赤 攝也 監修

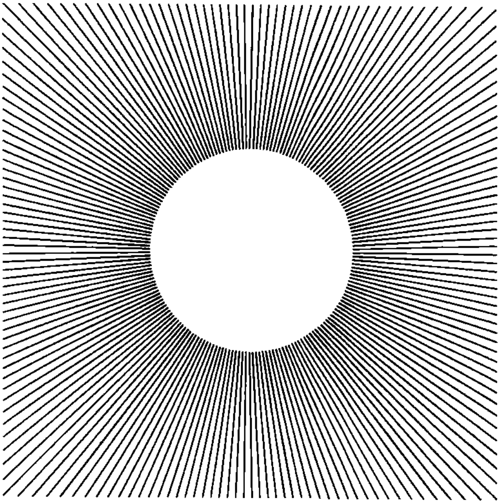
現代数学レクチャーズ B–4

線型代数学

渡辺 豊 著

培風館

渡辺 豊 著



渡　辺　豊　略歴
わたなべ　ゆたか

1962年　名古屋大学理学部数学科卒業
1964年　名古屋大学大学院理学研究科
　　　　修士課程修了
現　在　奈良女子大学理学部助教授
　　　　理学博士

昭和54年3月20日　初　版　発　行

現代数学レクチャーズ B-4
線 型 代 数 学

著　者　渡　辺　豊
発行者　山　本　健　二
発行所　株式会社　培　風　館
東京都千代田区九段南 4-3-12・郵便番号 102
電話 (03) 262-5256(代表)・振替東京 4-44725

定価 ¥ 1600.

日東紙工印刷・三水舎製本

著者の承認をえて検印を省略しました

3341-0424-6955

現代数学レクチャーズ

刊行に際して

今や数学は，理工系の各分野のみならず，文科系の各分野はもちろん，広く政治・経済・企業経営等の実務の面においても，必要欠くべからざる道具となってきている．およそ，物を合理的・科学的に考えようとする場合には，数学，あるいは数学的な考え方を無視することはゆるされない．“数学は語学である”といわれる所以である．

また，最近の数学自身の進歩，ならびに数学と関連の深い電子計算機の社会への浸透にもいちじるしいものがある．

このような事情から，当然のことながら多くの数学書が出版されるようになり，その中には，すでに高い声価を得ているものも少なくない．

しかしながら，数学になれない人達，とくに高校生，教師，文科系の大学生，文科系出身の実務家などからは，よりわかりやすい書物の刊行に対する要望が多いのである．

また，さらに高度の数学を習得しようとする数物系・理工系の人達からは，より適切，かつより親切な入門書を求める声が高い．

このことは，すでに刊行されている数学書だけでは，埋めることのできない多くの空白があることを示すものである．

では，この空白を埋めるのにはどうしたらよいか．

およそ，数学を勉強していく場合には，いろいろの段階で“入門”をする必要がある．したがって，われわれは，まず，その“いろいろの段階”なるものを組織的に整理してみなければならない．そして，それぞれの段階にふさわしい入門書を注意深くつくって提供していかなければならない．そうすることによって，はじめて上のような空白を埋めることができるであろう．

この「現代数学レクチャーズ」は，以上のような見地に立って企画されたシリーズに他ならない．

われわれは，この趣旨を最大限に生かすため，シリーズ全体を次の 4 群に分ける：

A 群：　大学教養課程学生・教育系学生，小・中・高教師，高校生，一般人を対象とする入門書群

B 群：　数物系の大学生向けの入門書群

C 群：　理工系・医薬系の大学生，技術者，研究者向けの入門書群

D 群：　法文経系の大学生，実務家，研究者向けの入門書群

また，“入門書”としてよりふさわしいものとするため，次の措置をとる．すなわち，記述の方式は，ひとりで読みすすむ人達の便宜をも考え，“講義式”を採用することとする．解説は，つとめて具体に即するようにし，その発想の源を十分に理解できるようにする．各章・節の冒頭には，それら章・節の要約をかかげ，その目的と意味とをあらかじめわかるようにすることを心掛ける．

さらに，各節をできるだけ短い“小節”に区切り，小節ごとに完全に理解できるようにする．一般的にいっても，また勉強のために毎日十分な時間の得られない人達のことを考えても，小刻みに要点を短時間でしっかり理解できるようにすることが望ましいと思うからである．また，このような構成は手早く前のことを復習するのにも役立つであろう．

われわれは，このシリーズの各分冊の書名，内容のリストを慎重に整備すると同時に，すぐれた執筆者を得ることに力を注いだ．幸い，多くの方がこのシリーズの趣旨に御賛同下さり，極めて強力な執筆陣を整えることができたことを心からうれしく思う．執筆をお引き受け頂いた方々に深く感謝する次第である．

