分集合の集合などである. “**集合の集合**” (set of sets) という言い方をさけるために, ふつう “**集合族**” (family of sets) または “**集合の類**” (class of sets) という. このような状況のとき, 集合の族や類を表すのに, 混乱をさけるため, しばしば, 筆写体

$$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$$

を用いる。それは、大文字 $A, B, \dots$ はすでにそれら $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$ の要素を表しているからである。

例 9.1 : 幾何学においては、ふつう“直線族”または“曲線族”という言い方をする。それは直線も曲線もそれ自身点の集合であるからである。

例 9.2 : 集合 $\{|2, 3|, |2|, |5, 6|\}$ は集合族である。その要素は集合 $|2, 3|, |2|, |5, 6|$ である。

理論上、集合はその要素としていくつかは集合自身、またいくつかは集合でないものをもつことがある。しかしながら、集合の論理の応用においてこのようなことは稀なことである。

例 9.3 : $A = \{|2, |1, 3|, 4, |2, 5|\}$ 。このとき、 A のいくつかの要素は集合であり、またいくつかの要素は集合でないから、 A は集合族ではない。

全体集合

集合の理論の応用において、特定の研究分野で取り扱うすべての集合は、ある1つの定まった集合の部分集合のようなことがある。この集合のことを**全体集合** (universal set) という。この集合を U で表す。

例10.1 : 平面幾何学において、全体集合は平面における点全体からなる。

例10.2 : 人類学において、全体集合は世界中のすべての人間からなる。

ベキ集合

集合 S の部分集合全体の族を S の**ベキ集合** (power set) という。 S のベキ集合を

$$2^S$$

で表す。

例11.1 : $M = \{a, b\}$ とする。このとき

$$2^M = \{|a, b|, |a|, |b|, \phi\}$$

である。

例11.2 : $T = \{4, 7, 8\}$ とする。このとき

$$2^T = \{T, \{4, 7\}, \{4, 8\}, \{7, 8\}, \{4\}, \{7\}, \{8\}, \phi\}$$

である。

もし集合 S が有限集合で、その要素の個数を n とするならば、 S のベキ集合の要素の個数は 2^n であることがわかる。これがなぜ S の部分集合の族は S のベキ集合といわれ、 2^S で表されるかの1つの理由である。

互いに素な集合

集合 A と B が共通な要素をもたないなら、すなわち、 A の要素は B に入らないで、 B の要素は A に入らないなら A と B は互いに素であるという。

例12.1 : $A = \{1, 3, 7, 8\}$, $B = \{2, 4, 7, 9\}$ とする。このとき A と B は互いに素ではない。理由は7が両方の集合に入っている、すなわち、 $7 \in A$ かつ $7 \in B$ であるからである。

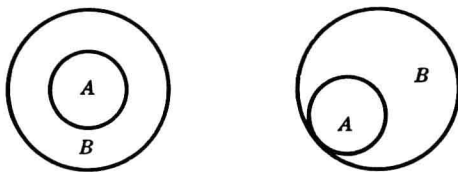
例12.2 : A を正の数の集合、 B を負の数の集合とする。このとき正でありかつ負である数はないので A と B は互いに素である。

例12.3 : $E = \{x, y, z\}$, $F = \{r, s, t\}$ とする。このとき E と F は互いに素である。

ベン・オイラー図

集合の間の関係を簡単にわかりやすく図に表す方法をベン・オイラー図、簡単にベン図という。集合を簡単な平面上の領域、ふつう円で囲んだ領域で表す。

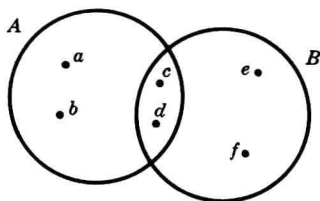
例13.1 : $A \subset B$ で $A \neq B$ とする。このとき A と B はつぎのどちらかで表される。



例13.2 : A と B は比較されないとする。 A と B は互いに素ならば下の右の図、互いに素でないならば下の左の図で表される。



例13.3 : $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$ とする。このときつぎのようなベン図でこれらの集合を表す。



線 図

2つの集合の関係を示す他の便利でわかりやすい方法に線図といわれるものがある。 $A \subset B$ のとき B を A の上に書きそれらを線で結び

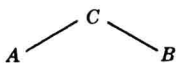


で表す。 $A \subset B$ で $B \subset C$ のときは

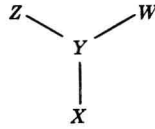


で表す。

例14.1 : $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{a, b\}$ とする。このとき A, B, C の線図は



例14.2 : $X = \{x\}$, $Y = \{x, y\}$, $Z = \{x, y, z\}$, $W = \{x, y, w\}$ とする. このとき X, Y, Z, W の線図は



集合論の公理的展開

数学の1つの分野の公理的展開では, つぎのことからはじめる.

