# SYSTEMANALYSE

WUNSCH

BAND 3

Wunsch · SYSTEMANALYSE

# SYSTEMANALYSE

## BAND 3 DIGITALE SYSTEME

von Prof. Dr.-Ing. habil. Gerhard Wunsch

unter Mitarbeit von Dr.-Ing. Wolfgang Schwarz

2., unveränderte Auflage



VT

VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

VEB Verlag Technik Berlin 1973
Dg.-Nr. 370/196/73
ES 20 K 5
VT 3/3/4433-2
Lektor Dipl.-Ing. Monika Rumpf
Schutzumschlag: Kurt Beckert
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: Offizin Andersen Nexö in Leipzig
Bestellnummer: 551 736 1

# VORWORT

Die stürmische Entwicklung der Informationstechnik und Datenverarbeitung bringt es mit sich, daß unter den vielen Klassen technischer Systeme die digitalen Systeme eine ständig wachsende Bedeutung erhalten. Die hier entwickelten Begriffsbildungen und Methoden haben nicht nur die übrigen Teilgebiete der Systemtheorie in bedeutendem Maße befruchtet, sondern werden mehr und mehr – zusammen mit Begriffen älterer Teilgebiete der Systemtheorie – zum allgemeinen theoretischen Fundament der Theorie von den dynamischen Systemen überhaupt. Diese sich gegenwärtig herausbildende „Allgemeine Systemtheorie“ („Mathematische Systemtheorie“) benutzt in großem Umfang das Ideengut und die Sprache der Mengenlehre, der Relationentheorie und der Algebra, und beim Studium nichtdigitaler Systeme kommen noch funktionalanalytische Methoden hinzu.
Bei der Abfassung des dritten Bandes der „Systemanalyse“ waren daher besonders diese allgemeinen Tendenzen zur höheren Abstraktheit und Allgemeinheit zu berücksichtigen und in einer für Studenten mit dem Grundstudium „Elektroingenieurwesen“ möglichst leicht verständlichen Form darzulegen. Daß das Studium des dritten Bandes möglicherweise trotzdem mehr Schwierigkeiten bereiten wird, liegt nicht an der Kompliziertheit der Gedankengänge an sich, sondern an der mangelnden Vertrautheit mit einer ganz neuen Hierarchie von Begriffen.
Wie in den ersten beiden Bänden wird daher das Hauptgewicht auf eine erste Einführung in die allgemeine und moderne Begriffs- und Denkwelt der Systemtheorie, hier speziell der Theorie digitaler Systeme, gelegt. Damit wurde auch den Auffassungen über moderne und zeitgemäße Ausbildungsweisen Rechnung getragen. Spezielle Analyseverfahren und insbesondere Probleme der Synthese wurden nicht aufgenommen und bleiben – dem Hochschulunterricht angepaßt – Gegenstand spezieller Vorlesungen über digitale Systeme und Automaten. Es liegt in der Natur der Sache, daß bei einer solchen Zielstellung die mathematische Fundierung noch stärker als bei den beiden anderen Bänden zu berücksichtigen war, da keinerlei mathematische Vorkenntnisse auf dem Gebiet der Mengenlehre und Algebra vorausgesetzt werden sollten und bei dem angesprochenen Leserkreis – zumindest gegenwärtig – auch nicht vorausgesetzt werden können.
Meinem ehemaligen Assistenten, Herrn Dr.-Ing. *W. Schwarz*, möchte ich an dieser Stelle für seine wertvolle und aktive Unterstützung bei der Anfertigung des Manuskriptes meinen Dank aussprechen. Frau Dipl.-Ing. *Rumpf* gilt mein Dank für die gute Zusammenarbeit bei der Herstellung des Manuskriptes.

