経済経営系のための

統計学入門 下

J. E. フロイント
F. J. ウィリアムス
共著

福場庸
大沢豊
共訳

経済・経営系のための **統計学入門 下**

J. E. フロイント／F. J. ウィリアムス 共著
福場 庸／大沢 豊 共訳

培風館

訳者略歴

福場　庸（ふく ば よう）

1953年　京都大学理学部卒業
1962年　経済学博士
現　在　大阪大学経済学部教授

主要著書

ORと経済分析（上・下）（訳，丸善，1966年）
不確定性の経済学
（訳，日本生産性本部，1973年）
経済・経営系のための統計学入門（上）
（共訳，培風館，1974）

大沢　豊（おお さわ ゆたか）

1950年　東京大学経済学部卒業
1962年　経済学博士
1963年　上智大学経済学部教授
現　在　大阪大学経済学部教授

主要著書

線型計画の基本問題（上智大学，1963年）
マーケティング科学と意思決定
（中央経済社，1972年）
経済・経営系のための統計学入門（上）
（共訳，培風館，1974）

昭和49年12月10日　初 版 発 行
昭和56年10月30日　初版第7刷発行

経済・経営系のための
統計学入門 下

原著者　J. E. フロイント
　　　　F. J. ウィリアムス
訳　者　福場　庸
　　　　大沢　豊
発行者　山本健二

発行所　株式会社　培風館
東京都千代田区九段南 4-3-12・郵便番号 102
電話(03)262-5256(代表)・振替東京 4-44725

定価 ¥ 1500.

中央印刷・土開製本

訳者の承認をえて検印を省略しました

3033-0825-6955

ELEMENTARY BUSINESS STATISTICS:
THE MODERN APPROACH, 2 nd edition

by

John E. Freund and Frank J. Williams

Original English language edition published by Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, U. S. A.

原著者序文

本書の初版の序文で，われわれは，過去数十年間に，新しい数学的，統計的方法やコンピュータ技法が発展し，応用されるようになったために，あらゆるビジネスの分野で，急激な変化が生まれたという事実を指摘しておいた。統計学に話を限定しても，いわば過去のできごとをふり返って整理してみるといった方法には終止符がうたれ，現在起こっているできごとを処理し，しかも，これからとるべきオペレーションやその結果に関心を集中するという方法が課題になってきている点も，その序文で述べておいた。ここで，その部分を再録していえば，「今日の統計学では，実験が計画され，標本が抽出され，なされるべき決定，行なわれるべき制御，とられるべき行為の前提となる判断などを参考にして，データが収集され，かつ分析される」のである。この初版の序文を書いてから，すでに８年の歳月がたってしまったが，われわれが「現代的接近法」とよんでいる，この未来指向型で，しかもあくまで現実のできごとを課題にしようとする態度は，統計学の応用と教育の両面で，ますます妥当なものになってきていると考えられる。

本書の初版の意図は，不確実性のもとでの意思決定に対する現代的接近法を，できるだけ適切な形で，説明することにあった。この第２版の場合でも，その意図は不変であるが，この８年間，実際に授業をやってみて，ぜひ参考にすべきだと思われるいろいろな価値のある経験をした。初等的な数学の知識を前提にして，経済・経営系のための統計学入門を，どういう形で構成し，教えるのが最善かという，初版でのわれわれの最大の関心事について，これらの年月を通して，われわれはもちろん，何百人もの他の先生たちが，何千人もの学生たちと，公式非公式に，議論を重ねてきた。事実，何十人もの先生や何百人もの学生たちが，かれらの経験や考え方を，時間のかかるのもいとわずに，われわれに伝えてくれた厚意は，われわれにとって，忘れがたいものである。これらの友人にわれわれがいかに負うところが大きいかは，読者にはあまりぴんとこないかもしれないが，かれらの忠告や助言は，本書のいたるところに反映されているはずである。

