数学演習講座

10

確率および統計

確率および統計

九州大学教授・理学博士
丸山儀四郎
大阪市立大学教授・理学博士
工藤弘吉
九州大学教授・理学博士
小野山卓爾
京都大学助教授
池田信行
慶応義塾大学助教授
森本治樹

秋月康夫
功力金二郎
佐々木重夫
福原満洲雄
吉田耕作
編集

数学演習講座 10

共立出版株式会社

版権所有
共立出版之印
共立出版株式会社

数学演習講座 10（全15巻） ©

確率および統計 定価 350円

昭和33年2月1日 初版1刷発行
昭和38年4月20日 初版7刷発行
著者代表 丸山儀四郎
発行者 南條安昭
東京都千代田区神田駿河台3-9

印刷者 片岡義郎
東京都中央区越前堀2の22

発行所 東京都千代田区神田駿河台3-9 共立出版株式会社 電話東京291局7121番（代表）振替東京57035

印刷 共立印刷K.K. 製本 中條製本工場 Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会員
NSPA 自然科学書協会

まえがき

全般的にやさしい問題からかなり困難な問題まで幅広くとり入れ，読者の力に応じて，段階的に問題の解法が学べるように努めた．記号，定義，発展の系統など基礎数学講座の項目「確率および統計」にしたがった．本文中にたとえば基・p. 64 とあるのは，同項目中の該当頁を示す．

確率論では，さらに高い理論を学ぶのにもまた理論を応用するためにも，いろいろなモデルの理解が必要である．このために古典的な問題は重要な意味をもっている．そこで第一に古典的に重要な問題をできるだけ多く入れ，これに加えて程度をこえない限りマルコフ連鎖，酔歩などの問題も導入し，新しい理論を学ぶ助けになるようにした．

数理統計学の部では，基礎理論を充分身につけるよう，最近の発展をも考慮して問題をえらび，解法においても注意深く解析を行った．またこれに応ずる数値例もできるだけ豊富にとり入れた．

二，三の実例について山中敏子さんはじめお茶の水女子大学の学生諸君の調査資料を利用し，また計算その他で荻野奈岐さんに御援助いただいた．数値表については，「確率および統計」にのせたものに加えて，1％，5％のFの表を著者の承諾を得て転載した．ここに厚く感謝の意を表わす次第である．

1958 年 1 月

著者一同

目　次

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章 基礎概念

要　　項

1・1　事象と確率

事象とは偶然性のもとに生れる結果をいい，試行（試み）とは一般にくり返えし行う一連の実験の中の一つ一つの実験のことである．一般に事象は紛れることなく結果を区別できるより細かな基本事象の集りだと考えて，事象を点集合で表わすと便利である．

確率の定義：１回の試みで起り得る結果を n 個の場合（$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$）に分類できて，これらの n 個の場合は全体であらゆる場合をつくしていて，また互に相いれない．すなわちこのうちどれか一つが起れば他のいずれも起らないとする．またこれらの n 個のいずれが起ることも同等に確からしいと考えられるとき，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ のうち特定の結果 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots\cdots,\ \alpha_{j_r}$ のどれかが起ることを意味する事象 A の確率 $\mathrm{P}(A)$ とは $\mathrm{P}(A)=\dfrac{r}{n}$ のことである．

また無限回の試みをくり返えすときに起る一定の事象の規則性は経験的によく知られたことであるが，同じ条件のもとで n 回試みを行い，その中事象 A が実現された回数を ν とするとき $\dfrac{\nu}{n}$ を相対度数という．