*G. Wunsch*

# INHALTSVERZEICHNIS

# 1. MENGEN

## 1.1. Mengeneigenschaften

### 1.1.1. *Menge und Teilmenge*

**Menge und Element.** Zu den elementaren Grundbegriffen der Mathematik gehört der Begriff der *Menge*. Man kann den Mengenbegriff daher nicht durch eine strenge Definition auf andere Begriffsbildungen zurückführen, sondern muß versuchen, anhand von Beispielen und allgemeinen Umschreibungen eine ausreichende Vorstellung von dem Inhalt dieses elementaren Grundbegriffs zu erhalten.
Mengen sind z.B.

1. die Gesamtheit $M_1$ der Einwohner Dresdens,
2. die Gesamtheit $M_2$ der Primzahlen kleiner als 10,
3. die Gesamtheit $M_3$ der reellen Lösungen einer algebraischen Gleichung,
4. die Gesamtheit $M_4$ aller Kreise mit einem Radius $r$ aus dem Intervall $1 \leqq r < 3$.

Eine Menge ist also eine Zusammenfassung von Dingen (der Erfahrung oder des Denkens). Durch Nennung von Merkmalen, Eigenschaften oder Bedingungen werden bestimmte Dinge ausgewählt und zu einer Gesamtheit oder einer Menge zusammengestellt. Dabei setzen wir voraus, daß die Auswahlkriterien so beschaffen sind, daß immer eindeutig entschieden werden kann, ob ein bestimmtes Ding zur genannten Menge gehört oder nicht.
Die ausgesonderten und zu einer Menge zusammengefaßten Dinge werden mit kleinen lateinischen Buchstaben $a, b, \ldots, m, n, \ldots$ bezeichnet. Die Mengen selbst erhalten zur Kennzeichnung große lateinische Buchstaben, z.B. $A, B, \ldots, M, N, \ldots$ Sehr oft werden diese Symbole auch noch zur weiteren Unterscheidung mit Indizes versehen, z.B. $m_1, m_2, \ldots$ usw.
Ist das Ding $m$ (genauer: das durch $m$ bezeichnete Ding) Bestandteil der Menge $M$ (der durch $M$ bezeichneten Menge), so sagen wir, „$m$ ist (ein) *Element* von $M$", und schreiben

$$m \in M \quad (\text{oder } M \ni m). \tag{1.1a}$$

Ist das nicht der Fall, so schreiben wir

$$m \notin M. \tag{1.1b}$$

Beispielsweise ist in den obengenannten Mengen $7 \in M_2$, aber $4 \notin M_2$. Um eine Menge zu fixieren, schreibt man auch kurz

$$M = \{m | \cdots (\text{Bedingungen}) \cdots\} \tag{1.1c}$$

und liest: Menge aller $m$, für die gilt ...

Die Mengen, die nach den vorstehenden Erklärungen gebildet werden können, können endlich oder auch unendlich viele Elemente enthalten. So ist beispielsweise die Menge aller natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... eine *unendliche Menge* (Menge mit unendlich vielen Elementen), die Mengen $M_1$ und $M_2$ in obiger Aufstellung sind dagegen *endlich*.

Bei endlichen Mengen können wir die einzelnen Elemente angeben und damit gleichzeitig die Menge genauer charakterisieren, z.B. nach vorstehendem

$$M_2 = \{2, 3, 5, 7\}$$

und allgemeiner

$$M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}. \tag{1.2a}$$

Anstelle der letzten Schreibweise kann man auch notieren

$$M = \{m_\nu, \nu \in I\}, \quad I = \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{1.2b}$$

Man nennt $I$ die *Indexmenge* der Menge $M$. Durch jede Zahl $\nu$ aus der Menge $I$ wird ein bestimmtes Element $m_\nu$ aus $M$ fixiert.

Die zuletzt angegebene Schreibweise hat den Vorteil, daß sie leicht auf unendliche Mengen übertragen werden kann, indem man nur die Indexmenge $I$ entsprechend wählt, z.B. für $I$ die Menge der natürlichen oder der reellen Zahlen vorgibt.

Es ist erforderlich, die mit dem Mengenbegriff verknüpften Grenzfälle noch genauer zu betrachten.

