博雅

21世纪数学精编教材

数学基础课系列

实变函数论

Real Function Theory

许静波 程晓亮 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21世纪数学精编教材
数学基础课系列

实变函数论

许静波　程晓亮　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

实变函数论/许静波,程晓亮编著. —北京:北京大学出版社,2014.2
(21世纪数学精编教材·数学基础课系列)
ISBN 978-7-301-23757-1

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①许… ②程… Ⅲ. ①实变函数论—高等学校—教材 Ⅳ. ①O174.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第010897号

书　　　名:实变函数论
著作责任者:许静波　程晓亮　编著
责 任 编 辑:曾琬婷
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-23757-1/O·0963
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区成府路205号　100871
网　　　址:http://www.pup.cn　　新浪官方微博:@北京大学出版社
电 子 信 箱:zyjy@pup.cn
电　　　话:邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62767347　出版部62754962
印　刷　者:三河市北燕印装有限公司
经　销　者:新华书店
787mm×980mm　16开本　10.75印张　230千字
2014年2月第1版　2014年2月第1次印刷
印　　　数:0001—3000册
定　　　价:26.00元

内容简介

本书从实变函数论的发展简史出发，深入浅出地阐述了实变函数论的基本理论、基本问题和基本方法.本书共分为六章，内容包括：实变函数论发展简史、集合与点集、可测集、可测函数、勒贝格积分理论和勒贝格意义下的微分与不定积分等.本书各部分主题鲜明，逻辑性强，内容的讲解由浅入深，对基本概念的阐述透彻，着力将每个知识点与中学的数学知识和大学的数学分析知识联系起来，便于读者比较与加深理解，增加对知识背景的认识.书中也极力渗透拓扑学思想及较勒贝格积分理论更加一般的积分理论，为后续课程的学习奠定基础.书中每节配有适量的习题，其中既有对易于混淆的基础知识的考查，也有更为深刻的结果.书末附有习题答案与提示，便于教师教学和学生自学.

本书既可作为高等院校数学与应用数学专业实变函数论课程的教材，也可作为非数学专业该课程的教学参考书，还可作为相关科研人员的参考书.

为了方便教师多媒体教学，作者提供与教材配套的相关内容的电子资源(包括电子教案、ppt 课件、习题答案、试题库等)，需要者请电子邮件联系 chengxiaoliang92@163.com.

前　言

实变函数是指其自变量(单变量或多变量)与函数值均为实数的函数.实变函数论是以实变函数作为研究对象的一个数学分支.实变函数论课程是数学与应用数学专业的必修课程.它的概念与思想渗透到数学的许多分支,如测度论、概率论、数理统计、积分方程、微分方程、量子力学、计算数学、泛函分析、分形几何、小波分析、调和分析、动力系统、随机过程和随机分析等,对形成近代数学的一般拓扑学和泛函分析两个重要分支有着极为重要的影响.实变函数论和古典数学分析不同,它是一种比较高深精细的理论,是数学的一个重要分支,它在数学各个分支的应用是现代数学的特征.本书从实变函数论的发展简史出发,深入浅出地阐述实变函数论的基本理论、基本问题和基本方法.