1・2　事象の組合せ

1°　**合併**　事象 $E_1, E_2, \cdots\cdots,\ E_k$ のいずれかが成り立つことを E とすれば，E を $E_1, E_2, \cdots\cdots,\ E_k$ の合併といい，記号としては，

$$E=E_1\cup E_2\cup\cdots\cdots\cup E_k.$$

2°　**包含**　一般に事象 B が成り立てば，必ず A が成立つ場合，すなわち B が A の十分条件である場合 A は B を含むという．記号は

$$\mathrm{B}\subset\mathrm{A}.$$

3°　**余事象**　事象 E を否定して得られる事象を E の余事象という．記号は

$$E^c.$$

4°　**複事象**　事象 $E=$〔$E_1, E_2, \cdots\cdots, E_k$ がいずれも実現される〕を $E_1, E_2, \cdots\cdots,\ E_k$ の複事象といい，記号は

$$E=E_1\cap E_2\cap\cdots\cdots\cap E_k \quad あるいは \quad E=E_1E_2\cdots\cdots E_k$$

「Aは成り立つがBは成り立たない」という事象すなわち$A\cap B^c$のことを$A-B$と書く.

5° 全事象と空事象 無条件に必ず実現する事象を全事象といいIで表わし，絶対に実現しない事象を空事象といいOで表わす. したがって$I^c=O$また任意の事象Aに対して

$$O\subset A\subset I, \qquad o=\mathbf{P}(0)\leq\mathbf{P}(A)\leq\mathbf{P}(I)=1.$$

公式：(i) $$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$$

(ii) $$(A\cup B\cup\cdots\cdots\cup D)^c=A^c\cap B^c\cap D^c$$ （ドモルガンの公式）

(iii) $$A\cap I=A, \quad A\cap O=O, \quad A\cup A'=I,$$

(iv) A, Bが排反事象であることは $A\cap B=o$

(v) 一般に$(A-B)\cap B=O$だから$A=B\cup(A-B)$. としてAは排反事象の合併で表わされる.

1・3 確率の公式

1° 和に関するもの

(i) $$A\subset B\longrightarrow\mathbf{P}(A)\leq\mathbf{P}(B)$$

(ii) $$A\cap B=O\longrightarrow\mathbf{P}(A\cup B)=\mathbf{P}(A)+P(B)$$

(iii) $$\mathbf{P}(A\cup B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A\cap B)$$

(iv) $$\mathbf{P}(A\cup B\cup C\cup\cdots\cdots)\leq\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C)+\cdots\cdots$$

(v) $$\mathbf{P}(A)=1-\mathbf{P}(A^c)\ .$$

注 (ii)は事象を排反事象に分解して計算するに役立つ. また(ii)から(i)が出る.

2° 条件附確率に関するもの

(i) $$\mathbf{P}(B|A)\equiv\frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)} \quad ただし\quad \mathbf{P}(A)\neq 0$$

(ii) $$\mathbf{P}(A\cap B)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A)=\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B) \quad ただし\quad \mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B)\neq 0.$$

(iii) $$A と B が独立 \rightleftarrows \mathbf{P}(A\cap B)=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B)$$

(iv) $\{A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ が互に独立$\}\rightleftarrows \mathbf{P}(A_i\cap A_j)=\mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)$,

$\mathbf{P}(A_i\cap A_j\cap A_k)=\mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}(A_k)$, $\cdots\cdots\mathbf{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cdots\cap A_n)$

$=\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\cdots\cdots\mathbf{P}(A_n)$ ただし $1\leq i<j<k<\cdots\cdots\leq n\}$

(v) $A_i\cap A_j=O(i\neq j)$（互に排反事象）でかつ$A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_k=I$のとき事象$A$に対して

$$\mathbf{P}(A_j|A)=\frac{\mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}(A|A_j)}{\sum_1^k \mathbf{P}(A|A_i)\mathbf{P}(A_i)}$$

ただし $\mathbf{P}(A_j)\fallingdotseq 0$. （ベイスの公式）

注 a）条件附でない単独の確率を，前者と区別する意味において，特に**絶対確率**ということがある．

b） A と B が独立，B と C が独立でも A と C が独立とは限らないことが証明される．例えば A, B, C 3個のサイコロを A と C だけを紐で結んで一緒に投げると，三つのサイコロにどんな数の目が出るかを考えてみれば，A と B，B と C は独立であるが，A と C は紐で結んであるので独立にはならない．

c） 2° の（iv）の数個の事象の独立は，2個の事象の独立より条件が多いことに注意．$\mathbf{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cdots\cap A_n)=\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\cdots\cdots\mathbf{P}(A_n)$ だけではいけない．