Zunächst bemerken wir, daß die durch eine geschweifte Klammer zusammengefaßten Elemente $m_\nu$ in (1.2a) in jeder beliebigen Reihenfolge angegeben werden können; z.B. bedeutet $\{1, 3, 5\}$ dasselbe wie beispielsweise $\{3, 1, 5\}$, nämlich die Menge der ersten drei ungeraden natürlichen Zahlen.

Eine Menge $M$ enthält in der Regel mehrere, wenn nicht gar unendlich viele Elemente. Im Sonderfall kann $M$ aber auch nur ein einziges Element enthalten. Zum Beispiel ist die Menge aller geradzahligen Lösungen der Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

eine *einelementige Menge*, nämlich die Menge $M = \{2\}$, da $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ die beiden Lösungen der Gleichung sind. Man muß also logisch die einelementige Menge $\{m\}$ von ihrem einen Element $m$ unterscheiden:

$$m \in \{m\}.$$

Damit sind aber die Grenzfälle für „kleine" Mengen noch nicht erschöpft. Es ist nützlich, auch die Menge zu betrachten, die gar kein Element enthält. Diese Menge heißt *leere Menge* und erhält das Symbol $\emptyset$.

Wenn eine die Menge $M$ definierende Bedingung gegeben ist, so steht nicht immer von vornherein sofort fest, ob es überhaupt wenigstens ein Ding gibt, das die genannte Bedingung erfüllt. Wenn es kein die Mengenbedingung erfüllendes Ding gibt, ist – wie wir sagen – die zugehörige Menge *leer*. Es gilt also stets $m \notin \emptyset$.

Ist beispielsweise $M$ gegeben durch die Menge aller Lösungen der Gleichung

$$x + 2 = x + 3,$$

so gilt $M = \emptyset$, denn diese Gleichung 1. Grades hat offenbar keine Lösungen.
**Teilmenge.** Bildet man verschiedene Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$, so kann es sein, daß einzelne dieser Mengen bestimmte Elemente gemeinsam haben. Ist beispielsweise

$$M_1 = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$M_2 = \{2, 4, 6, 8\},$$

$$M_3 = \{2, 4\},$$

so haben $M_1$ und $M_2$ die Elemente 2 und 4 gemeinsam. In $M_1$ gibt es dann noch Elemente, die nicht in $M_2$ enthalten sind, und umgekehrt. Anders verhält sich die Menge $M_3$: In $M_3$ gibt es keine Elemente, die nicht auch in $M_1$ bzw. $M_2$ vorkommen.
Wir definieren nun:

Ist jedes Element der Menge $M$ auch Element der Menge $N$, so heißt $M$ eine *Teilmenge* von $N$. Man schreibt symbolisch

$$M \subset N \quad \text{oder} \quad N \supset M. \tag{1.3a}$$

Werden die Elemente einer Menge durch Punkte angedeutet, so kann man die Teilmenge $M$ einer Menge $N$ wie im Bild 1.1 veranschaulichen.

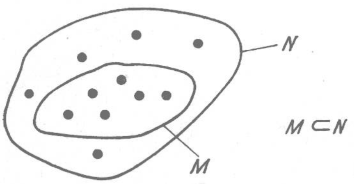


*Bild 1.1. Menge und Teilmenge*

Beispielsweise ist $\{2, 3\} \subset \{2, 3, 4\}$, aber nach Definition auch $\{2, 3\} \subset \{2, 3\}$. Allgemein gilt

$$M \subset M. \tag{1.3b}$$

In Worten: *Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst.*
Zur bequemeren Schreibweise und zur besseren Wiedergabe der logischen Struktur einer Aussage werden wir weiterhin eine besondere Symbolik verwenden.
Wenn aus einem Sachverhalt $\mathfrak{A}$ ein Sachverhalt $\mathfrak{B}$ folgt, so schreiben wir kurz

$$\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}. \tag{1.4a}$$

Damit ist also auch folgendes gemeint:

„*Wenn* $\mathfrak{A}$ (gilt), *so* (gilt) $\mathfrak{B}$“,

„aus $\mathfrak{A}$ folgt $\mathfrak{B}$“,

„$\mathfrak{A}$ zieht $\mathfrak{B}$ nach sich“.