本シリーズが広い範囲の方々のお役に立つことを願ってやまない．

1977 年 10 月 10 日

赤　攝　也

まえがき

この書物は，幾人かの人々の協力によってでき上がった．有益な助言を惜しまなかった友人諸氏，奈良女子大学の同僚諸氏に，まず心からのお礼を述べさせて頂く．

多くの線型代数学の教科書とは異なって本書では，短い序章のあとすぐに，抽象的なベクトル空間と線型写像が扱われる．列ベクトルや行列はそれらを表現するものとして登場し，次の第2章で抽象論との平行性が強調される．線型代数学を学習するに際しては，こういったベクトル空間の理論にできる限り早く慣れることが大切なのである．行列演算や行列式の計算を軽視してよいというわけでは，決してないけれど．

その行列式は続く第3章で，線型変換の重要な不変量として扱われる．これは本書の中で最も理屈っぽくない箇所であり，ここまで読んできた読者には歓迎されることだろう．一種の divertissement.

Jordan 標準形は，線型代数学の中では数少ない，自明でない部分である．ここでは単因子論によらないで，f-不変部分空間への直既約分解を表面に立てた方法で，証明を与えておいた．その結果，この部分の「自明でなさ」が第4章補題12に集約された形となったようである．Jordan 標準形の一意性は，f-直既約分解の一意性を module theoretic に証明することによっても示されるわけであるが，これはほとんど Krull–Schmidt の定理なので，敬遠せざるを得ず，逆に Jordan 標準形の一意性から f-直既約分解の一意性を証明した．姿勢としてはいささか曖昧であったとの批判は，甘受しよう．

第5章に続いて，章を改め，二次形式の代数的理論への入門的部分を述べようと思ったのであるが，ページ数の制約その他の理由で断念し，わずかに 5.4 節の叙述にその名残りをとどめるだけとなった．第5章は正規変換と，双一次形式の理論が中心である．

数学の他の分野への応用は，中途半端になることを怖れてほとんど述べなかったが，読者が数学を更に深めていったとき，予備知識としては，ここに書か

れている内容だけで十分と信じる．

本書の叙述は，このシリーズの意図するところにより，独習者の便をできる限り考慮したつもりである．重要な概念にはていねいな説明を与えておいた．大部分の読者には迎えられることと思うが反面，このていねいさが煩わしく感じられる人もいることだろう．双方の読者の賛同を同時に得るには，著者の筆力があまりにも弱いということを認めざるを得ない．

例，例題および問は，各項ごとに番号をつけた．あとで引用するとき，たとえば3.1.2例題2とあれば，第3章第1節第2項の例題2という意味である．本書のように一項目が見開きページになっている場合，この方が該当の例題などを探すときに便利であろうと思う．ただ，定理だけは各章ごとの通し番号をつけておいた．

最後になったが，執筆をお勧め頂いた赤攝也教授と，培風館の牧野末喜氏に心から感謝する．

1978 年　夏

著　　者

目　次

0

序　章

線型代数学はベクトル空間と線型写像の代数的理論である．少なくとも本書はその立場で書かれている．

ベクトル空間という言葉から，読者はどのようなものを思い浮かべるだろうか．ベクトルとよばれるものによって構成されている空間らしきものを，漠然と考えていただければ，今のところはよい．正確な定義を与えて，そこで厳密な理論を展開するのは第1章以降のことであって，急ぐことはない．「ベクトル空間」を知らなくても読者は，「ベクトル」については周知のはずである．しかもいろんなベクトルを知っている．位置ベクトル，行ベクトル，列ベクトル，それに有向線分を意味する（特別な言葉を冠せずによばれるところの単なる）ベクトル．

読者は初等幾何のいくつかの問題が，ベクトルを使うことによってうまく処理されることを知っている．その処理の「うまさ」を印象づける理由の一つは，幾何の問題が，ベクトルの和や実数とベクトルの積(スカラー積)などという代数的な演算だけで，いわば幾何学的な扱いを離れたところで話が進められていく点にある．極論すれば，この場合証明の途中ではベクトルが有向線分などという幾何学的な対象であることを忘れてもよい，ということである．

本書は上に述べた方法を徹底させる立場で書かれている．それによってベクトルの機能が一層透明なものとして見えてきて，しかも今までに知っていたベクトル以外の多くのものがベクトルとして扱うことを可能にすることを読者は知ることだろう．ただ，あまりにもこの立場に専心し，今まで知っていた具体的な幾何学的なベクトルを忘れてしまうことは多少危険である．それはベクトル空間のもつ一つの重要な側面を落としてしまうことになるからである．