1・4 母函数，二項分布，多項分布

1° 母函数

（i） **定義** $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots$ を実数列とし，

$$A(s)=a_0+a_1s+a_2s^2+\cdots\cdots,\qquad -s_0<s<s_0$$

がある s の一定区間 $(-s_0, s_0)$ で収斂するとき $A(s)$ を数列 $\{a_j\}$ $j=0, 1, 2, \cdots\cdots$ の母函数という．

（ii） 数列から母函数が定まるが，逆に二つの数列の母函数が一致すれば，もとの数列も一致する．

2° 二項分布

（i） **定義** $p_n(k)=b(k;n,p)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k},\qquad \binom{n}{k}={}_nC_k=\frac{n!}{k!(n-k)!},\qquad q=1-p.$

$k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n$. 数列 $\{b(k;n,p)\}$ $k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n$ の母函数 $B(s)$ は

$$B(s)=\sum_{k=0}^n b(k;n,p)s^k=(ps+q)^n$$

（ii） **モデル** 繰り返えし独立な試みを行う．おのおのの試みの結果は S（成功）と F（失敗）だけとする．また j 回目の試みの結果が S となる確率は j に無関係に p であるとする．このとき n 回の試み中 S（成功）が丁度 k 回（したがって F（失敗）が $n-k$ 回）起る確率が $b(k;n,p)$ である（ベルヌイ試行 I）．

注 ベルヌイ試行は種々の偶然現象の内部構造に，何らかの形で包含されていて，確率論では最も基本的なモデルの一つである．後章において出て来る重要な確率分布の大部分がをベルヌイ試行を出発点として導き出すことができる．

(iii) **主な性質**

a)
$$k \leq (n+1)p \rightleftarrows \frac{b(k;n,p)}{b(k-1;n,p)} \geq 1$$

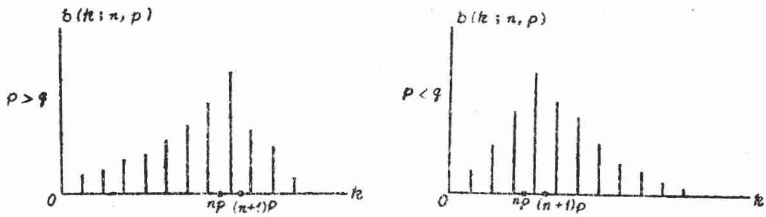
$$k+1 \geq (n+1)p \rightleftarrows \frac{b(k+1;n,p)}{b(k;n,p)} \leq 1$$

すなわち $(n+1)p$ を超えない最大の整数値を k_0 とすれば，$b(k_0;n,p)$ が $b(k;n,p)$ の最大値．この k_0 を二項分布の最頻値という．

b)
$$\frac{b(k;n,p)}{b(k-1;n,p)} = \frac{(n-k+1)p}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{kq}.$$

c)
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np$$

d) 二項分布のグラフは $p>q$ なら右にかたより，$p<q$ なら左にかたよる． $p=q=\dfrac{1}{2}$ のとき左右対称，(下図参照)．



3° 多項分布

(i) **定義** $p_n(m_1, m_2, \cdots\cdots, m_k) = \dfrac{n!}{m_1!\,m_2!\cdots\cdots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots\cdots p_k^{m_k}$

$$0 \leq m_1, m_2, \cdots\cdots, m_k \leq n, \qquad m_1 + m_2 \cdots\cdots + m_k = n$$