Wenn z.B. $\mathfrak{A}$ bedeutet, daß festgestellt wurde, $x$ ist eine natürliche Zahl, so gilt

$$\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B},$$

wenn $\mathfrak{B}$ die Eigenschaft einer Zahl, zu den reellen Zahlen zu gehören, bezeichnet. In diesem Beispiel gilt dann aber nicht allgemein auch $\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A}$. Ist aber in einem anderen Fall sowohl $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ als auch $\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A}$ richtig, so schreiben wir

$$\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}, \tag{1.4b}$$

was also bedeutet

„*genau dann, wenn* ($\mathfrak{A}$ gilt, gilt $\mathfrak{B}$)",

„aus $\mathfrak{A}$ folgt $\mathfrak{B}$ und umgekehrt",

„$\mathfrak{A}$ ist gleichbedeutend mit $\mathfrak{B}$".

Die Teilmengeneigenschaft *(Inklusion)* hätten wir in dieser Symbolik wie folgt wiederzugeben:

$$M \subset N \Leftrightarrow \langle(\text{für alle})\ m \in M \Rightarrow m \in N\rangle. \tag{1.5a}$$

Man kann aber auch noch eine andere, für manche Betrachtungen nützlichere und mit der vorstehenden gleichwertige Definition für die Teilmenge angeben. Wir behaupten den (vgl. Bild 1.1)
*Satz:* Es gilt

$$M \subset N \Leftrightarrow \langle(\text{für alle})\ m \notin N \Rightarrow m \notin M\rangle. \tag{1.5b}$$

Dieser Satz läßt sich (in ausführlicher Aufgliederung) wie folgt beweisen.
*Teil 1:* Es wird gezeigt, daß die rechte Seite aus der linken folgt.

*Voraussetzung:* (Für alle) $m \in M \Rightarrow m \in N$.

*Behauptung:* (Für alle) $m \notin N \Rightarrow m \notin M$.

Wir nehmen an, diese Behauptung sei falsch, d.h., wir nehmen an, daß nicht für alle $m \notin N \Rightarrow m \notin M$, daß also mindestens ein $m_1 \notin N$ existiert, so daß gilt $m_1 \in M$. Dann müßte nach Voraussetzung auch gelten $m_1 \in N$. Diese Folgerung aber steht im Widerspruch zur Annahme $m_1 \notin N$, d.h., ein $m_1$ mit den angenommenen Eigenschaften kann es nicht geben, und die ausgesprochene Behauptung ist damit richtig.
In gleicher Weise zeigt man, daß die in (1.5b) auf der linken Seite stehende Aussage aus der auf der rechten Seite stehenden folgt. Der obige Satz ist damit bewiesen.
Speziell ist die rechte Seite von (1.5b) für die leere Menge $M = \emptyset$ bei beliebiger Menge $N$ richtig; denn natürlich gilt stets

$$(\text{für alle})\ m \notin N \Rightarrow m \notin \emptyset \quad (N \text{ beliebig})$$

oder, was mit (1.5b) dasselbe ist,

$$\emptyset \subset N. \tag{1.5c}$$

In Worten: *Die leere Menge ist Teilmenge einer jeden Menge.*
Ergänzend zum Teilmengenbegriff sei noch folgender Satz angeführt.

*Satz:* $$\langle \text{Aus } M \subset N \quad \text{und} \quad N \subset P \rangle \Rightarrow M \subset P. \tag{1.6}$$

*Beweis:* Nach Voraussetzung gilt

$$(\text{für alle})\ m \in M \Rightarrow m \in N$$

und

$$(\text{für alle})\ m \in N \Rightarrow m \in P.$$

Somit gilt auch

$$(\text{für alle})\ m \in M \Rightarrow m \in P$$

oder $M \subset P$, was zu zeigen war.
Die Richtigkeit dieses Satzes wird auch unmittelbar aus Bild 1.2 verständlich.