全书共分为六章,内容包括:实变函数论发展简史、集合与点集、可测集合、可测函数、勒贝格积分理论和微分与不定积分等.第一章介绍实变函数论的发展历程,使读者更详尽地掌握实变函数论发展的历史进程,从整体把握本门课程的脉络,也为做进一步的探索研究指明方向.第二章介绍集合及其运算、集合的基数、不可数无穷集、$\mathbb{R}^n$中的点集、点的分类与开集、闭集及其构造等内容.实变函数论主要考查定义在可测集上的可测函数,建立较黎曼积分理论更为一般的勒贝格积分理论,因此集合论的基础知识是学习本门课程的预备知识.虽然从中学到大学的许多课程都或多或少地涉及集合的相关知识,但这里主要使学生掌握定义可测集所需要的诸如集合的基数,$\mathbb{R}^n$中点的分类和一些常见的、有重要意义的集合,与以前所学的相关知识侧重点不同.为了内容的完整和学生自学的方便,我们对这部分知识简要阐述.第三章由求平面图形面积的“过剩”近似值与“不足”近似值出发,将其一般化,定义集合的外测度与内测度.说明并不是所有的集合都满足外测度的有限可加性这个最基本的性质,进而将$\mathbb{R}^n$中所有的集合分为可测集与不可测集两大类.对于满足测度有限可加性的可测集类,我们研究它的构造,揭示它与我们最常见、最简单的集合——博雷尔集的关系,从而使学生对这类新的集合感到并不陌生.该章的最后,我们也介绍乘积空间与截口的概念,得到由低维空间生成高维空间及由高维空间得到低维空间的具体方法.第四章介绍实变函数论的研究对象——可测函数.我们从建立勒贝格积分理论的实际需要出发,利用集合的可测性定义函数的可测性,并应用可测集的性质研究可测函数的基本性质.为了说明可测函数并不脱离我们熟悉的最简单的函数,我们深入探讨了可测函数与简单函数的关系,得出简单函数一定是可测函数,且任何可测函数一定能用简单函数列逼近,即其为简单函数列的极限函数.对于可测函数序列,我们定义了几乎处处收敛与依测度收敛这两种新的、有广泛应用的

收敛，并研究了它们与一致收敛的关系. 叶果洛夫定理阐述了几乎处处收敛的函数列在满足一定的条件下可以部分地“恢复”一致收敛性，为我们处理极限问题提供有力工具. 鲁金定理对可测函数的本质进行刻画，使我们更加清楚可测函数的结构问题，它得到几乎处处取有限值的可测函数一定是部分连续或“基本连续”的，为研究可测函数提供了有效手段. 第五章为本书的核心内容，讲述了勒贝格积分理论. 该章时刻将勒贝格积分理论与黎曼积分理论进行比较研究，说明这种理论较黎曼积分理论的进步之处，同时也指出二者也是有着密切联系的，黎曼积分的许多性质和结果同样被勒贝格积分继承下来. 我们知道黎曼积分在处理积分与极限换序方面的条件要求近乎于苛刻，而勒贝格积分的三大极限定理——勒贝格控制收敛定理、勒维渐升列积分定理与法都引理说明在实现积分与极限交换次序方面勒贝格积分的要求宽松得多，这也是勒贝格积分最引以为豪的成功之处. 该章的最后给出黎曼可积的充分必要条件，即其不连续点构成的集合的测度为零，使我们清晰地看到黎曼可积函数的构造，同时解决了黎曼积分一直想解决，但又解决不了的问题. 第六章探讨勒贝格不定积分与微分之间的关系，给出勒贝格积分意义下的微积分基本定理——牛顿-莱布尼茨公式成立的充分条件. 该章首先将数学分析中导数的概念与不定积分的概念进行推广，然后由浅入深地对单调函数、有界变差函数的可微性进行讨论，最后找到使牛顿-莱布尼茨公式成立的函数类——绝对连续函数类，并对其可微性与导数的勒贝格可积性深入探讨. 对于勒贝格意义下重积分与累次积分的关系与分部积分公式，得到了与黎曼积分类似的结果.

在本书的编写过程中，全国十余所兄弟院校的同行提出了很多宝贵的建议，本书的出版得到了北京大学出版社的大力支持，在此我们表示诚挚的谢意.

本书既可以作为高等院校数学与应用数学专业实变函数论课程的教材，也可作为非数学专业该课程的教学参考书，还可作为相关科研人员的参考书.

本书内容虽然经过编者们多次讨论、审阅、修改，但限于编者的水平，不妥之处仍然会存在，恳请广大同行和读者给予批评指正.