この第２版では，基本的な内容の順序をある程度入れかえ，初版にはなかっ

た新しい内容を追加し，さらに，パーソナル確率と，ビジネスにおける意思決定に対するBayes的接近法とに，より力点をおいた構成にした。初版の内容をよく知っておられる読者は，本書の目次に目を通してもらえば，この点，一目瞭然であろうと思われる。われわれの判断では，本書には，1年分の授業に使うのに十分な内容が含まれており，したがって，それより短期の課程の場合，適宜自由にトピックスを選択することができると思われる。とくに力点をおいて，どの章，節あるいは課題を勉強したり，教えたりすべきかを示唆することはしかねるけれども，(応用上重要な，あるいは興味をそそる内容をもつ)多くのトピックスを，全体的な理解をぎせいにしないで，省略してもさしつかえないとだけはいえるであろう。たとえば，1クォーター制の課程または1セメスター制の課程の場合には，組合せ論的な問題や確率の概念や決定の問題の論理の形式をくわしくたどらなくても(度数分布，指数，時系列，および回帰と相関のような)伝統的な問題に重点をおいて読んでいけばよいであろう。もちろん，こういうやり方には，それなりに欠点もあるであろうが，(一般教養的知識の一部とみなされることの多い)確率の概念を重複して学んだり，教えたりするぐらいならば，古典的な統計的推論や統計的方法にかぎられた時間を使ったほうが有効だといえよう。半面，確率や決定の問題に重点をおきたい場合にも，本書で議論されている内容で十分まにあうと思われるので，適当に，伝統的なトピックスを省略しても，なんら支障はないであろう。要するに，どういう方法で，しっかりとした，しかも実りのある統計学の入門的な理解を得ることができるかは，各読者の熟慮に待つほかはない。とにかく，われわれは，いろいろな場合を考えて，本書で議論されているさまざまなトピックスの理解を深めるために，600題以上の問題を準備しておいた。それらの問題の多くは，現実の問題を参考にしてつくられたものであるが，必要な計算を簡単にするために，それらの多くは，適当に修正され，簡略化されている。

本書ができあがる過程で，われわれの学部の多くの同僚や学生諸君に，たいへんお世話になった。その意味で，かれらに，そしてすべての問題をチェックして下さったRaymond Ewerに，とくに謝意を表しておきたい。

また，多くの有益な示唆に富む書評をして下さったDrexel大学のRichard H. Hasse, Texas大学Austin分校のFrancis B. May, Fordham大学のGeorge Miaoulis, Jr., Lawrence工科大学のHenry W. Nace, Alaska大学のBenjamin M. Perles, Georgetown大学のOthmar W. Winklerの諸教授にも感謝している。

最後に，王立学士院特別会員 故 Ronald A. Fisher 卿の遺作の管理者，王立学士院特別会員 Frank Yates 博士，さらに，Fisher 卿，Yates 博士らの著書 *Statistical Methods for Research Workers* および *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* から表 2, 3, および 4 を再録することを許して下さった Edinburgh の Oliver and Boyd, *Biometrika Tables for Statisticians* から表 4a, 4b, 5a, および 5b の部分の再録を許可して下さった E. S. Pearson 教授と *Biometrika* 理事会，*Handbook of Statistical Tables* から乱数表の一部を再録することを許して下さった Donald B. Owen と Addison-Wesley, Inc., これらの人びとや出版社に，深く謝意を表しておくしだいである。

John E. Freund
Frank J. Williams

目　次

[上巻 主要目次]

9 意思決定：推定

推定の問題

すでに説明しておいたように，統計的推測の多くの問題で，われわれは，ある母集団からある標本をとって，それを使って，その母集団のいくつかの特性(パラメター)を推定する。ある推定値はある1つの数として与えられるが，この値は，たとえばあるガソリン・スタンドの週当たりの平均売上げ高(母集団の平均)，あるレストランで最低15%のチップをおく客の割合(母集団の割合)，またはニュー・ヨークからフィラデルフィアに，くるまで行く場合の運転時間について期待しうる変動(母集団の標準偏差)などにできるだけ一致するような値として計算されるのである。ここで，「一致する」とはいわないで，わざわざ「できるだけ一致するような」という表現をしたのは，以下のような理由による。すなわち，“推定しようとしている母集団のパラメターに，ある標本に基づいて得られたある推定値が一致するということは，ありえないことではないけれども，かならずそうなるという保証はなんらないのであって，例外的にそういうこともありうる”ということである。この点は，平均の標本分布についての第8章の議論から明らかであろう。

ある母集団の平均の推定について，以下のような例を考えてみよう。ある中立的な検査機関が，新しく開発されたごく短時間で接着するボンドのアベレージの(平均)接着時間を推定するために，5回検査をやってみたものとしよう。観測された接着時間が5.1, 4.8, 5.0, 5.0および5.1秒であったとすると，接着時間の「真の」平均時間の推定値を標本平均 $\bar{x}=5.0$ 秒とすればよいとい

