線形数学

竹内啓著

# 線形数学

東京大学助教授 経博
竹内　啓著

培風館

**著者紹介**

竹内　啓（たけうち　けい）

1956年　東京大学経済学部卒業
東京大学大学院経済学研究科，
東京大学経済学部助手を経て
1966年　経済学博士
現　職　東京大学経済学部助教授

**主要著書**

R.A. フィッシャー・統計的方法と科学的推論（共訳，岩波書店，1962 年）
数理統計学（東洋経済新報社，1963年）



昭和41年2月10日　初　版　発　行
昭和44年10月20日　初版第5刷発行

線形数学

著　者　竹内　啓
発行者　山本健二

発行所　株式会社　培風館
東京都千代田区九段南 4-3-12・振替東京 44725

定価 ¥ 700.

日東紙工印刷・牧製本

# はしがき

この本は，主として社会科学，ことに経済学・統計学を勉強しようとしている人々のための，数学の教科書として書かれたものである。しかしこの本自体は，線形数学そのものの体系を，あくまで数学の本として展開したものであり，その点では自然科学方面の人々にも，1つの数学の教科書として読んでいただけるものと思う。

近ごろ経済学その他の社会科学の分野を専攻する学生あるいは若い研究者の間で，数学に対する関心あるいは熱意は非常に強くなっているように思われる。しかし限られた時間の中で，数学のいろいろな分野を広く勉強することはむずかしいし，また数学の全分野が一様に必要であるというわけでもない。また特定の分野に限っても，どのような定理をどのような形で展開すべきかについても，おのずから経済学への応用に適した方法というものが考えられねばならないだろう。

この本では，この点を念頭におきつつ，ベクトル（ユークリッド空間）を中心テーマとして，線形代数および解析の一通りを説明することにした。そうして，特に線形計画法と非負ベクトルのような経済学の分野に関係の深い部分には若干の立ち入った説明を加えた。また解析では，特にラグランジュ乗数法の厳密な理論づけに注意を払ったつもりである。一方積分についてはまったくふれなかったし，また不動点定理も取り入れることができなかった。これは主としてこのような小さい本の中で一応の体系的一貫性を保つことをねらいとしたためである。もちろん内容からいえば，ここに書かれていることは，すでに多くの本で論ぜられているところであるが，説明，論理の展開には，私なりのくふうも加えたつもりである。

この本を読むための予備知識としては，高校の数学以上のものは必要としないはずであるが，第 8〜9 章には一応1変数の解析に関する基本的な知識が望まれるかもしれない。また内容の展開にあたっては，論理的厳密性にかなり重点をおいた。一面からいえば，それだけわかりにくいところもあるかもしれないが，経済学等を学ぶ人々にとっても，ただあれこれの公式を知るだけではな

く，その論理的基礎を正しく把握しておくことは必要であると思う。

この本を書くにあたっていろいろと示唆をいただいた方々，あるいは書物は多いが，ここでいちいちお名前をあげることは遠慮させていただきたい。ただこの本の出版にあたって，培風館の野原氏，森平氏，小関氏にいろいろと御尽力いただいたことを記して，お礼を申し上げたい。また東京大学大学院経済学研究科の佐和隆光君には，原稿の作成から校正あるいは問題解答について協力していただいた。また経済学部の私のゼミナールの学生諸君にもいろいろと手伝っていただいたところもある。ここで感謝の意を表したいと思う。

1965年12月

竹内　啓

# 目　次

# はじめに

社会科学において，数学がどの程度，またどのように有効に使われるかについては，いろいろな見解がありうるであろう。しかし社会科学一般，とくに経済学において，数学的方法がますます広く使われるようになりつつあることは，否定しえない事実である。

数学の特徴は，その論理的一貫性と厳密性にあることは，あらためて指摘するまでもないことであろう。すなわち数学の体系は一定の命題（定義と公理）から厳密に論理的な演繹のみによって組み立てられたものである。“何事も証明なしに信じてはならない”というのは，数学の基本的な要求である。直観や経験にもとづく判断は，数学においても新らしい命題を発見したり，導かれる結論を見当づけたりするには大いに有効であることが多いが，命題そのものは厳密に証明されない限り，数学上の定理として確立されたものとはならないのである。