编　者
2013 年 8 月

目　录

第一章

实变函数论发展简史

实变函数是指其自变量(单变量或多变量)与函数值均为实数的函数. 实变函数论(real function theory)是以实变函数作为研究对象的一个数学分支,其创始人是法国数学家勒贝格(H. L. Lebesgue,1875—1941).

一、实变函数论产生的背景与意义

实变函数论是微积分学的发展与革新. 微积分产生于十六七世纪,发展于 18 世纪,成熟于 18 世纪末 19 世纪初. 随后数学家对其进行广泛的研究,建立起今天我们所熟悉的数学分析. 也正是在那时,黎曼(B. Riemann,1826—1866)积分意义下的许多奇怪现象被发现. 19 世纪初,人们猜想连续函数除个别点外都是可微的. 但德国数学家维尔斯特拉斯(K. Weierstrass,1815—1897)找到了一个由级数定义的函数,其连续但处处不可微. 这一事实让许多数学家大为震惊. 之后,有人陆续发现了具有有限导数但不黎曼可积的函数、连续但不分段单调的函数等. 上述现象启发我们,在数学中仅依靠直观的想象与猜想是行不通的. 另外,黎曼积分在极限与积分交换次序、微积分基本定理与可积函数空间的完备性等方面具有较大的局限性. 为了深入地研究函数的性质,使得运算变得灵活,以勒贝格为代表的数学家们建立了新的测度理论与积分理论,即勒贝格测度理论与积分理论,它是经典黎曼积分理论的深刻变革与发展.

黎曼可积性与分割的子区间长度及函数在每个子区间上的振幅有关,而函数的振幅大小涉及连续性的问题,为了保证函数的黎曼可积性,其不连续点必须能被长度总和任意小的区间覆盖. 事实上,用勒贝格测度的思想来说,就是要求所研究函数的不连续点构成的集合的测度为零. 随着理论的深入与实际应用范围的拓宽,各种各样“奇特”的函数摆在人们面前,其性质也亟待研究. 由于在黎曼积分的范围内对具有无穷

多次激烈震荡的函数无法进行研究，于是勒贝格提出不分割函数的定义区间，而从分割函数的值域入手定义积分.

勒贝格积分理论克服了黎曼积分理论的不足. 首先，勒贝格积分的被积函数是定义在$\mathbb{R}^n$中可测集上的可测函数，其定义域可以是有界可测集，也可以是无界可测集，这就克服了黎曼积分对被积函数“基本连续”的限制；其次，勒贝格积分理论在积分与极限交换次序、重积分化为累次积分等方面更加灵活；再次，这种理论的引入还使数学分析中很难讲清楚的道理，如单调函数的可微性、黎曼可积的充分必要条件等变得清晰明确，甚至初等数学中的一些基本概念与结果也只有用到实变函数论的知识才能解释清楚. 更值得一提的是，勒贝格积分理论充满了新思想和新方法，它的出现更具实际意义，正是由于这种理论方法的出现，使得测度论、概率论、数理统计、积分方程、微分方程、量子力学、计算数学、泛函分析、分形几何、小波分析、调和分析、动力系统、随机过程和随机分析等学科得到了空前的繁荣. 实变函数论是现代数学的标志之一.

二、实变函数论的发展历史

“数学和科学中的巨大进展，几乎总是建立在几百年中作出一点一滴贡献的许多人的工作之上的，需要一个人走出那最高和最后的一步，这个人要能足够敏锐地从纷乱的猜测和说明中清理出前人有价值的想法，有足够的想象力把这些碎片重新组织起来.”这是美国数学家莫里斯・克莱因(Morris Kline，1908—1992)在他的名著《古今数学思想》中的一段话. 事实上，在勒贝格提出他的测度理论与积分理论之前，许多数学家已经做出了大量具有铺路石意义的工作.

