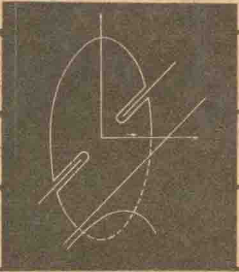
张宗燧 著



色散关系引论

上册

科学出版社

色散关系引论

上册

色散关系引论

（上 册）

张宗燧 著

科学出版社

1980

内 容 简 介

本书较全面地介绍了色散关系理论，内容分为五个部分．第一部分介绍量子场论的一些有关问题，例如角动量、散射理论及各种反演等，可作为大学量子力学课程的补充教材．第二部分以 $N\pi$ 散射为例，讨论了单色散关系及有关的交叉对称、么正条件、单色散关系的证明等问题；这一部分还介绍了场论中的一些模型．第三部分介绍双色散关系及由此得到的分波色散关系；这部分还讨论了位势散射．第四部分是用微扰论写出振幅理论，并着重讨论了它的解析性、奇异性，讨论偏重于一般理论和最简单的图形．第五部分扼要地介绍了有关 Regge 极点的理论．

本书分成上、下两册出版，上册包括第一部分和第二部分，下册包括其余三个部分．

本书可供从事理论物理和核物理工作的科研人员、大专院校有关专业的教师、研究生和高年级学生等参考．

色 散 关 系 引 论
（上 册）

张 宗 燧 著

*

科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1980 年 11 月第 一 版　　开本：850×1168 1/32
1980 年 11 月第一次印刷　　印张：11 3/8
印数：精：1—1,840　　插页：精 3 平 2
　　　平：1—1,770　　字数：200,000

统一书号：13031·1278
本社书号：1778·13—3

定 价：精 装 本 2.65 元
　　　　平 装 本 2.15 元

前　言

张宗燧教授是中国著名的理论物理学家，原数学研究所研究员，学部委员．生前领导数学研究所前理论物理研究室的工作．他除了自己从事研究工作外，还积极主持研究室举办的讨论班工作，培养青年一代．当时参加讨论班的不仅有数学所的人员，还有不少其他有关单位的科研人员．本书就是他根据1962—1963年在讨论班上的讲稿修改补充而成．1965年写成后交科学出版社出版，原已排好上册，因文化大革命，未能出版．

张宗燧教授在文化大革命中不幸被"四人帮"一伙迫害致死，未能目睹此书的出版，实为一大憾事．1978年3月，科学院根据党中央政策，为张宗燧教授宣布平反，使他的不白之冤得到昭雪，本书也能够和读者见面．

张宗燧教授早年留学英、美，攻读数学和物理学，回国后从事教学和研究工作．他的数学和物理学造诣都很高，发表过不少研究论文和著作．他毕生治学严谨，一丝不苟．他热爱党，对党的科学事业具有献身精神．晚年虽患有严重的神经衰弱症，仍然不顾病魔的折磨，积极从事研究和培养青年的工作，并且力疾写成本书．他生前对本书的编著十分认真和负责任，进行了多次修改，脱稿之时曾热烈期望本书早日与读者见面，为我国的科研和教学工作贡献一份力量．不幸他被迫致死，不能目睹本书的出版，更使他不能再为实现四个现代化贡献自己的一份力量，悲夫！

我国已进入实现四个现代化的新时期，实现科学技术现代化是头等重要的任务，科学出现了新的春天．张宗燧教授编著的本书能够在此时和读者见面，为我国科学的发展献出一分光和热，这又是不幸中的大幸了．

我和宗燧交往多年，当本书出版之际，能写一短序于书首，以

志哀思，并向读者推荐本书，深感欣慰.

本书在出版过程中，得到数学所前理论物理研究室的同志协助校阅和解决各种遗留问题，代致谢意.

华 罗 庚

1979 年 2 月

序　言

本书主要是根据1962—1963年中国科学院数学研究所理论物理研究室讨论班讨论的内容编写而成的. 在编写过程中，当然也体现了著者自己的一些观点，因此本书内容有任何不妥之处，均由著者负责，与数学所理论物理室无关.

本书的目的，正如标题所示，是向有志于此方面的读者较全面地介绍色散关系理论. 在编写过程中，著者曾力求贯彻少而精的原则，希望将色散关系理论的主要问题尽可能扼要而清楚地正确表达出来. 但由于著者的水平和精力所限，此项目标恐远未达到. 书中有些问题写得比较细致而冗长，这样做是为了使读者避免查阅或少查阅别的文献，其中有些章节也可以略去不读(例如单色散关系的证明一章，关于微扰论解析性理论的两章，等等). 当然，读者还可以本着少而精的原则，自行选择阅读有关的章节.