ところで数学がまったく論理的な法則によってのみ展開されるとすれば，数学を理解するには論理の法則さえ知っていればよいわけであり，したがってそこには困難はないはずである。しかし現実には，数学が必ずしも理解しやすいものとされないのは，厳密な論理的な展開は，なれないものにとっては必ずしも親しみやすいものではないからであり，また数学の論理的な展開にもそれ自体特有のパターンがあって，そのいわば“くせ”を理解することが必要だからでもあろう。たとえば「AならばBである」という命題を証明するのに，「BでないとA仮定する。そうするとAとは矛盾する結論が得られる」という形の論法を用いることはきわめて多いが，これで証明になっているということを理解するためには，やはりある程度の“なれ”が必要であろう。

数学が有効に利用されるという場合，そこに2通りの場合があるように思わ

れる。第1は論理的な推論の過程を明確化することであり，一定の前提からどのような結論が得られるか，どのような結論が得られないかを厳密に推理するために数学を利用することである。その前提と得るべき結論を，数学的な概念に翻訳して数学的に「モデル化」し，それによって一定の結論が得られるための条件を吟味することである。たとえば「利潤極大を目ざして企業が行動するとすれば，雇用量は賃金と労働の限界生産力が等しくなるところに定められる」というような命題が一定の前提（完全競争，限界生産力減少等）の下に証明されるであろう。逆にいえば，一定の条件が成り立たなければ，このようなことがいえないということもわかるであろう。第2は，より具体的に一定の条件の下で，一定の目的のためにとるべき行動，あるいは一定の条件の下でどのような結果が生ずるかの具体的な状況を求めることである。たとえば「利潤極大にするためには，生産量，雇用量等をどのように決めたらよいか」というような問題を具体的に解くことである。

もちろん具体的な問題を解くためには，一定の理論的な命題が前提されねばならないことが多いであろう。しかしながら，解を具体的に求めることと，解の存在あるいは解の性質等を一般的に論ずることとは必ずしも同じではない。たとえば数理経済学では，一般的な均衡の存在，その安定性等が論ぜられることが多いが，そのような議論は具体的な日本の経済の均衡点を求めることとは，ほとんどまったく無縁である。

経済学における数学の利用は，長い間上記の第1の場合に限られていた。すなわちもっぱら理論的な命題の意味を明確化するために数学的な表現が利用されてきた。しかし近年になって（主として第2次大戦後）経済学に関連した分野においても，具体的な“答”を求めることがしばしば行われるようになってきた。それは1つには経済政策が複雑な経済の状況に対応して，ますます大規模かつ高度なものになりつつあるためであり，他面ではそのための分析手法（国民所得分析，国民会計計算，産業連関分析等）と基礎データが作られるようになってきたからである。また企業においても，最適な行動を決定するための数学的手法がオペレーションズ・リサーチの名の下に広く導入されている。またこれに関連して，高速度電子計算機の普及が大規模な計算を可能にしたことも，見逃しえない事実である。

このような状況の下に，経済学において用いられる数学の内容も，かなり変わったということができる。とくに微積分にかわってベクトルの概念を中心と

した，一言でいえば線形空間の理論が中心を占めるようになったということができよう。またさらに，ベクトル，行列，行列式等のいわゆる線形代数についても，線形計画法の理論等新らしい分野が生まれ，また同じ問題についても重点のおきかたにも変化が生じてきている。

この本はこのような事情を念頭におきつつ，第1〜7章はいわゆる線形代数，第 8〜9 章は多変数の解析の問題をとりあげた。普通のいわゆる線形代数のほかに，線形計画法の理論にもふれ，経済学で重要な意味をもつ非負ベクトル，非負行列の問題にも1章をさくことにした。また多変数の解析は“多変数”の問題としてではなく，もっぱらベクトルの函数関係という観点からとり扱い，それによって全体としての統一をはかったつもりである。

この本は文体の上では，まったく数学の本として書いたつもりである。それは一面では社会科学系の学生の人々に，数学的な論理のパターンというものを示すという意図も含まれている。この点このような文体になれない人々にとっては，最初は読みにくいかもしれないが，数学的な予備知識は高校卒業程度以上は必要としないはずであるから，読みなれればそれほど困難は感じられないであろうと思う。なお全体として具体的な計算手法との関連も心がけて書いたつもりである。文中の例題については読者が自ら計算を進めながら読まれることを希望する。

# 第 1 章
# ベ ク ト ル

## 1-1 ベクトル

### 1-1·1 定 義

$n$ 個（$n \geqq 1$）の実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を次のように 1 列にならべたものを **$n$ 次元実ベクトル**（$n$-dimensional real vector）と呼ぶ。この本では，ベクトルはすべてゴシック体で表わすことにする。