斯蒂尔杰斯(Stieltjes，1856—1894)积分是黎曼积分理论的第一次发展，在现代数学中起了重要作用. 斯蒂尔杰斯是荷兰数学家，他在 1894 年发表的论文《连分数理论》中推广了黎曼积分. 为了表示一个解析函数序列的极限，他将积分区间推广到无穷区间，但遗憾的是这种积分不具有普遍性. 斯蒂尔杰斯的贡献还包括：研究了发散级数及其连分式展开，为连分式解析理论的研究奠定了基础；与庞加莱各自独立地给出了级数渐近于一个函数的定义；提出了“矩量问题”；研究了正交多项式；给出了近似积分法；等等.

约当(C. Jordan，1838—1922)是法国数学家，他在测度论方面的贡献是提出了“约当容量”的概念. 他的《分析教程》是 19 世纪后期分析学的标准教材. 在该书中，他定义了闭区间$[a,b]$上点集 E 的外容量与内容量，提出“若 E 的内、外容量相等，则 E 具有容量”. 随后他将容量概念推广到高维空间，证得其具有有限可加性，即有限个互不相交的具有容量集合的并集依然具有容量，且并集的容量等于各个集合的容量之和. 尽管约当容量的思想与勒贝格测度的思想已经相当接近，但在约当意义下有限区间中的有理数集不具有容量，有界开集等常见的集合不一定具有容量，因此利用约当容量测量集合不尽完善. 在约当定理中，他指出简

单闭曲线能将平面分成两个区域.约当的重要工作还体现在代数学方面,他发展了有限群论,研究了置换群、有限可解群,证得群论中的一系列有限性定理.

博雷尔(E. Borel,1871—1956)对容量理论进行了完善.博雷尔是20世纪伟大的数学家,1871年1月7日出生于法国圣阿弗里克,1956年2月3日逝世于法国巴黎.他是一位多产的数学家,论文及论著有三百多种,其中很多被翻译成外文,在分析学、函数论、数论、代数学、几何学、数学物理、概率论等诸多分支都有杰出的贡献.法国数学家弗雷歇(Frechet,1878—1973)曾说:"仅仅为了归纳、简述博雷尔的作品就需要数卷篇幅."而法国数学家蒙泰尔(Montel)说:"博雷尔的思想将会长久地继续在研究中发挥影响,就像远处的星光散布到广阔的空间."在测度论方面,博雷尔的开创性工作是将"点集E的容量由有限个覆盖E的区间长度和逼近"变为"有界开集的测度定义为其构成区间的长度总和";对可数个互不相交的可测集的并集的测度进行定义,定义其为每个集合测度的和;若点集A与B均可测,且$A\supset B$,则定义$A-B$的测度等于A的测度减去B的测度.他还研究了零测集.在分析学方面,他系统、深入地研究了发散级数的性质,给出了绝对可和性的概念,发展了可和性级数理论,证得绝对可和的发散级数可以像收敛级数一样进行运算;他完善了海涅(Heine,1821—1881)提出的覆盖定理,证得一个区间的所有开覆盖中能够选出有限个子覆盖,即现在所说的海涅-博雷尔定理或有限覆盖定理.博雷尔将概率论与测度论相结合,首次提出可数事件的概率,填补了古典有限概率和几何概率之间的空白.此外,他在对策论方面的研究也颇有建树,将最优策略、混合策略、均衡策略和无限策略应用于战争及经济建设.在数学中,以他的姓氏命名的概念和结论有:博雷尔函数、博雷尔测度、博雷尔变模、博雷尔集、博雷尔强大数律、博雷尔同构、博雷尔定理等.