(ii) **モデル** ベルヌイ試行においてあらわれる結果は二通り S, F のみであるのを，二つ以上の結果が考えられる場合に拡張したもの．1回の試みの結果起り得るあらゆる場合を $S_1, S_2, \cdots\cdots, S_k$ とする．これらは互に排反し，どれかは必ず起るものとする．この試みを n 回独立に行う． s 回目の試みにおいて S_j が実現される事象 $A_j^{(s)}$ $(1 \leq j \leq k,\ 1 \leq s \leq n)$ の起る確率が s に無関係に p_j とすれば，$S_1, S_2, \cdots\cdots, S_k$ がそれぞれ丁度 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_k$ 回実現される（当然 $m_1 + m_2 + \cdots\cdots + m_k = n$）確率は $p_n(m_1, m_2, \cdots\cdots, m_k)$．

(iii) **主な性質** a) $p_n(m_1, \cdots, m_k)$ は $(p_1 s_1 + \cdots\cdots + p_k s)^n$ の $s_1^{m_1} \cdots s_k^{m_k}$ の係数に等しい．

b) $p = p_1,\ q = p_2 + \cdots\cdots + p_k = 1 - p$ とすれば，$\dbinom{n}{m_1} p^{m_1} q^{n-m_1}$ となり二項分布が出る．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1・5 期待値

1°　定義　一般に相互関係は全く任意な k 個の事象 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_k$ があって，その確率をそれぞれ $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_k$ とする．またこれらの事象が起ったときには，E_1 には a_1，E_2 には $a_2, \cdots\cdots$，E_k には a_k というふうに数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k$ がそれぞれ対応しているとする（例えば，a_1 円，a_2 円，……，a_k 円を獲得する）．このとき，

$$a_1p_1+a_2p_2+\cdots\cdots+a_kp_k$$

を期待値と呼ぶ．

注　賭けでは専ら金額が問題になるので，賭けの場合に因んで，期待値を期望金額ともいう．また上の定義は単に，事象が k 個の場合であるが，もっと一般な場合についての期待値も後章で述べられるが，それは，平均値，あるいは，数学的期待値として，もっと一般に定義されるものである．例えば前述二項分布（iii）c) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=np$ というのは，実はベルヌイ試行回中，成功の期待値が np 回，あるいは二項分布の平均値が np ということである．

1・6　幾何学的確率

定義　一般に試みの結果が線分や，空間の領域など図形に関連する確率を幾何学的確率という．

幾何学的確率においては基本事象は空間の領域の一つ一つの点で一般に無限個あって，確率を都合のよい場合の数と，起り得る場合の数の比とすることはできないので都合のよい場合の領域の量（面積とか長さ）と，起り得る場合の領域の量との比として定義する．

注　同等に確からしい基本事象をどうとるかを問題を解くに当りきめておかなければ，立場に応じて種類の異なった正しい答が出る場合がある．

例　　題

〔1〕　2個のサイコロAとBを投げた．この実験に関して事象，基本事象の例をあげよ．

（解）　例えば「2個のサイコロの目の和が8になる」というのは一つの事象であり，この事象は（Aが4でBが4）あるいは（Aが3でBが5）あるいは（Aが5でBが3といったような5つの基本事象よりなっている．

〔2〕　52 枚のトランプをよく切って，その中から任意に 13 枚ぬき出すとき，13 枚中赤札（ハート，ダイヤ）が丁度 k 枚（$k=0, 1, \cdots\cdots, 13$）である確率如何．

(解)　52枚をよく切って後，任意に13枚ぬき出したのであるから，13枚の札は内容の異なったものが $\binom{52}{13}$ 通り考えられ，しかもそれらは全部同程度起り易い(確からしい)と考えてよい．また一方，13枚中 k 枚が赤札であれば，残り $(13-k)$ 枚は黒札である．赤札 k 枚をとり出す仕方は $\binom{13\times 2}{k}$ 通りの場合があり，黒札 $(13-k)$ 枚を取り出す場合の数は $\binom{13\times 2}{13-k}$ 通りある．したがって13枚中 k 枚が赤である場合の数は $\binom{26}{k}\times\binom{26}{13-k}$ 通り，故に求める確率は，要項1・1の確率の定義により