为了学习此书，读者应具有一般高等数学(如大学一、二年级课程)的知识. 当然，读者还应具有量子力学和量子场论方面的知识. 如果读者缺乏量子场论方面的知识，可以先阅读朱洪元著“量子场论”或胡宁著“场的量子理论”(两书均由科学出版社出版).

本书的主要缺点是内容过于冗长和对于物理问题讨论得不多. 而且书中有一部分内容，照目前看来，已显得有些陈旧；但一方面，考虑到在我国已出版的场论书籍中尚未介绍过它们；另一方面，要较全面地介绍色散关系理论又必须涉及它们，所以仍然把它们包含在本书内. 此外，如符号可能前后不统一、各章的严格程度可能不一致、参考文献列得很少等缺点，都希读者批评指正. 又书中出自论点和导算以及抄写和排版印刷等方面的错误恐都是在所不免的，也希读者指正，以便在此书再版时改正.

末了，著者对数学所理论物理室诸同志，尤其是戴元本同志，

表示感谢；最初他们曾与著者一起讨论了此书的大部分内容，在手稿完成之后，他们又分读了一些章节，提出了不少宝贵意见．在数学所理论物理室同志学习场论的过程中，我们还得到了中国科学院原子能研究所诸同志的帮助，尤其是朱洪元同志，他为了使我们了解某一点，往往写下几页的导算，著者在此一并致谢．

当然，还应该感谢数学所领导的关怀、支持和帮助，更应该深深感谢党多少年来给我的教育，正是这些教育，使我初步地得到了工作的动力，在相当严重的神经衰弱中还能鼓起勇气尽可能地学习，写成了本书．

张　宗　燧

1965年12月

目　　录

第二部分 单色散关系

第一部分　辅助理论

第一章　角动量简介

§1. 算符$\mathscr{R}$, J的定义

在这一章中，我们对角动量理论作一个简单介绍.

先讨论无自旋的一个粒子的情况，这时波函数为$\psi(x, y, z)$或$\psi(x)$，而x, y, z代表此粒子在某一坐标系中的坐标，$\psi(x)$中的x代表三字母(x, y, z). 由于粒子密度几率有一定的分布，我们可用一个类似云雾的系统来想象它，如图1中的A.

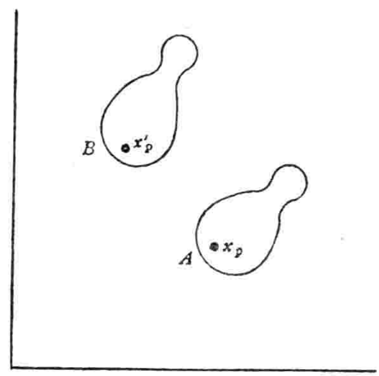


图　1

如果我们将系统绕通过原点的某轴旋转一角度θ，设轴的方向称为$\mathbf{n}$，那末系统就到达一个新状态，如图1中的B，这个新状态相应于一个新波函数，称为$\psi'(x)$. 注意在这里，我们是旋转物体，而不是旋转参考系的坐标轴. 在物体旋转后，物体的状态有了变化，所以波函数也有变化，从$\psi(x)$变为$\psi'(x)$.

对一个无自旋的粒子来说，$\psi'(x)$，$\psi(x)$之间显然有下列关系：

$$\psi'(x)=\mathscr{R}(\mathbf{n}, \theta)\psi(x), \tag{1.1}$$

$\mathscr{R}$代表与$\mathbf{n}$, θ有关的一个算符，算符形式与$\psi(x)$无关，它作用于$\psi(x)$上. $\mathscr{R}(\mathbf{n}, \theta)$的形式将在本节下面给出. 很显然，象(1.1)形式的式子可以推广至任何系统——多粒子、粒子及作用场的系统，等等. 所以我们依然有

$$\psi' = \mathscr{R}(\mathbf{n},\ \theta)\psi, \tag{1.2}$$

只是在此处 ψ 代表我们所研究的量子系统的波函数，变数增多，而 $\mathscr{R}$ 采取了不同形式．可以想象，$\mathscr{R}$ 不但依赖 $\mathbf{n}$, θ, 也与量子系统的组成（指是否为一粒子、二粒子、多粒子或场而言）有关，但与系统的状态（指 ψ）无关．