勒贝格1875年6月28日出生于法国博韦,1941年7月26日逝世于法国巴黎.他的毕生精力都献给了数学事业,成为20世纪法国最有影响的分析学家之一.勒贝格是博雷尔的学生.在博雷尔思想的影响下并结合前人的工作,勒贝格建立了新的测度理论与积分理论.他在1902年发表的著名论文《积分,长度与面积》与随后出版的两部论著《论三角级数》(1903年)和《积分与原函数的研究》(1904年)中第一次阐述了测度理论与积分思想,并在之后的几年中对它进行了补充和完善.以他名字命名的勒贝格积分理论是对积分学的重大突破.在测度论方面,对于闭区间$[a,b]$上的点集E,他首先定义了外测度,即外测度为所有覆盖E的区间列的长度和的下确界;其次,将E的内测度定义为$[a,b]$的测度减去$[a,b]-E$的外测度,若E的内、外测度相等,则称其为可测集.为了降低讨论的复杂程度,现在基本上不采用内测度的定义方式,而通常利用卡拉泰奥多里条件定义可测集.对于勒贝格积分思想与黎曼积分思想的区别,勒贝格做过一个形象而生动的描述:"我必须偿还一笔钱.如果我从口袋中随意地摸出来各种不同面值的钞票,逐一地还给债主直到全部还清,这就是黎曼积分;不过,我还有另外一种做法,就是把钱全部拿出来并把相同面值的钞票放在一起,然后再

一起付给应还的数目，这就是我的积分.”对勒贝格的评价，美国数学史家克兰(Kline)说：“勒贝格的工作是本世纪的一个伟大贡献，确实赢得了公认，但和通常一样，也并不是没有遭到一定的阻力的.”勒贝格在他的《工作介绍》中写道：“对于许多数学家来说，我成了没有导数的函数的人，虽然我在任何时候也不曾完全让我自己去研究或思考这种函数.因为埃尔米特表现出来的恐惧和厌恶差不多每个人都会感觉到，所以任何时候，只要当我试图参加一个数学讨论会时，总会有些分析家说：‘这不会使你感兴趣的，我们在讨论有导数的函数.’或者一位几何学家就会用他的语言说：‘我们在讨论有切平面的曲面.’”勒贝格积分理论真正得到大众的认可并得以应用是在20世纪30年代.勒贝格的贡献还包括：用积分理论研究三角级数；改进了函数可以展开为三角级数的充分条件；推广了导数概念；证得勒贝格意义下的牛顿-莱布尼茨公式；提出了因次理论；证明了贝尔范畴各类函数的存在性；在拓扑学中引入了紧性的定义和紧集的勒贝格数；等等.在数学中，以他的姓氏命名的概念有：勒贝格函数、勒贝格测度、勒贝格积分和、勒贝格积分、勒贝格空间、勒贝格分解、勒贝格分类、勒贝格面积、勒贝格准则、勒贝格脊、勒贝格数、勒贝格点、勒贝格链、勒贝格不等式、勒贝格谱数等；以他的姓氏命名的定理也有很多.作为对他杰出贡献的肯定，伦敦、罗马、比利时、法国、英国、丹麦、波兰、罗马尼亚、苏联等国家都曾聘他为科学院院士或数学学会会员；获得胡勒维格奖、彭赛列奖和赛恩吐奖等.

后来维塔利(G. Vitali，1875—1932)、卡拉泰奥多里(C. Carathéodory，1873—1950)、黎斯(F. Riesz，1880—1956)等人又对这种理论进行了深入的研究.

维塔利是意大利数学家、力学家，1875年出生于拉韦纳，1932年逝世于博洛尼亚，因维塔利定理出名.维塔利定理在选择公理的假设下给出了多个勒贝格不可测集，后来人们将这些集合命名为维塔利集合.他对可测函数性质做了早期研究，给出了绝对连续函数的概念，他的维塔利覆盖引理也是测度理论的一条基本原理.此外，他还研究了解析函数列的极限函数的解析性、积分与极限交换次序等问题.