う結論がすぐ得られるから，それをこの新製品の規格とすることもできよう。この種の推定値は，単一の数字，いいかえると，1つの実数で与えられているという意味で，**点推定値**とよばれている。点推定値は，最も一般的な推定値の表わし方であるが，注意しておくべきいろいろな問題点がある。たとえば，(とくに指定がない場合には)何回検査が行なわれたか，接着速度が試行ごとにどのように変動するかというような点が問題になるであろうし，またこの点推定値は，たとえば0.1秒はくい違っていないとか，あるいは0.5秒もくい違ってはいないとかいうような点が問題になるであろう。

かりにこの情報の「消費者」が経験豊かな統計学者でなくても，上のような問題点のもつあいまいさを明確にする方法がいろいろある。たとえば，その検査機関が，以下のようなレポートをする場合を想定することができよう。

> そのボンドの平均接着時間の推定値は5.0秒であって，この推定値の誤差がたかだか0.15秒であることは，95％確実である(その確率は0.95である)。

この「可能な最大誤差」の求め方についてはあとで説明するが，ここでは，つぎの点に注意しておこう。すなわち，この「可能な最大誤差」0.15秒を標本平均に加え，かつそれからひくと，上のレポートをつぎのようにいいかえることができる。

> 4.85秒から5.15秒までの区間にそのボンドの「真の」平均接着速度がはいっていることは，95％確実である(その確率は0.95である)。

このように，1つの数ではなくて，1つの区間によって与えられるこの種の推定値は，その意味どおり**区間推定値**とよばれており，区間それ自体は**信頼区間**とよばれている。また，われわれは，その区間がその役割りを果たしている(つまり推定の対象になっている数量を含んでいる)ことをある確率で主張する方法をとるのであるが，その確率は**信頼度**とよばれている。

本章では，一貫して，直接行なった観測あるいは測定だけに基づいて点推定値および区間推定値を求めるものと仮定されている。この種の直接得られる情報が，たとえばある人の事前の経験または主観的な判断のような，副次的情報で補われるべきであると考えられる場合には，9ページ以降で説明されているような，なんらかの形式の**ベイジアン推論**を使わなければならない。

平均の推定

いろいろな問題で母集団平均の推定が必要になるが，はじめに，つぎのような例を考えてみよう。警備のためにガードマンを雇っているある会社が，（すべてのドアや窓をチェックするとか，いくつかの場所から連絡するとかいうような手段で）ある大きな倉庫をパトロールするのに必要な平均時間を推定しようとしており，以下のようなそのパトロールにかかった時間（分単位）のデータを得たものとする。

24.0	48.3	39.8	36.4	47.9	29.0	52.5	38.4
51.4	29.9	34.5	35.5	43.3	46.5	28.7	41.6
39.7	42.6	47.2	49.8	34.5	38.0	28.9	39.2
42.1	38.5	41.3	21.0	38.5	33.8	19.9	32.6
32.2	37.6	44.1	26.7	37.8	57.1	32.4	44.3

（無作為標本と考えられる）この一組のデータの平均は $\bar{x}=38.2$ 分であるが，これ以外になんの情報もないとすると，この平均を，この大きさの倉庫をパトロールするのに必要な“真の”平均時間の，すなわち μ のある推定値とみなすことができよう。

それはそれでよいのであるが，点推定値については，その適切さを判断するための情報が常に不可欠であるという点を考えると，ここで平均の標本分布についての第8章の議論の要点を復習しておくほうがよいであろう。第8章で知ったように，無作為標本の平均は，標本ごとに変動するのが普通であり，標本が抽出された（無限）母集団の平均と標準偏差とを μ および σ とするとき，標本分布の平均と標準偏差とは，μ および $\sigma/\sqrt{n}$ で与えられる。（少なくとも大標本については）平均の標本分布を正規曲線によってうまく近似しうるという内容をもつ中心極限定理を使うと，$\bar{x}$ と μ との差は，左右ともに，$z_{\alpha/2}$ 標準偏差未満であると確率 $1-\alpha$ で主張できる。ここで，α はギリシャ文字アルファである（上巻208ページの問題5および図9.1をみよ）。いいかえると，$\bar{x}$ と μ との差は，左右ともに $z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}$ 未満であると主張することができるが，“$\bar{x}-\mu$ は μ の推定値として $\bar{x}$ を使うときの誤差であるから，この誤差は $z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}$ 未満であると確率 $1-\alpha$ で主張できる”。ごく普通の場合には，α の値として，0.05と0.01の2つの値が使われているが，上巻208ページの問題5の(c)と(f)を解けば，$z_{.025}=1.96$ および $z_{.005}=2.58$ であることがわかるであろう。