$$\frac{\binom{26}{k}\times\binom{26}{13-k}}{\binom{52}{13}}.$$

[3]　事象 A, B, C の間につぎの等式が成り立つとき，これらの事象の間にどんな関係があるか．

(i)　$A\cap B\cap C=A$　　　(ii)　$A\cup B\cup C=A$

(解)　(i)　一般に $A\cap E=A$ は $A\subset E$ と同等である．したがって(i)は $A\subset B\cap C$ と同等であり，これはまた $A\subset B$ かつ $A\subset C$ と同等である．すなわち(i)は事象 A が起れば事象 B および事象 C が起ることを表わしている．

(ii)　一般に $A\cup E=A$ は $A\supset E$ と同等である．したがって(ii)は $A\supset B\cup C$ と同等である．すなわち(ii)は B または C が起れば A が起ることを表わしている．

[4]　サイコロを10回なげて10回目に初めて6の目の出る確率を求めよ．

(解)　1回目から9回目まで6が出ない確率は要項1・3の $1°$ (v)，$2°$ (iii) によって $\left(1-\frac{1}{6}\right)^9$．10回目に初めて6が出る確率は $\left(1-\frac{1}{6}\right)^9\times\frac{1}{6}=\frac{5^9}{6^{10}}$.

[5]　サイコロを5回なげて1か3の目が4回以上出る確率を求めよ．

(解)　1回の試みで1か3の目が出る確率は $\frac{1}{3}$，その余事象の確率は $\frac{2}{3}$ である．要項1・4, $2°$ によって1か3が4回出る確率は $\binom{5}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{3^5}$，5回出る確率は $\binom{5}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{3^5}$，したがって求むる確率は $\frac{10}{3^5}+\frac{1}{3^5}=\frac{11}{243}$.

[6]　要項1・4の $2°$ を用いてつぎの不等式を証明せよ．

(1)　$$b(k;n,p)+b(k+1;n,p)+\cdots\cdots+b(n;n,p)\leq\frac{n}{k-np}b(k;n,p)$$

ただし　$k>np+1$,

(2)
$$b(k;n,p)+b(k-1;n,p)+\cdots\cdots+b(0;n,p)\leqq\frac{n}{np-k}b(k;n,p)$$
ただし　$k<np$.

（解）　要項 1・4 の 2° によって
$$b(k+1)=\frac{(n-k)p}{(k+1)q}b(k),\quad b(k+2)=\frac{(n-k-1)(n-k)p^2}{(k+2)(k+1)q^2}b(k),\cdots\cdots,$$
$$b(n)=\frac{1\cdot2\cdots\cdots(n-k)}{n(n-1)\cdots\cdots(k+1)}\frac{p^{n-k}}{q^{n-k}}b(k),\quad b(k)\equiv b(k;n,p)$$
これから
$$b(k+1)\leqq\frac{(n-k)p}{kq}b(k),\quad b(k+2)\leqq\left(\frac{(n-k)p}{kq}\right)^2b(k),\cdots\cdots,\quad b(n)\leqq\left(\frac{(n-k)p}{kq}\right)^{n-k}b(k)$$
(1) の左辺$\leqq b(k)\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{(n-k)p}{kq}\right)^{\nu}=b(k)\dfrac{1}{1-\dfrac{(n-k)p}{kq}}\leqq\dfrac{n}{k-np}b(k)$,　ここに　$k>np+1$ ならば $\dfrac{(n-k)p}{kq}<1$ であるから，上の無限等比級数は収束することに注意.

(2) の場合は上と同様の考えで公比が $\dfrac{kq}{(n-k)p}$ の等比級数を用いればよい.