卡拉泰奥多里是希腊数学家，1873年9月13日出生于柏林，1950年2月2日逝世于慕尼黑.他在数学方面作出了许多杰出的贡献.在测度论方面，他提出了测度扩张方法，利用卡拉泰奥多里条件定义可测集，这也是目前绝大多数教材采用的方法，其形式简单，便于验证；在函数论方面，他研究了函数值分布论，并将单位圆上单连通域的保形变换定理进行了简化，得到了边界对应理论；在偏微分方程方面，他研究了变分法与一阶偏微分方程的关系，利用得到的结论解决了拉格朗日问题；在几何学方面，他发展了变分法，把光滑曲线的相关理论推广到有角曲线上，提出了解曲线场的概念.另外，他在狭义相对论与热力学公理化等方面也取得了很多重要的成果.

不得不提到的一点是，在研究集合的外测度时，勒贝格发现外测度不满足有限可加性这个最基本的性质，即有限个互不相交的集合的并集的外测度等于每个集合分别求外测度之

和，因此他将不满足上述性质的集合排除在外，提出不可测集的概念，但遗憾的是迄今为止对于不可测集的存在与否仍然没有准确的答案. 我们通常熟悉的构造不可测集的方法中需要用到在数学界中一直饱受争议的选择公理. 对于选择公理，有许多不同的等价说法，一种简单的描述方式如下：设 $\mathscr{C}$ 是由一些非空集合构成的集族，我们可以从 $\mathscr{C}$ 的每个集合中分别选出一个元素组成一个新的集合.

现代数学中的许多重要结果都是在承认选择公理的基础上得以证明的，如点集拓扑学中的吉洪诺夫(Tychonoff)定理、线性代数中的基底存在定理、泛函分析中的巴拿赫(Banach)扩张定理等等. 法国数学家庞加莱(J. H. Poincare，1854—1912)在评价选择公理时曾说："我们围住了一群羊，但是羊棚里或许已经有狼了."因此，不管怎么说，对于选择公理存在的"隐患"，在短期内似乎可以不放在心上，但在数学发展的历史长河中是迟早要被解决的.

此外，在勒贝格积分理论意义下反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 依然不存在等问题都是勒贝格积分的不足之处. 直到现在，建立满足各种各样理论需要与实际需求的新的积分理论还是数学家们孜孜以求的目标.

第二章 集合与点集

数学中很早就进行了有关集合各种问题的研究. 19 世纪 70 年代,集合论作为独立的数学分支登上历史舞台,其创始人是德国数学家康托尔(Cantor,1845—1918). 他对集合进行了深入和系统的探讨. 到 21 世纪,集合思想已渗入到现代分析数学的各个分支,成为现代数学的标志之一. 实变函数论就是建立在集合论基础上的一个数学分支. 本章介绍实变函数论中涉及的集合理论,并对$\mathbb{R}^n$中点集的拓扑进行研究. 这是后面各章内容的基础.

§2.1 集合及其运算

一、集合的概念

集合是数学的基本研究对象之一,它的引入是为了抽象地研究事物的整体结构与特征,以便更加细致地讨论事物的本质特点. 集合的概念有各种不同的描述方法,但本质上是一致的.

定义 1 有限个或无限多个固定事物的全体称为**集合**,通常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$来表示.

集合中的每个个体事物称为该集合的**元素**,通常用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$来表示.

集合与元素之间的关系用符号"$\in$"与"$\notin$"(或"$\bar{\in}$")来表示,其中"$a\in A$"(读做"a 属于 A")表示元素 a 在集合 A 中,"$a\notin A$"或"$a\bar{\in} A$"(读做"a 不属于 A")表示元素 a 不在集合 A 中.

不含任何元素的集合称为**空集**,记做$\varnothing$.

例如,集合

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2=-2,且(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$

就是一个空集.

表示集合中元素构成的方法通常有列举法和描述法. **列举法**是将该集合的元素一一列举出来,如

$$A=\{1,2,3,4,5\},\quad B=\{0,1,-1,2,-2,\cdots\}.$$

描述法是将该集合中元素的特性描述出来,通常记为

$$A=\{x\,|\,x\text{ 具有性质 }P\}.$$

定义 2 如果一个集合中的所有元素都是数,则称其为**数集**. 常用$\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集和复数集,并用$\mathbb{Z}_+$,$\mathbb{Q}_+$及$\mathbb{R}_+$分别表示正整数集、正有理数集及正实数集.