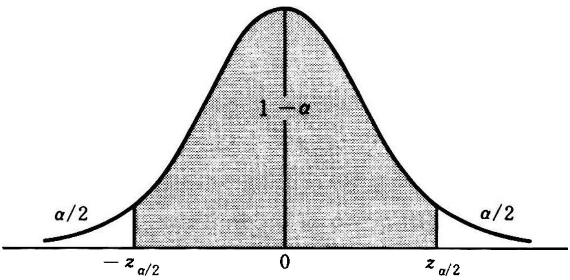

図 9.1 正規曲線下の面積

しかし，上に述べた結果には，つぎのような問題点がある。すなわち，μ の推定値として $\bar{x}$ を使うときに，どれくらいの大きさの誤差を見込んでおくべきかをはっきりさせるためには，母集団の標準偏差 σ が既知でなければならない。しかし，実際問題としては，σ が既知である場合はほとんどありえないから，普通標本標準偏差 s で与えられる σ の推定値で，それをおきかえるしか方法はない。一般に，標本数が十分に大きければ，この方法は妥当であると考えてよい。ただし，ここで「十分に大きい」というのは，標本の大きさが30以上という意味である。

そこで，先の数値例にもどると，（計算すれば容易にわかるように）40個の測定値の標準偏差は $s=8.52$ 分であるから，$\alpha=0.05$ とすると，確率 $1-\alpha=0.95$ で，以下のように主張できる。すなわち，このタイプの倉庫をパトロールするのにかかる真の平均時間を38.2分と推定するときの誤差は

$$1.96\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=1.96\cdot\frac{8.52}{\sqrt{40}}=2.64\ \text{分}$$

未満である。もちろん，この推定値の誤差は，2.64分未満であるか，あるいはそうでないかのいずれかであるが，“どちらが本当かをわれわれは知らない”。しかし，ここで賭けなければならないとすれば，その誤差が実際に2.64分未満であることの公平な見込みは19対1（95対5）といえるであろう。

σ が未知で，かつ n が30未満のときには，上で説明したような方法を使うことはできないが，標本を抽出する母集団，あるいはより正確にいえば，その分布がおおよそ正規曲線の形をしていれば，小標本の場合に使うことができるように，最大誤差の公式を修正する方法がある。この修正については，本節の6ページで説明する。

この最大誤差の公式にはもう1つの重要な性質があって，われわれの望むだ

けの精度を得るのに必要な標本数を決める場合にも使うことができる。いま，ある母集団の平均を推定するために，ある無作為標本の平均を使って，この推定値の誤差がある値 E 未満であることを，確率 $1-\alpha$ で主張したいものとしよう。とすれば

$$E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

とおいて，この方程式を n について解き

$$n=\left[\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right]^2 \qquad \bigstar$$

とすればよい。ただ，その平均を推定しようとしている母集団の標準偏差が既知でない(または近似しえない)ならば，この公式を使うことはできない。

この方法の説明例として，(ある標準的テストをして)一群の多数の人たちの平均的事務能力を推定し，しかもこの推定値のくい違いが，確率 0.99 でたかだか 2.0 になるようにしたいものとしよう。さらに，(同じようなデータをとった過去の経験からいって) σ を 15.0 に等しいとしてもよいと考えられるものとしよう。$z_{.005}=2.58$ として，これらの値を上の n の公式に代入すると，答えが整数になるように切りあげれば

$$n=\left[\frac{2.58(15.0)}{2.0}\right]^2=375$$

となる。したがって，所期の目的を実現するには，標本数 $n=375$ で十分である。

ある母集団の平均を推定するために標本平均を使った場合の誤差は，差 $\bar{x}-\mu$ によって与えられるから，この誤差の“大きさ”が $z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 未満であることは，不等式

$$-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\bar{x}-\mu<z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

によって表現される(念のために，不等号について知らない人のために注意しておくと，$a<b$ は「a が b 未満であること」，$a>b$ は「a が b をこえること」を意味している。また，$a\leq b$ は「a が b 以下であること」，$a\geq b$ は「a が b 以上であること」を意味している)。簡単な代数計算をすると，上の不等式から

$$\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \bigstar$$

という結果が得られるから，任意の与えられた標本に対してこの不等式が満たされること，すなわち $\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ から $\bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ までの区間に，推定しようとしている平均が実際にはいっていることを，確率 $1-\alpha$ で主張することができる。この種の区間は(2ページで述べておいたように)**信頼区間**，区間の両端の点は**信頼限界**とよばれており，またある区間が「その役割りを果たす」という主張についての確率 $1-\alpha$ は**信頼水準**とよばれている。最もよく使われている信頼水準の値は 0.95 と 0.99 であり，当然対応する $z_{\alpha/2}$ の値は 1.96 と 2.58 である。