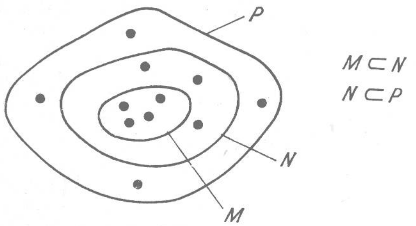


*Bild 1.2. Menge und Teilmenge*

**Gleichheit von Mengen.** Wir definieren zunächst:
Zwei Mengen $M$ und $N$, die „die gleichen Elemente" enthalten, heißen ***gleich***, in Zeichen

$$M = N. \tag{1.7a}$$

Dabei sagen wir, zwei Mengen $M$ und $N$ haben die gleichen Elemente, wenn gilt

$$\text{für alle } m \in M \Rightarrow m \in N$$

und

$$\text{für alle } m \in N \Rightarrow m \in M$$

oder – was das gleiche ist – wenn gilt $M \subset N$ und $N \subset M$. Damit kommen wir zur folgenden präzisierten Gleichheitsdefinition:

$$M = N \Leftrightarrow \langle M \subset N \quad \text{und} \quad N \subset M \rangle. \tag{1.7b}$$

Sind $M$ und $N$ nicht gleich, d.h., gilt mindestens eine der Beziehungen $M \subset N$, $N \subset M$ nicht, so schreiben wir

$$M \neq N. \tag{1.7c}$$

Ist $M \subset N$, so kann, wie dargelegt, auch $M = N$ sein. Ist das nicht der Fall, ist $M \neq N$, so heißt $M \subset N$ eine *echte Teilmenge* von $N$.
Definitionsgemäß ist dann z.B.

$$\{1, 2, 2, 2\} = \{1, 2\} = \{2, 1\}$$

und

$$\{a, a, \ldots, a\} = \{a\}.$$

Man erhält also keine neue Menge aus einer gegebenen dadurch, daß man ihre Elemente mehrfach aufnimmt.
Wir bemerken noch, daß natürlich für beliebige Mengen $M$, $N$, $P$ analog zu (1.3b) und (1.6) gilt

$$M = M \tag{1.8a}$$

$$\langle \text{Aus } M = N \quad \text{und} \quad N = P \rangle \Rightarrow M = P. \tag{1.8b}$$

Die Beweise sind elementar und können dem Leser überlassen werden.

### 1.1.2. *Mengen höherer Stufe*

**Mengensysteme und -familien.** Mengen sind selbst Dinge, die man wieder zu einer Menge (von Mengen) zusammenfassen kann:

$$\mathbf{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\} \tag{1.9a}$$

oder, bei unendlich vielen Mengen $M_\nu$,

$$\mathbf{M} = \{M_\nu, \nu \in I\}. \tag{1.9b}$$

Solche Mengen von Mengen heißen *Mengensysteme* und werden durch halbfett gesetzte große lateinische Buchstaben (oder durch Unterstreichung) gekennzeichnet.
Ebenso kann man mehrere (unendlich viele) Mengensysteme zusammenfassen und erhält eine Menge von Mengensystemen, die wir als *Mengenfamilie* bezeichnen wollen:

$$\boldsymbol{\mathfrak{M}} = \{\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_n\} \tag{1.10a}$$

oder auch

$$\boldsymbol{\mathfrak{M}} = \{\mathbf{M}_\nu, \nu \in I\}. \tag{1.10b}$$

Mengenfamilien erhalten als Symbol einen halbfett gesetzten (oder unterstrichenen) deutschen Buchstaben.
Man nennt Mengensysteme auch *Mengen 2. Stufe* und Mengenfamilien entsprechend *Mengen 3. Stufe*. Die bisher betrachteten (gewöhnlichen) Mengen $M$ werden dann folgerichtig auch als *Mengen 1. Stufe* bezeichnet. (Die Elemente $m$ von $M$ sind bei dieser Auffassung Mengen 0. Stufe.)
Das oben dargelegte Prinzip der Bildung von Mengen aus Mengen kann offenbar beliebig fortgesetzt werden, wobei man zu Mengen einer beliebigen Stufenzahl $k$