定义 3 如果集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,记做 $A\subset B$ 或 $B\supset A$(读做"A 含于 B"或"B 包含 A").

注意:约定空集$\varnothing$是任何集合的子集. 显然 A 为 A 的子集. 这两个子集称为 A 的**平凡子集**.

定义 4 如果 $A\subset B$,且 $B\subset A$,则称 A 与 B **相等**,记做 $A=B$(读做"A 等于 B");若不然,称 A 与 B **不相等**,记做 $A\neq B$(读做"A 不等于 B").

定义 5 如果 $A\subset B$,且 $A\neq B$,则称 A 是 B 的**真子集**,记做 $A\subsetneqq B$(读做"A 真含于 B"或"B 真包含 A").

定义 6 如果一个集合中的元素均为集合,则称其为**集族**或**集类**,通常用花体英文字母$\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$,$\mathscr{C}$,…来表示.

定义 7 给定集合 A,其所有子集构成的集族称为它的**幂集**,记做 $P(A)$或 2^A,即

$$2^A=\{B\,|\,B\subset A\}.$$

二、集合的运算

对给定集合按某种要求做特定分解与组合是处理集合问题的常用方法,这种分解与组合可以通过集合之间的各种运算实现. 通常用到的关于集合的运算有"并"、"交"与"差"三种.

定义 8 设 A,B 为两个集合,称由 A 和 B 的所有元素放到一起构成的新集合为 A 与 B 的**并集**或**和集**,简称为**并**或**和**,记做 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

定义 9 设 A,B 为两个集合,称由 A 和 B 的所有共同元素放到一起构成的新集合为 A 与 B 的**交集**,简称为**交**,记为 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A,\text{且 }x\in B\}.$$

当 $A\cap B=\varnothing$ 时,称 A 与 B **互不相交**.

定义 10 设 Λ 是一个集合. 若对每个 $\lambda\in\Lambda$,都确定了一个集合 A_λ,则称 Λ 为**指标集**或

下标集,并称$\{A_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$是以$\Lambda$为指标集的一个**集族**.

将集族$\{A_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$中所有集合的元素放到一起构成的新集合称为这族集合的**并集**或**和集**,记做$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$(读做"集族$\{A_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$的并集"),即

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x\mid\text{存在 }\lambda\in\Lambda,\text{使 }x\in A_\lambda\}.$$

将集族$\{A_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$中所有集合的共同元素放到一起构成的新集合称为这族集合的**交集**,记做$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$(读做"集族$\{A_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$的交集"),即

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x\mid\text{对每一 }\lambda\in\Lambda,\text{都有 }x\in A_\lambda\}.$$

若对任意$\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda$,当$\lambda_1\neq\lambda_2$时,均有$A_{\lambda_1}\cap A_{\lambda_2}=\varnothing$,则称集族$\{A_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$是**互不相交的**.

例 1 设$A=\{1,2,5,6\}$,$B=\{3,5,7,8\}$,则$A\cup B=\{1,2,3,5,6,7,8\}$.

例 2 设$\Lambda=\mathbb{R}$,$A_\lambda=\{x\mid-\infty<x<\lambda\}\ (\lambda\in\Lambda)$,则

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\mathbb{R},\quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\varnothing.$$

例 3 设$A_n=\left\{x\,\middle|\,1-\dfrac{1}{n}<x<1+\dfrac{1}{n}\right\}\ (n=1,2,\cdots)$,则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(0,2),\quad \bigcap_{i=1}^{n}A_i=\left\{x\,\middle|\,1-\frac{1}{n}<x<1+\frac{1}{n}\right\}=A_n,\quad \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{1\}.$$

例 4 设$A_n=\{x\mid n\leqslant x\leqslant 2n\}\ (n=1,2,\cdots)$,则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=[1,+\infty),\quad \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing.$$

定理 1 对于集合的并和交运算,有以下规律:

(1)(**交换律**)$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2)(**结合律**)$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3)(**分配律**)$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4) $A\cap A=A\cup A=A$, $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$.