［7］　二つの銅貨 A, B を同時になげる試みを n 回行う．A をなげたとき表の出る確率を p_1，裏の出る確率を q_1，B をなげたとき表の出る確率を p_2，裏の出る確率を q_2 とする．A から表，B から表が出ることを（表，表）で表わしその他の場合同様の表わし方をするとすれば，n 回の試みにおいて事象（表，表），（表，裏），（裏，表），（裏，裏）がそれぞれ k_1, k_2, k_3, k_4 回起る確率を求めよ．ただし $k_1+k_2+k_3+k_4=n$ とする.

（解）（表，表）の起る確率は p_1p_2，（表，裏）の確率は p_1q_2，（裏，表）の確率は q_1p_2，（裏，裏）の確率は q_1q_2 に等しい．要項 1・3 の 3° によって求むる確率は
$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!\,k_4!}(p_1p_2)^{k_1}(p_1q_2)^{k_2}(q_1p_2)^{k_3}(q_1q_2)^{k_4}$$
$$=\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!\,k_4!}p_1^{k_1+k_2}q_1^{k_3+k_4}p_2^{k_1+k_3}q_2^{k_2+k_4}$$

［8］　七つの壺があってそれぞれつぎの表に示されるような割合で白球と黒球が入れてある．おのおのの壺より 1 球ずつとり出す．このとき 3 球だけが白である確率を求めよ.

壺	1	2	3	4	5	6	7
白	1	2	2	3	2	3	4
黒	2	1	2	1	5	2	5

（解）　母函数を用いて解く．一般にとり出された 7 球のうち丁度 k 個だけが白である確率を p_k とすれば

$$f(s)=\sum_{k=0}^{7}p_k s^k=\left(\frac{1}{3}s+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}s+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}s+\frac{1}{4}\right)$$
$$\times\left(\frac{2}{7}s+\frac{5}{7}\right)\left(\frac{3}{5}s+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{4}{9}s+\frac{5}{9}\right).$$

この式の s^3 の係数を右辺から求めればよい．

$$f(s)=\frac{1}{3^4\cdot 2^3\cdot 5\cdot 7}g(s),$$

$$\begin{aligned}g(s)&=(s+2)(2s+1)(s+1)(3s+1)(2s+5)(3s+2)(4s+5)\\&=(2s^2+5s+2)(3s^2+4s+1)(6s^2+19s+10)(4s+5)\\&=(6s^4+23s^3+28s^2+13s+2)(24s^3+106s^2+135s+50)\\&=(144s^7+1188s^6+3920s^5+6685s^4+6356s^3+3367s^2+920s+100)\end{aligned}$$

故に求むる確率は

$$\frac{6356}{3^4\cdot 2^3\cdot 5\cdot 7}=\frac{227}{810}$$

［9］　成功の確率 p のベルヌイの試みを n 回つづける．この実験において初めて成功するまでの失敗の回数の期待値を求めよ（$p\neq 0$）．この値は $n\to\infty$ に対してどのような値になるか．

（解）　失敗の回数0であるためには第一回目に成功すればよいから，その確率は $p_0=p$．失敗の回数1となるのは，1回目失敗，2回目成功ということであるから，その確率は $p_1=qp,\cdots\cdots$，一般に失敗の回数 k となる確率は $p_k=q^kp$ $(0\leq k\leq n-1)$．よって求むる期待値は要項 1・5 によって

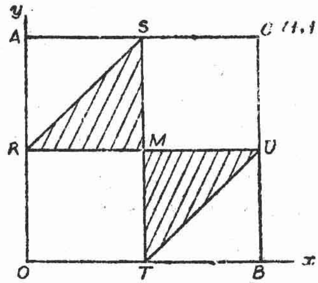
$$\begin{aligned}&qp+2q^2p+\cdots\cdots+(n-1)q^{n-1}p=pq(1+2q+\cdots\cdots+(n-1)q^{n-2})\\&=pq\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)=pq\frac{nq^{n-1}(q-1)-q^n+1}{(q-1)^2}=\frac{pq}{p^2}(nq^n-nq^{n-1}-q^n+1)\\&=\frac{q}{p}((n-1)q^n-nq^{n-1}+1).\end{aligned}$$