1. 一つの平面内のベクトル全体からなる集合を E^2 と書き，一つの空間内のベクトル全体の集合を E^3 と表わす．次に，2次列ベクトル $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 全体の集合を $\mathbb{R}^2$ と書く．$\mathbb{R}^2=\left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\middle| a, b \in \mathbb{R}\right\}$（ただし $\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表わす）である．同様に3次列ベクトル全体からなる集合を $\mathbb{R}^3$ と表わすことにしよう．

しばらくこの四つの集合(それらの元はいずれも「ベクトル」という名でよばれているのであるが)を例にとって話を進める．

これら四つの集合はそれぞれ異なった集合であるが，共通した一面を有している．それはこれらが同種の演算をもつということであって，それがゆえにこれらの元が同じようにベクトルとよばれるのだ，といってもよい．E^2, E^3, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ のうちのどれでもよいから一つを V と書くことにしよう．V の元 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対してその和とよばれる V の元 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ を作る規則が定まっている．$V=E^2$ または $V=E^3$ のときには，それは平行四辺形を使って定義される読者周知のものであり，$V=\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ならば，各成分ごとの（実数の）和で定義されるものであった；$\mathbb{R}^2$ では $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+a' \\ b+b' \end{bmatrix}$, $\mathbb{R}^3$ でも同様．V はもう一つスカラー積(実数とベクトルの積)とよばれる演算をもっていて，それは実数 a と $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $a\boldsymbol{x}$ なる V の元を定める規則である．E^2, E^3 では $a \geq 0$ のときは $\boldsymbol{x}$ をその方向に a 倍に，$a<0$ のときは逆方向に $|a|$ 倍に伸ばしたものであり，$\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ では各成分を a 倍したものである；$\mathbb{R}^2$ では $a\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ab \\ ac \end{bmatrix}$, $\mathbb{R}^3$ でも同様．

読者は E^2 と $\mathbb{R}^2$, E^3 と $\mathbb{R}^3$ はそれぞれ同じ内容のものであり，そこでの演算も実は同一のものであると考えるかもしれない．その直感は正しい．しかしそれと同時に，平面内のベクトルなるものと実数を縦に二つ並べた列ベクトルなるものとは違うものであるということは，はっきりさせておいた方がよい．これら相異なるものを同一視するその「見方」も，当然われわれが扱わねばならない問題であって，それを数学的に定式化する必要は確かにある．しかしこれは，今のところ別問題である．

重要なことは，われわれがベクトルを扱うときには(その実体を離れて)この二つの演算にだけ依存していたのだ，ということの認識である．

これらの演算は，**基本性質**とよばれるよい性質をもっていたことを思い出そう．それは次のようなものであった．

V 1) 任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in V$ に対して，$\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$.

V 2)　V には零ベクトルとよばれ $\mathbf{0}$ と書かれる特別な元が存在し，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$ を満たしている．

V 3)　任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，$\boldsymbol{x}$ の逆ベクトルとよばれ $-\boldsymbol{x}$ と書かれる V の元が存在して，$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ を満たしている．

V 4)　任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$.

V 5)　任意の $a \in \mathbb{R}$, 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$.

V 6)　任意の $a, b \in \mathbb{R}$, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $(a+b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$.

V 7)　任意の $a, b \in \mathbb{R}$, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $a(b\boldsymbol{x})=(ab)\boldsymbol{x}$.

V 8)　任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

これらは E^2, E^3, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ において簡単に証明されるもので，しかも自然な性質である．この基本性質が成り立っているので，われわれは和やスカラー積を自由に扱うことができたのであった．というよりはむしろ，ベクトルを扱うときには，二つの演算のこれらの性質だけを頼りに議論を進めていたのだ，といった方がよい．

V 1)〜V 8) を見ると，読者の中にはここに挙げた四つの例以外にもこれらを満たすような二種類の演算をもっているものがあることに気付く人も多いと思う．たとえば複素数全体の集合（これを $\mathbb{C}$ と書く）がそうである．複素数には和が定義されているし，実数と複素数の積も定まっている．そしてこの二つの演算が V 1)〜V 8) を満足していることもわれわれはよく知っている†．実数全体の集合 $\mathbb{R}$ も同じことである．実数の和，実数と実数の積が上の基本性質を満たしているからである．他にもたとえば，X を不定元とする実係数多項式（整式）全体の集合（これを $\mathbb{R}[X]$ と書く）についても同様である．その和および多項式の実数倍という演算は，確かに V 1)〜V 8) を満足している††.