定义 11 由所有属于集合A而不属于集合B的元素放到一起构成的新的集合称为A与B的**差集**,简称为**差**,记做$A-B$或$A\backslash B$(读做"A差B").

定义 12 如果在某一问题中所考虑的一切集合都是给定集合S的子集,则称集合S为**全集**. 称$S-B$为B的**余集**或**补集**,记做C_SB或B^c(读做"B的余集"或"B的补集").

定理 2 对于集合的差和余运算,有以下规律:

(1) $A\cup B=A\cup(B-A)$, $A\cap(B-A)=\varnothing$;

(2) 当$A,B\subset S$时, $A-B=A\cap B^c$;

(3) 若$A\subset B\subset S$,则$B^c\subset A^c$;

(4) $A\cup A^c=S$, $A\cap A^c=\varnothing$.

定义 13 对于两个给定的集合 A 与 B，称 $(A-B)\cup(B-A)$ 为 A 与 B 的**对称差集**，简称为**对称差**，记做 $A\Delta B$.

注意：对称差 $A\Delta B$ 是由属于 A，B 之一，但又不同时属于两者的一切元素构成的集合.

定理 3 关于对称差，有如下基本性质：

(1) $A\cup B=(A\cap B)\cup(A\Delta B)$；

(2) $A\Delta\varnothing=A$，$A\Delta A=\varnothing$，$A\Delta A^c=X$，$A\Delta X=A^c$，$A^c\Delta B^c=A\Delta B$；

(3) (**交换律**) $A\Delta B=B\Delta A$；

(4) (**结合律**) $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$；

(5) (**交与对称差的分配律**) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$；

(6) 对任意集合 A 与 B，存在唯一的集合 C，使得 $A\Delta C=B$ (事实上 $C=A\Delta B$).

定理 4(德・摩根(De Morgan，1806—1871)公式) 若 $A,B\subset S$，则

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,\quad (A\cap B)^c=A^c\cup B^c.$$

证明 我们只证明第一式，第二式的证明类似.

$$\begin{aligned} x\in(A\cup B)^c &\Longleftrightarrow x\notin A\cup B \\ &\Longleftrightarrow x\notin A，\text{且 } x\notin B \\ &\Longleftrightarrow x\in A^c，\text{且 } x\in B^c \\ &\Longleftrightarrow x\in A^c\cap B^c. \end{aligned}$$

注意：分配律和德・摩根公式对任意一族集合都成立，即

$$A\cap\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\Big)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda),\quad A\cup\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\Big)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A\cup B_\lambda),$$

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c,\quad \Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)^c=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c.$$

三、域(代数)

为了对集合的各种特性进行公理化的研究，进而得到更加深刻的结果，域与 σ 域的概念起到关键作用.

定义 14 对于给定的集合 S，$\mathscr{F}$ 是 S 的一个子集族，若 $\mathscr{F}$ 满足条件：

(1) $\varnothing\in\mathscr{F}$；

(2) 当 $A\in\mathscr{F}$ 时，$A^c\in\mathscr{F}$；

(3) 当 A,B 都属于 $\mathscr{F}$ 时，$A\cup B\in\mathscr{F}$，

则称 $\mathscr{F}$ 是 S 的一些子集构成的**域**或**代数**.

注意：若 $\mathscr{F}$ 是域，由条件(1)与(2)，得 $S\in\mathscr{F}$；当 $A,B\in\mathscr{F}$ 时，由德・摩根公式与条件(2)和(3)，得 $A\cap B\in\mathscr{F}$；由条件(3)与数学归纳法，当有限个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都属于 $\mathscr{F}$ 时，