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の**成分**（component）と呼ばれる。

2 つの $n$ 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は，その成分がすべて等しいとき，互いに等しいとし，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ と表わす。すなわち

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

とするとき，$a_i=b_i (i=1, 2, \cdots, n)$ となるとき，そのときに限って

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$$

である。

実ベクトルについて，次のような演算を定義する。

**1° ベクトル $\boldsymbol{a}$ の定数倍**　ベクトル $\boldsymbol{a}$ の各成分に一定の定数 $c$ を乗じて得られるベクトルを，$\boldsymbol{a}$ の $c$ 倍と呼び，$c\boldsymbol{a}$ と表わす。すなわち

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad のとき \quad c\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

である。ベクトルの**定数倍**は，また**スカラー倍**とも呼ばれる。

2° **2つのベクトルの和** 2つの$n$次元ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の各成分の和を成分とするベクトルを，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の和と呼び，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と表わす。すなわち

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad のとき \quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

である。

$c$, $d$ を定数，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ をベクトルとするとき，$c\boldsymbol{a}$ と $d\boldsymbol{b}$ の和を

$$c\boldsymbol{a}+d\boldsymbol{b}$$

と表わす。このような形に表わされるベクトルを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の**1次（線形）結合**(linear† combination) と呼ぶ。

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad のとき \quad c\boldsymbol{a}+d\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} ca_1+db_1 \\ ca_2+db_2 \\ \vdots \\ ca_n+db_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

（ベクトルについても，普通の数の場合と同じく，掛け算を足し算よりさきにするという規則に従う。そのために $(c\boldsymbol{a})+(d\boldsymbol{b})$ というような形に書かないで，単に $c\boldsymbol{a}+d\boldsymbol{b}$ と書くのである。）

普通の定数も，1次元ベクトルとみなせばベクトルと考えることもできる。

**定理 1·1** $c$, $d$ を定数，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ をベクトルとするとき，次の関係が成り立つ。

i） $c(d\boldsymbol{a})=d(c\boldsymbol{a})=(cd)\boldsymbol{a}$（これを $cd\boldsymbol{a}$ と書く）

ii） $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

iii） $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$（これを単に $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ と書く）

iv） $c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=c\boldsymbol{a}+c\boldsymbol{b}$

---

† linear の訳語は‘1次’，‘線形’の双方が用いられる。‘線形’の語は直訳であるが，意味内容からすれば‘1次’の方が適切である場合が多い。この本では適当に両者をまぜて用いる。例. linear space 線形空間，linear equation 1次（方程）式。

v）　$(c+d)\boldsymbol{a}=c\boldsymbol{a}+d\boldsymbol{a}$

証明はすべてベクトルの定義と，普通の四則の法則から容易に導びかれるから省略する。

成分がすべて0に等しいようなベクトルを**ゼロベクトル**（zero-vector）と呼び $\mathbf{0}$ と表わす。

またベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $(-1)\boldsymbol{a}$ を $-\boldsymbol{a}$ と表わし，$\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$ を $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ と表わす。

**定理 1·2**　任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ および任意の定数 $c$ に対して

i）　$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$

ii）　$0\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$

iii）　$c\mathbf{0}=\mathbf{0}$

iv）　$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$

この定理の証明も容易であるから省略する。

一般に $m$ 個の $n$ 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_m$ および $m$ 個の定数 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_m$ について $c_1\boldsymbol{a}_1,\ c_2\boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ c_m\boldsymbol{a}_m$ の和

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_m$$

をその1次（線形）結合と呼ぶ。すなわち

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\vdots\\a_{1n}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}a_{21}\\a_{22}\\\vdots\\a_{2n}\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{a}_m=\begin{bmatrix}a_{m1}\\a_{m2}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}$$

のとき

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_m=\begin{bmatrix}c_1a_{11}+c_2a_{21}+\cdots+c_ma_{m1}\\c_1a_{12}+c_2a_{22}+\cdots+c_ma_{m2}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\c_1a_{1n}+c_2a_{2n}+\cdots+c_ma_{mn}\end{bmatrix}\tag{5}$$

**問題 1.**　次のことを示せ。

i）　$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$　　ii）　$\mathbf{0}-\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$　　iii）　$\underbrace{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\cdots+\boldsymbol{a}}_{m\text{個}}=m\boldsymbol{a}$

**問題 2.**　次の和を求めよ。

i）　$\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\-2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\5\\3\end{bmatrix}$　　ii）　$2\begin{bmatrix}3\\4\\2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\2\\3\end{bmatrix}$

iii) $3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

### 1-1·2 1次従属，1次独立

$m$ 個の $n$ 次元ベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ に対して，すべてが0ではない定数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ を用いて，