ということは，$\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ それに $\mathbb{R}[X]$ 等も最初に挙げた四つの例と同じ扱い，いうなればベクトルとしての扱いを受けることが可能である，ということをこれらの事実は示唆していると考えられる．ともかくこういったことは，第 1 章以降において正確な言葉で学習する．今は感覚的な理解にとどめておこう．

---

† ここでは複素数同士の積は考慮されていない．したがって，こういった方法で複素数を単なるベクトルとして扱うことは，複素数の特性を見る上には十分とはいえず，一面のみを強調していることになる．複素数の面目は複素数同士の積にあるのだから（付録参照）．

†† 前註と同様のことがここでもいえる．

2. 前に述べかけた E^2 と $\mathbb{R}^2$ の関係について考えよう．これらを同じものと見るその見方は次のようであった；

平面に原点を一つ定める．それを O としよう．E^2 の元 $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と表わされる．A は $\boldsymbol{x}$ によって一意的に定まる点である．この点 A を，O を原点とする一つの固定された座標軸によって成分表示したものを $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ とする．今 $f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ とおけば，f は E^2 から $\mathbb{R}^2$ への写像であって，われわれはこの $\boldsymbol{x}$ に $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ を対応させる写像であるところの f を通して，E^2 と $\mathbb{R}^2$ とを同一視していたのであった．その「同一視できる」ことの根拠は，まず f が上への一対一対応であることであり，それと同時に重要なことは，f が E^2 と $\mathbb{R}^2$ のベクトル演算を保っているということである．つまり f は，

L 1) $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$,

L 2) $f(a\boldsymbol{x})=af(\boldsymbol{x})$

なる二条件を満足している．断わるまでもなく，左辺の演算 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $a\boldsymbol{x}$ は E^2 での和，スカラー積であり，右辺のは $\mathbb{R}^2$ でのものである．これと同様のことは E^3 と $\mathbb{R}^3$ についてもいえる．

演算処理にのみ注目するならば，$\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ の方が E^2 や E^3 よりはるかに機械的であるということ，すなわち E^2 と $\mathbb{R}^2$, E^3 と $\mathbb{R}^3$ はそれぞれ同じ内容をもつとはいいながら，後者の方がより機能的で扱いやすいという点を認識しておこう．そうすると，この同一視できることの効果については今さら述べるまでもないだろう．E^2 や E^3 での図形に頼った演算が，$\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ での機械的な見通しのよい演算におきかえられるわけだから．特に E^3 では，そこでのベクトル演算は，たとえば3個以上のベクトルの和を考えたりするとき，かなりわかりずらいものであることは経験していることだろう．

話を上の二つの条件 L 1), L 2) に戻す．これらを満たす写像で読者のよく知っているものが他にもある．線型変換(一次変換)がそうであった．それは，高校の教科書によるならば，$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像 f であって，行列 $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ によって $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} pa+qb \\ ra+sb \end{bmatrix}$ なる規則で与えられるものであった．この写像 f が上記の条件 L 1), L 2) を満足していることは，読者にはよく知られていることであろう．

この二つの例は，後者が同一集合間の写像であり前者が相異なる集合間の写

像であるわけで，それに前者が上への一対一対応であるのに後者が必ずしもそうでない，というようにその性格は違っているが，条件 L 1)，L 2) を満たしているという点において一致している．その意味で，これらも統一的に扱うことの可能性をもっている，と思ってよいだろう．

E^2 と $\mathbb{R}^2$, E^3 と $\mathbb{R}^3$ は上に述べたように同一視できることは知っているわけだが，E^2 と E^3 についてはどうかを考えよう．これらが先の例のようには同一視できないことも読者は(少なくとも経験的には)知っているはずである．つまり E^2 と E^3 は本質的な異なり方を見せているわけであるが，その本質的差異を示すのは基本ベクトルの個数であった．E^2 の元 $\boldsymbol{x}$ は，基本ベクトル(または基底)とよばれる 2 個の固定されたベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ によって $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2$ (x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$) と一意的に表わされるわけであり，E^3 について同じことをいうためには 3 個の基本ベクトルを必要とする．この事実は確かに E^2 と E^3 の本質的な，いうならば構造的な異なり方を示している．