由于我们有 ψ 长度不变的事实（即总几率不变），得

$$\mathscr{R}^\dagger \mathscr{R} = 1, \tag{1.3}$$

式中 $\mathscr{R}^\dagger$ 代表 $\mathscr{R}$ 的厄米共轭．在上式两方的左面乘以 $\mathscr{R}$, 右面乘以 $\mathscr{R}^{-1}$, 可得

$$\mathscr{R}\mathscr{R}^\dagger = 1. \tag{1.4}$$

如果我们将 $\mathscr{R}$ 写为 $\exp\{-iU(\mathbf{n},\ \theta)\}$, 得

$$U(\mathbf{n},\ \theta) = U^\dagger(\mathbf{n},\ \theta), \tag{1.5}$$

"†" 代表厄米共轭．

对于一个很小的 θ, 如果 $\mathbf{n}$ 取为 x 轴，则我们可以写为

$$\mathscr{R} = (1 - i\theta J_x),$$

这就是算符 J_x 的定义，同样，如果 $\mathbf{n}$ 取为 y 轴，得

$$\mathscr{R} = (1 - i\theta J_y);$$

对一般的 $\mathbf{n}$, 有

$$\mathscr{R} = [1 - i\theta(\mathbf{n}\cdot\mathbf{J})], \tag{1.6}$$

$\mathbf{J}$ 显然是厄米自轭的，$\mathbf{J} = \mathbf{J}^\dagger$.

对于 θ 为有限量的情形，我们看到，当 θ 自 θ 增至 $\theta + d\theta$ 时，ψ 的增加 $d\psi$ 为

$$d\psi = -i\,d\theta(\mathbf{n}\cdot\mathbf{J})\psi,$$

积分后得

$$\psi = e^{-i\theta(\mathbf{n}\cdot\mathbf{J})}\psi(\theta = 0), \tag{1.7}$$

亦即

$$\mathscr{R} = e^{-i\theta(\mathbf{n}\cdot\mathbf{J})}. \tag{1.8}$$

上面的讨论对任何系统都有效．此后我们将称 $\mathscr{R}$ 为旋转算符，J 为无穷小旋转算符．

注意我们在这里强调了物质或量子系统的旋转，而不是强调

坐标轴的旋转. 令物质在旋转时物质中之一点 x 转至位置 x', 而

$$x'_i = R_{ij}x_j, \tag{1.9}$$

则

$$RR^T = 1,\ R^TR = 1,\ R^T = R^{-1},$$

R^T 为 R 的转置矩阵. 当然, 我们也可以让物质不动, 转动坐标轴. 令在物质中不动的某点的新、旧坐标 x', x 依旧满足(1.9)式. 令沿新、旧坐标轴的单位矢量为 $\mathbf{e}'_i$, $\mathbf{e}_i$, 得

$$x_i\mathbf{e}_i = x'_i\mathbf{e}'_i,$$

由此得

$$\mathbf{e}'_i = R_{ij}\mathbf{e}_j. \tag{1.10}$$

虽然,上式在形式上与(1.9)相似, 但它代表 $\mathbf{e}_i$ 等有一个反旋转. 因为我们称 $\mathbf{e}_i$ 及它在反旋转中所到达的位置 $\mathbf{b}_i$ 在原先坐标系中的 k 分量为 $e_{i(k)}$, $b_{i(k)}$, 故按照反旋转定义, 可得

$$b_{i(k)} = R^{-1}_{kj}e_{i(j)} = R^T_{kj}\delta_{ji} = R_{ik} = R_{ij}e_{j(k)},$$

由此证明了 $\mathbf{b}_i = \mathbf{e}'_i$. 在上式中, 当 i, j 相等或不相等时, δ_{ji} 为 1 或 0.

量子系统的两个旋转 $x'_i = R_{ij}x_j$ 和 $x''_i = S_{ij}x'_j$ 的组合是

$$x''_i = (SR)_{ij}x_j.$$

由于坐标轴不动,它们是比较容易想象的,即物质中的一点自 x 转至 x', 自 x' 转至 x''. 如果令坐标轴转动来达到上式,则我们有

$$\mathbf{e}'_i = R_{ij}\mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}''_i = S_{ij}\mathbf{e}'_j.$$

注意第二个转动是在 $\mathbf{e}'$ 系统中以 $\mathbf{e}'$ 为坐标轴时相应于矩阵 S_{ij} 的转动. 在讨论坐标轴的转动时使一固定点的新、旧坐标 x, x' 经受变化(1.9),这在场论中是完全没有必要的,因为这只会增加混乱. 因此,我们规定为下面的旋转:量子系统的旋转、物质的旋转.