- (1) 無定義用語
- (2) 無定義関係
- (3) 無定義用語と無定義関係を有する公理

つぎに, 公理や定義をもとにして定理を構成していく.

例15.1 : 平面ユークリッド幾何の公理的展開においては,

- (1) “点”と“直線”は無定義用語である.
- (2) “直線上の点”, または同じことであるが“直線は点を含む”ということは無定義関係である.
- (3) つぎの2つの公理がある.

公理1: 2つの異なった点は1つのそしてただ1つの直線上にある.

公理2: 2つの異なった直線は共通点を1つよりも多くは含まない.

集合論の公理的展開においては,

- (1) “要素”と“集合”は無定義用語である.
- (2) “要素は集合に属する”は無定義関係である.
- (3) つぎの2つの公理がある.

外延性の公理: 2つの集合 A と B とが等しいとは, A のすべての要素は B に属し, B のすべての要素は A に属することである.

分出公理: $P(x)$ は任意のことがらとし A は任意の集合とする. このとき集合

$$B = \{a \mid a \in A, P(a) \text{ は真である} \}$$

が存在する.

ここで, $P(x)$ はただ1つの変数を含む文章で, 任意の $a \in A$ に対して $P(a)$ は真であるか偽であるかがはっきりしている. たとえば, $P(x)$ として “ $x^2 = 4$ ” または “ x は国際連合のメンバーである” などがある. あとの章で取り扱う概念に関する公理で, 他の公理もある. 集合論のこの本での述べ方は, とくに第I部では, 直観的に扱うので, 集合論の公理的展開をくわしく述べることはさける.

演習問題

記号

1. つぎの命題を集合の記号を用いて書け.

- (1) x は A に属さない. (4) F は G の部分集合ではない.
 (2) R は S を含む集合である. (5) H は D を含んでいない.
 (3) d は E の構成要素である.

解:

- (1) $x \notin A$ (2) $R \supset S$ (3) $d \in E$ (4) $F \not\subset G$ (5) $H \not\supset D$

2. $A = \{x \mid 2x=6\}$ とし, $b=3$ とする. このとき $b=A$ であるか.

解:

A はただ 1 つの要素 3 からなる集合, すなわち, $A = \{3\}$ である. 数 3 は A に属しているが A に等しくはない. ここに要素 x と集合 $\{x\}$ との間の基本的な違いがある.

3. $M = \{r, s, t\}$ とする. 言い換えれば, M は要素 r, s, t からなっているものとする. つぎの 4 つの命題はそれぞれ正しいか誤りを調べよ. 誤りならばその理由を述べよ.

- (a) $r \in M$ (b) $r \subset M$ (c) $\{r\} \in M$ (d) $\{r\} \subset M$

解:

(a) 正しい.

(b) 誤りである. 記号 $\subset$ は 2 つの集合を関係づける記号であって, 1 つの集合が他の集合の部分集合であるということを意味している. r は M の構成要素であり部分集合ではないので, $r \subset M$ は誤りである.

(c) 誤りである. 記号 $\in$ は集合に対しての“もの”を関係づける記号であり, その“もの”は集合の構成要素であることを意味する. $\{r\}$ は M の部分集合であり, M の構成要素ではないので誤りである.

(d) 正しい.

4. つぎのことがらを言葉で述べ, さらに外延形式で書け.

- (1) $A = \{x \mid x^2 = 4\}$
 (2) $B = \{x \mid x - 2 = 5\}$
 (3) $C = \{x \mid x \text{ は正の数, } x \text{ は負の数}\}$
 (4) $D = \{x \mid x \text{ は“correct”という単語に用いられている文字}\}$

解:

(1) “ A は, x の平方が 4 になるような x の集合”と読む. 平方して 4 になる数は 2 と -2 だけであるから, $A = \{2, -2\}$ である.

(2) “ B は, x マイナス 2 は 5 であるような x の集合”と読む. 解は 7 だけであるから, $B = \{7\}$ である.