このことによって，漠然とではあるが「次元」という言葉が浮かぶ．つまり E^2 は 2 次元であり E^3 は 3 次元であり，$\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ もそれぞれ 2 次元，3 次元であるというように．この次元という言葉も，第 1 章で正確に定義されるが，今は漠然とさせたままで話を続けよう．われわれが直観的に知り得る次元は 3 次元以下である．ところが本書では，4 次元以上のベクトル空間も同等に扱われる．そこではもう，図を画いて直観に訴える説明を与えることは(特殊な才能を有する人以外には)不可能なことといわねばならない．にもかかわらず，これら高次元のベクトル空間は，読者が数学の学習を深めていくに従ってあらゆるところに出現する．そのためには第 1 章以降に述べられるように，どうしてもベクトルを，その実体を離れたところで機能中心に捉え直す必要が生じてくるわけである．

3. $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ は，それぞれ E^2, E^3 をその背景にもっているがために具体的な意味があるともいえるが，元来は実数を縦に 2 個ないし 3 個並べただけのものであった．

実数を n 個縦に並べたもの $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $(x_i \in \mathbb{R})$ を n 次**列ベクトル**とよぶ．n 次列ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n$ と記す．二つの n 次列ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ が等しいとは，各 i についてその i 番目の成分が等しいこととする；すなわち $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ とは，$x_1=y_1$, $x_2=y_2$, $\cdots$, $x_n=y_n$ なることと定める†．

$\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ と同じように「ベクトル演算」を定義することができる．つまり，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix}$ によって和を，$a \in \mathbb{R}$ に対し $a\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix}$ によってスカラー積を定義する．ここで定められた二つの演算が最初に挙げた V 1)～V 8) を満たしていることはすぐ確かめられる．実際，V 1) と V 4) は和の定義から明らかであるし，$\mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ が零ベクトルの働きをすること，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ の逆ベクトルが $\begin{bmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}$ で与えられることは，いずれも明らかであり，更にスカラー積についての残り四つの条件もすべて明らかであろう．

$n \geq 4$ のときの $\mathbb{R}^n$ は，4 次元以上の空間内のベクトルの集合 (E^n ; $n \geq 4$ と書かれるべきもの) に対応するわけで，その幾何学的イメージをもつことは困難かもしれないが，$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 4)$ によって表現されるベクトル空間は，前にも述べたように数学の中で至るところに現われるわけで，われわれにとって重要

† 集合を新しく構成したときには，そこに属する元について「等しい」という概念を明確にすることは必要なことである．

な概念なのである.

$\mathbb{R}^n$ と同じように今度は，複素数を n 個縦に並べたものの全体の集合 $\mathbb{C}^n$ を考えることができる.

$$\mathbb{C}^n=\left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| x_1,\ \cdots,\ x_n \in \mathbb{C}\right\} \qquad (\mathbb{C}\text{ は複素数全体の集合}).$$

和および実数とのスカラー積は $\mathbb{R}^n$ のときと同様に定められるわけであるが，この場合複素数との積も $\alpha\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$ $\left(\alpha \in \mathbb{C},\ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n\right)$ によって定義されることは重要である. $\mathbb{C}^n$ において，この和および複素数とのスカラー積が，最初に挙げたV 1)～V 8)（ただしそこで V を $\mathbb{C}^n$ に，$\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ におきかえたもの）を満たしていることは容易に確かめられる. $\mathbb{C}^n$ の元を n 次**複素列ベクトル**とよぶ. それに対して $\mathbb{R}^n$ の元を n 次**実列ベクトル**と，今度はよぶことにしよう.

ここではじめて，複素数とのスカラー積をもつベクトルなるものを知ったわけであるが，その直観的な幾何学的意味をつかむことは（特に2次以上になると）難しいといわねばならない. しかし，それにこだわる必要は全然ない. 演算という機能的な面からベクトルを捉え直すのがわれわれの基本的な姿勢であったわけなので，そういう立場から見た場合，$\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{R}^n$ よりよほどすぐれた特性をもっていることが，特に第 4 章以降において示される. それは主として，次に示すような複素数の著しい性質によるものである.

定理 1. 複素数を係数とする n 次方程式

$$\alpha_n X^n+\alpha_{n-1}X^{n-1}+\cdots+\alpha_1 X+\alpha_0=0 \qquad (\alpha_i \in \mathbb{C})$$

は（少なくとも一つの）複素数根をもつ.

これは Gauss によって証明されたもので，**代数学の基本定理**とよばれている. この証明には若干の予備知識を必要とするので，本書ではこれを証明なしに，そのまま認めるという立場をとる†. この定理によれば，複素数係数の任意の多項式 $f(X)$ は必ず一次因数の積 $f(X)=\alpha(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n)$ に分解されることがわかる. 証明はやさしいので読者自ら試みられたい.

† 証明を知りたい人は，巻末参考書 [2], [4] 等を参照すること.