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0} \qquad (1)$$

となるとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ は**1次従属**（linearly dependent）であるという。ベクトルの組が1次従属でないとき，すなわち（1）が成り立つとき，必ず $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ となるならば，それらは**1次独立**（linearly independent）であるという。

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が1次従属ならば，たとえば $c_i \neq 0$ とすれば（1）から

$$\boldsymbol{a}_i = -\frac{c_1}{c_i}\boldsymbol{a}_1 - \frac{c_2}{c_i}\boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{c_{i-1}}{c_i}\boldsymbol{a}_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i}\boldsymbol{a}_{i+1} - \cdots - \frac{c_m}{c_i}\boldsymbol{a}_m$$

となるから $b_1 = -\frac{c_1}{c_i}, \cdots, b_m = -\frac{c_m}{c_i}$ とおけば

$$\boldsymbol{a}_i = b_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + b_{i-1}\boldsymbol{a}_{i-1} + b_{i+1}\boldsymbol{a}_{i+1} + \cdots + b_m\boldsymbol{a}_m \qquad (2)$$

となる。逆に（2）が成り立てば，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が1次従属であることは明らかである。したがってベクトルの組が1次従属であることは，その中のいずれか1つが他のものの1次結合として表わされることに等しい。

1次独立あるいは1次従属の概念は，以下の議論において基本的な重要性を持っている。

**例 1.** 2つのベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ は1次独立である。証明は次の通り。
$c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とすれば

$$c_1 + c_2 = 0, \qquad 2c_1 - c_2 = 0$$

これから $\qquad 3c_1 = 0 \qquad \therefore \quad c_1 = 0,\ c_2 = 0$

**例 2.** 3つのベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ となるから，1次従属である。

**問題 3.** 次のベクトルの組が1次独立か，1次従属かを調べよ。

i） $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ ii） $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ iii） $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}b\\a\\c\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}c\\b\\a\end{bmatrix}$

**問題 4.** $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ がいずれも2次元ベクトルならば，それらはつねに1次従属であることを示せ。

**問題 5.** 次のことを証明せよ。

i） $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が1次独立，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}$ が1次従属ならば，$\boldsymbol{a}_{m+1}$ は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ の1次結合として表わされる。

ii） $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ を$n$次元ベクトルとする。$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+c_{21}\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+c_{31}\boldsymbol{a}_1+c_{32}\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{a}_m+c_{m1}\boldsymbol{a}_1+c_{m2}\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_{m,m-1}\boldsymbol{a}_{m-1}$ と表わされるとき，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が1次独立ならば 1次独立，1次従属ならば1次従属である。

**定理 1·3** $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ をそれぞれ任意の$n$次元ベクトルとし，

$$\boldsymbol{b}_1=c_{11}\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_{1m}\boldsymbol{a}_m$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{b}_l=c_{l1}\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_{lm}\boldsymbol{a}_m$$

とするとき，もし $l>m$ ならば，$\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_l$ は1次従属である。

**証明** $m$に関する数学的帰納法を用いる。

i） もし $m=1$ ならば

$$\boldsymbol{b}_1=c_{11}\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_l=c_{l1}\boldsymbol{a}_1$$

となるから，$l>1$ のとき

$$t_1c_{11}+\cdots+t_lc_{l1}=0$$

となるような，すべてが0ではない定数 $t_1, \cdots, t_l$ が必ず存在する。そうしてこの $t_1, \cdots, t_l$ を用いれば

$$t_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+t_l\boldsymbol{b}_l=(t_1c_{11}+\cdots+t_lc_{l1})\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{0}$$

ii） $m\leqq k$ のとき定理が成り立つことが証明されたものと仮定して，$m=k+1$ の場合を考える。

いま $c_{1m}=\cdots=c_{lm}=0$ ならば，$\boldsymbol{a}_m$ は実は考慮に入れなくてよいことになるから，$m\leqq k$ の場合に帰着する。

$c_{1m}, \cdots, c_{lm}$ のすべてが0ではない場合，たとえば $c_{lm}\neq 0$ であったとする。そのとき

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_1=\boldsymbol{b}_1-\frac{c_{1m}}{c_{lm}}\boldsymbol{b}_l, \cdots, \tilde{\boldsymbol{b}}_{l-1}=\boldsymbol{b}_{l-1}-\frac{c_{l-1,m}}{c_{lm}}\boldsymbol{b}_l$$