($k = 1, 2, \ldots, n$) gelangt, die man auch mit $M^{[k]}$ symbolisiert. Speziell ist dann zu setzen

$$\begin{aligned} M^{[0]} &= m, \\ M^{[1]} &= M, \\ M^{[2]} &= \boldsymbol{M}, \\ M^{[3]} &= \mathfrak{M}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Eine *Menge k-ter Stufe* besteht dann ausschließlich aus Mengen ($k-1$)-ter Stufe, d.h., die Elemente von $M^{[k]}$ sind die Mengen $M^{[k-1]}$:

$$M^{[k-1]} \in M^{[k]}. \tag{1.12}$$

Beispielsweise ist eine Schachtel Streichhölzer eine Menge 1. Stufe, wenn die einzelnen (als verschieden angesehenen) Hölzer als Mengen 0. Stufe (Urdinge, Individuen) genommen werden. Ein Paket Streichhölzer bildet dann ein Mengensystem und ein Karton mit Paketen eine Mengenfamilie.
Geht man von den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... aus, so kann man in der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ folgende Teilmengen bilden:

$$\begin{aligned} M_1 &= \text{Menge aller Primzahlen} = \{2, 3, 5, 7\}, \\ M_2 &= \text{Menge aller geraden Zahlen} = \{2, 4, 6, 8, 10\}, \\ M_3 &= \text{Menge aller Vielfachen von } 3 = \{3, 6, 9\}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\boldsymbol{M} = \{M_1, M_2, M_3\} = \{\{2, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6, 8, 10\}, \{3, 6, 9\}\}$$

ein Mengensystem und z.B.

$$\mathfrak{M} = \{\{M_1, M_2\}, \{M_1, M_3\}\}$$

eine Mengenfamilie.
Allgemein erhält man immer ein Mengensystem, wenn man Teilmengen $M_\nu \subset M$ einer Menge $M$ zu einer neuen Menge zusammenfaßt:

$$\boldsymbol{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}, \quad M_\nu \subset \dot{M}. \tag{1.13}$$

Der Teilmengen- und Gleichheitsbegriff wird in natürlicher Weise auf Mengen beliebiger Stufe übertragen. So ist (in Mengensystemen) $\boldsymbol{M}$ eine Teilmenge von $\boldsymbol{N}$, wenn [analog (1.5a)] jedes Element $M$ aus $\boldsymbol{M}$ auch in $\boldsymbol{N}$ enthalten ist:

$$\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N} \Leftrightarrow \langle \text{für alle } M \in \boldsymbol{M} \Rightarrow M \in \boldsymbol{N} \rangle. \tag{1.14}$$

Analog zu (1.7b) ist die Gleichheit für Mengensysteme definiert.
Es bereitet keine Schwierigkeiten, diese Definitionen auf Mengen $k$-ter Stufe zu übertragen:

$$\begin{aligned} M^{[k]} \subset N^{[k]} &\Leftrightarrow \langle \text{für alle } M^{[k-1]} \in M^{[k]} \Rightarrow M^{[k-1]} \in N^{[k]} \rangle, \\ M^{[k]} = N^{[k]} &\Leftrightarrow \langle M^{[k]} \subset N^{[k]} \quad \text{und} \quad N^{[k]} \subset M^{[k]} \rangle. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Man beachte, daß die durch $\subset$ und $=$ symbolisierten Mengenbeziehungen per definitionem aber nur zwischen Mengen gleicher Stufe einen Sinn haben. $M \subset \mathbf{M}$ oder $m = \mathfrak{M}$ sind also z.B. sinnlose Ausdrücke.
Da nach (1.15) die im Abschn. 1.1.1. gegebenen Definitionen ungeändert auf alle Mengenstufen übertragen werden, ergeben sich auch für Mengen beliebiger Stufe gleichartige Folgerungen, die wir im einzelnen aber nicht mehr zu wiederholen brauchen, da ja entsprechend (1.15) nur $M, N, \ldots$ durch $M^{[k]}, N^{[k]}, \ldots$ ersetzt werden müßte. Insbesondere ist jeder Menge $M^{[k]}$ $k$-ter Stufe eine leere Menge gleicher Stufe zuzuordnen. Wir werden das leere Mengensystem mit $\underline{\emptyset}$ oder $\emptyset^{[2]}$, die leere Mengenfamilie mit $\underline{\underline{\emptyset}}$ oder $\emptyset^{[3]}$ kennzeichnen. Dann ist $\underline{\emptyset} \subset \mathbf{M}$, $\underline{\underline{\emptyset}} \subset \mathfrak{M}$ usw. Man beachte auch, daß z.B. die leere Menge $\emptyset$ ein Element des nicht leeren Mengensystems $\{\emptyset\}$ ist: $\emptyset \in \{\emptyset\}$. Andererseits ist wieder stets $M \notin \underline{\emptyset}$, also auch $\emptyset \notin \underline{\emptyset}$.
**Potenzmenge.** Man kann von einer Menge $M$ die Menge aller ihrer Teilmengen bilden. Dieses Mengensystem $\mathbf{M}$ heißt *Potenzmenge* der Menge $M$, und man schreibt

$$\mathbf{M} = \mathfrak{U}(M). \tag{1.16}$$

Zur Menge aller Teilmengen von $M$ gehören definitionsgemäß auch die leere Menge $\emptyset$ und die Menge $M$ selbst; denn es gilt mit (1.3b) und (1.5c) $\emptyset \subset M$ und $M \subset M$ und somit $\emptyset \in \mathfrak{U}(M)$ und $M \in \mathfrak{U}(M)$.
Ist beispielsweise $M = \{a, b, c\}$, so ist

$$\mathfrak{U}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, M\}.$$

Um also die Potenzmenge $\mathfrak{U}(M)$ der $n$-elementigen Menge $M$ zu erhalten, muß man alle einelementigen, weiter alle zweielementigen, alle dreielementigen Teilmengen bilden usw. Dieses Mengenbildungsverfahren führt bis zur Menge aller $(n-1)$-elementigen Teilmengen. Nimmt man dann noch $\emptyset$ und $M$ hinzu, so erhält man $\mathfrak{U}(M)$.
Natürlich kann man zu $\mathbf{M} = \mathfrak{U}(M)$ wieder die Potenzmenge bilden usw. Für die Potenzmenge von $\mathfrak{U}(M)$ schreiben wir dann

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{U}(\mathbf{M}) = \mathfrak{U}\,[\mathfrak{U}(M)]. \tag{1.17}$$

Dabei erhält man nun eine Mengenfamilie. Offenbar gilt allgemein: Ist $M^{[k]}$ eine Menge $k$-ter Stufe, so ist $\mathfrak{U}(M^{[k]})$ von $(k+1)$-ter Stufe.
Als Beispiel bilden wir $\mathfrak{U}\,[\mathfrak{U}(M)]$ für $M = \{a\}$.
Es ist zunächst

$$\mathfrak{U}(M) = \{\emptyset, M\}$$

und deshalb

$$\mathfrak{U}\,[\mathfrak{U}(M)] = \{\underline{\emptyset}, \{\emptyset\}, \{M\}, \{\emptyset, M\}\}.$$

Abschließend beweisen wir noch folgenden Satz über endliche Mengen.

*Satz: Die Potenzmenge $\mathfrak{U}(M)$ einer Menge $M$ mit $n$ Elementen enthält $2^n$ Elemente.*