不难看出,算符 $\mathscr{R}$ 具有群的性质,具体说来,它应为旋转群的一个表示,即如果 $\mathscr{R}(R_1)$ 为相应于旋转 R_1 的旋转算符, $\mathscr{R}(R_2)$ 为相应旋转 R_2 的旋转算符,则

$$\mathscr{R}(R_1R_2) = \mathscr{R}(R_1)\mathscr{R}(R_2), \tag{1.11}$$

其理由如下: 令物质先经过旋转 R_2, 此时波函数由 ψ 变为 ψ', ψ'

$=\mathscr{R}(R_2)\psi$; 再令物质作旋转 R_1，此时波函数从 ψ' 变为 ψ'':

$$\psi''=\mathscr{R}(R_1)\,\psi'=\mathscr{R}(R_1)\mathscr{R}(R_2)\psi. \tag{1.12}$$

但事实上可以设想，物质只经过一旋转 R_1R_2; 此时终态波函数应为 $\mathscr{R}(R_1R_2)\psi$. 将此式与 (1.12) 比较，可得(1.11)式. 这个讨论显然对任何系统都是有效的.

对于只含有一个无自旋粒子的系统，ψ', $\mathscr{R}$, J 可以求出如下. 令 x_P 为原来系统中的一点，当系统转动时，它转到 x'_P 点. 显然，在新状态中在 x'_P 点的波函数值即是在原来状态中在 x_P 点的波函数值，亦即

$$\psi'(x'_P)=\psi(x_P),$$

也即是

$$\psi'(R_{ij}x_{P,j})=\psi(x_{P,i})$$

(如以物体的密度 ρ 代替 ψ，则这一点是显然的). 略去指标 P，再以 x 代替 Rx，得

$$\psi'(x)=\psi[(R^{-1}x)_1,\ (R^{-1}x)_2,\ (R^{-1}x)_3],$$

$(R^{-1}x)_1$ 代表 $(R^{-1})_{1i}x_i$，等等. 因为我们约定当 x 不附有指标时它代表 x_1, x_2, x_3 全体，因此上式可以简写为

$$\psi'(x)=\psi(R^{-1}x), \tag{1.13}$$

这样便求出了 $\psi'(x)$. 上式亦即是

$$\mathscr{R}\psi(x)=\psi(R^{-1}x). \tag{1.14}$$

不难证明，由(1.14)所决定的 $\mathscr{R}$ 满足(1.11)式. 事实上，

$$\mathscr{R}(R_1)\mathscr{R}(R_2)\psi(x)=\mathscr{R}(R_1)\psi(R_2^{-1}x),$$

令 $\psi(R_2^{-1}x)=\phi(x)$，得

$$\mathscr{R}(R_1)\phi(x)=\phi(R_1^{-1}x)=\psi(R_2^{-1}R_1^{-1}x).$$

因此

$$\begin{aligned}\mathscr{R}(R_1)\mathscr{R}(R_2)\psi(x)&=\psi(R_2^{-1}R_1^{-1}x)\\&=\psi[(R_1R_2)^{-1}x]=\mathscr{R}(R_1R_2)\psi,\end{aligned}$$

这样便得到了所需的证明. 注意上述证明未用到 R 为正交矩阵的性质，对任何矩阵 R 都有效. 当 R 为任意矩阵时，由下式所决定的 $\mathscr{R}$:

$$\mathscr{R}\psi(x)=\psi(R^T x)$$

也满足(1.11)式，当 R 为正交矩阵时，此式与(1.14)相同.

取 R 为绕 z 轴的小旋转，旋转角为 $d\theta$，此时(忽略 $d\theta^2$)

$$x'=x-yd\theta,\ y'=y+xd\theta,\ z'=z,$$

$$R=I+d\theta\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R^{-1}=I-d\theta\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

"I"为单位矩阵. 在此

$$\psi'=\mathscr{R}\psi=\psi(R^{-1}x)=\psi(x+yd\theta,\ y-xd\theta,\ z)$$

$$=\psi+d\theta\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi,$$

与 J_z 的定义比较，可知

$$J_z=-i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{1.15}$$

同样可以求出 J_x, J_y, 它们可以合写为

$$J_i=-i\varepsilon_{ikl}x_k(\partial/\partial x_l), \tag{1.16}$$

式中 ε_{ikl} 为 Levi-Civita 符号，定义为

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1,\ \varepsilon_{132}=\cdots=-1,$$