σ が未知で，n が 30 以上のときには，上と同様の論旨に沿って，標本標準偏差 s で σ を推定しておく。したがって，μ の $1-\alpha$ **大標本信頼区間**は

$$\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \bigstar$$

となる。そこで，われわれの数値例にこの公式をあてはめると，$n=40$，$\bar{x}=38.2$ および $s=8.52$ (3ページをみよ)であるから，このタイプの倉庫をパトロールするために必要な“真の”平均時間の 0.95 信頼区間は，以下のようになる。

$$38.2-1.96\cdot\frac{8.52}{\sqrt{40}}<\mu<38.2+1.96\cdot\frac{8.52}{\sqrt{40}}$$

$$35.56<\mu<40.84$$

そこで，信頼水準を 0.99 にすると，信頼区間は

$$38.2-2.58\cdot\frac{8.52}{\sqrt{40}}<\mu<38.2+2.58\cdot\frac{8.52}{\sqrt{40}}$$

$$34.72<\mu<41.28$$

となるから，“より確実であろうとすればするだけ，それだけ確実でなくなる”という注目すべき結果が得られる。いいかえると，確実性の程度(信頼水準)をふやすと，信頼区間が“より広く”なり，したがって推定しようとする数値について“より少なく”しか知ることができないことになる。

これまでの議論では，平均の標本分布が正規分布をしているとみなしてもさしつかえないほど，標本数が十分に大きいだけでなく，(必要ならば)平均の標準誤差の公式の σ を s でおきかえることができるものと仮定してきた。小標本の場合にもあてはまる，これと対応する理論を得るには，標本を抽出する母集団(より正確にはその分布)が，おおよそ正規分布の形をしていると仮定しておかなければならない。このように仮定すれば，統計量

$$t=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$ ★

による方法を使うことができる。この統計量の標本分布は **t 分布**とよばれている(よりくわしくいえば，この標本分布は，"Student (ステューデント)" というペンネームを使っていた W.S. Gosset (ゴセット)によって，はじめて研究されたので，**Student の t 分布**とよばれている)。この分布の形は，正規曲線の形と非常によく似ており，平均ゼロで左右対称であるが，左右の端のほうの値を得る確率は，正規曲線よりも，わずかに高くなる形をしている(図 9.2 をみよ)。具体的にいうと，t 分布の形は，標本数に，より正確には**自由度**(d.f.)**の数**†とよばれている値 $n-1$ に依存している。

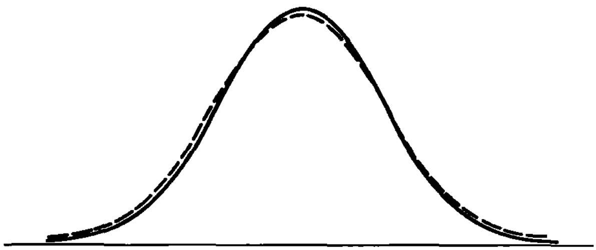

図 9.2 正規曲線と t 分布

標準形の正規分布について，正規曲線下の "その右側の" 面積が $\alpha/2$ に等しい z の値を $z_{\alpha/2}$ と定義したが，それと同じように，t 分布についても，その曲線の "その右側の" 値が $\alpha/2$ に等しい値を $t_{\alpha/2}$ と定義する(図 9.3 をみよ)。$t_{\alpha/2}$ の値は，$n-1$ (自由度の数)に依存するので，それらの値は，239 ページの表 2 のような特殊な表から読みとらなければならない。表 2 では，1 から 29 までの自由度について，(とくに) $t_{.025}$ と $t_{.005}$ との値を知ることができる点に注意していただきたい。自由度がしだいに大きくなるにつれて，$t_{.025}$ と $t_{.005}$

† ここでは，たまたまちょうど標本数から 1 をひいた $n-1$ という値を自由度の数とよんでいるが，なぜこういう特別のよび方をするかをここで説明することはむずかしい。しかし，次章の t 分布のいくつかの応用例をみればわかるように，自由度の数の定義のしかたはこれだけが唯一のものではない。要するに，「自由度」という用語を使う理由は，平均からの $n-1$ 個の偏差がわかれば n 番目の偏差が自動的に決まるという点にある(上巻 45 ページを読み直しておいてほしい)。標本標準偏差は，平均からの平方偏差によって変動を測るものであるから，σ の推定値としての標本標準偏差は，$n-1$ 個の「独立な値」に基づいている，すなわち $n-1$ の自由度をもつということができる。