而两个指标相同时的 ε 为零. 我们称 (1.16) 的右方为 L_i, $i=1$, 2, 3. 直接可以验证

$$L_xL_y-L_yL_x=iL_z,\ \cdots$$

等式. 它们可以简写为

$$\mathbf{L}\times\mathbf{L}=i\mathbf{L}\quad 或\quad L_iL_j-L_jL_i=i\varepsilon_{ijk}L_k. \tag{1.17}$$

§2. J 的物理意义及对易关系

现在可由 J 的定义 (1.6) 及 $\mathscr{R}$ 所满足的 (1.11) 式来求出算

符 J 的对易关系. 由于(1.6), (1.11)是一般的,所以导出的结果也是对一般系统都有效.

令 $R(\theta_x)$, $R(\theta_y)$ 为绕 x 轴旋转角 θ_x、绕 y 轴旋转角 θ_y 的旋转. 我们来讨论 $R^{-1}(\theta_y)R^{-1}(\theta_x)R(\theta_y)R(\theta_x)$ 所构成的旋转, $R^{-1}(\theta_y)$为 $R(\theta_y)$的逆旋转, 等等. 在令 θ_x, θ_y 为小角, 忽略 $\theta_x^2\theta_y$, $\theta_x\theta_y^2$ 及高次项后, 可以证明, 它是一个绕 z 轴旋转角 $-\theta_x\theta_y$ 的旋转,后者用 $R_z(-\theta_x\theta_y)$来代表. 因为如果令 $R^{-1}(\theta_y)R^{-1}(\theta_x)R(\theta_y)R(\theta_x)$作用于矢量(1, 0, 0)上,得(忽略 $\theta_x^2\theta_y$, $\theta_y\theta_x^2$, …)

$$
\begin{aligned}
&R(\theta_x)(1,\ 0,\ 0)=(1,\ 0,\ 0)+O(\theta_x^2),\\
&R(\theta_y)R(\theta_x)(1,\ 0,\ 0)=(1,\ 0,\ -\theta_y)+O(\theta_x^2,\ \theta_y^2),\\
&R^{-1}(\theta_x)R(\theta_y)R(\theta_x)(1,\ 0,\ 0)=(1,\ -\theta_x\theta_y,\ -\theta_y)+O(\theta_y^2),\\
&R^{-1}(\theta_y)R^{-1}(\theta_x)R(\theta_y)R(\theta_x)(1,\ 0,\ 0)=(1,\ -\theta_x\theta_y,\ 0),
\end{aligned}
$$

正如 $R_z(-\theta_x\theta_y)(1,\ 0,\ 0)$. 同样, 令 $R^{-1}(\theta_y)R^{-1}(\theta_x)R(\theta_y)R(\theta_x)$作用于(0, 1, 0)上, 也好象 $R_z(-\theta_x\theta_y)(0,\ 1,\ 0)$. 因为一个旋转可以从它在两个矢量上所起作用的结果决定,所以便证明了(忽略 $\theta_x\theta_y^2$, $\theta_y\theta_x^2$)

$$R^{-1}(\theta_y)R^{-1}(\theta_x)R(\theta_y)R(\theta_x)=R_z(-\theta_y\theta_x) \tag{2.1}$$

{在严格的式子中, 上式右方应补上一因子 $R(\theta^3)$}. 利用 (1.8), (1.11), 得

$$e^{i\theta_yJ_y}e^{i\theta_xJ_x}e^{-i\theta_yJ_y}e^{-i\theta_xJ_x}=e^{i\theta_y\theta_xJ_z}. \tag{2.2}$$

展开上式, 忽略 $\theta_x^2\theta_y$, $\theta_x\theta_y^2$ 及高次项, 比较两边的 $\theta_x\theta_y$ 项, 得

$$J_xJ_y-J_yJ_x=iJ_z, \tag{2.3}$$

同样可算出 $J_yJ_z-J_zJ_y$ 等. 此后令 $[A,\ B]$ 代表 $AB-BA$, 则我们得

$$[J_i,\ J_j]=i\varepsilon_{ijk}J_k. \tag{2.4}$$

这是从 $\mathscr{R}$ 的群性质(1.11)得来的,因此一般地都有效.

从(1.16)式, 我们可以看出, 对于无自旋的单粒子系统, J_i 乘以 $\hbar=h/2\pi$($h=$普朗克常数), 即是系统的角动量, 事实上是系统的轨道角动量. 此后在我们的理论中, $\hbar$ 及光速 c 在计算中取为