$n\to\infty$ に対して $(n-1)q^n\to 0$, $nq^{n-1}\to 0$ であるから，期待値は $\dfrac{q}{p}$ になる．

［10］　線分 AB 上に二点 P, Q をでたらめにとり，これを P, Q で折りまげて，三つの線分 AP, BQ, PQ を辺として三角形を作ることができる確率を求めよ．

（解）　線分 AB の長さの大小によって求める確率は変らないから，AB の長さを1としてよい．A を原点にとり AB 上で P, Q の座標を考える．P, Q の座標をそれぞれ x, y とすれば，P, Q 二点は正方形 $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$ 内の点 (x, y) で表わされる．P, Q を勝手に線分上にとることは，点 (x, y) をこの正方形上の各部分に等しい確率でおとすことである．正方形の中心を M とする．$x<y$ のとき AP, PQ, BQ が三角形を作る条件は AP+PQ<BQ,　AP+BQ<PQ,　PQ+BQ<AP すなわち $y-x<\dfrac{1}{2}$, $x<\dfrac{1}{2}$, $y>\dfrac{1}{2}$ で

表わされる．この条件は図の三角形 MRS の内部の点で表わされる． $y<x$ の場合も同様に三角形を作る条件は前の条件の x, y を入れかえたもので，図の三角形 MTU の内部の点 (x, y) で表わされる． かくして求むる確率は



$$p=\frac{\triangle \mathrm{MRS}\ の面積+\triangle \mathrm{MTU}\ の面積}{\square \mathrm{AOBC}\ の面積}=\frac{1}{4}.$$

演習問題 1

1. 事象に関するつぎの等式の正否を判定せよ．

(a) $$(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$$

(b) $$A\cup B\cup C=A\cup(B-A\cap C)\cup(C-A\cap C)$$

(c) $$(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)\subset A\cup B\cup C$$

(d) $$(A\cup B)-A=B$$

(e) $$(A\cup B)^c\cap C=C-C\cap(A\cup B)$$

2. A, B, C を事象とするときつぎの事象を A, B, C で表わせ．

(a) A だけが起る．

(b) A かつ B が起るが C は起らない．

(c) A, B, C の少なくとも二つ起る．

(d) A, B, C のうち一つは起りそれより多くは起らない．

(e) A, B, C のうち二つ起るがそれより多くは起らない．

(f) A, B, C のうち二つより多くの事象は起らない．

3. つぎの二つの事象 (a), (b) のうちどちらが起りやすいか． (a) 4個のサイコロを同時に投げて，どれか一つのサイコロから1の目が出ること． (b) 二つのサイコロを 24 回投げる．このうち少なくも1回は両方のサイコロから1の目が出ること．

4. 銅貨を n 回投げて交互に表裏が出る確率を求めよ．

5. ブリッジであるものの手持札が2よりエースまであらゆる種類の番号の札 13 枚からなっている確率如何．

6. ポーカーで5枚の手持札がすべて異なった番号の札である確率を求む．

ブリッジ及びポーカーの定義 いずれもトランプ遊びの一種であって，よくしられているように全部で 52 枚の札があり，その 52 枚が，ハート，ダイヤ，クラブ，スペードの組に分れている．おのおのの組には各 13 枚の札があるが，その 13 枚というのは，2, 3, 4, ……, 10, ジャック，クィーン，キング，エースという 13 種類である．またハートとダイヤは赤色であり，クラブとスペードは黒色で画かれている．もちろん裏からみれば，どの1枚も区別できないように，皆同じ模様が画かれている．そこで組のちがった同種類（同番号）の札が4枚あてあるわけであるが，ここで問題にするブリッジは初めの4人競

技者が東西南北に別れて机を囲み，おのおの 13 枚の札が配給されて開始される遊びであり，ポーカーは各人5枚ずつの札が配給されて4人で行う遊びである．また特に名前はないが各人が r 枚もって始める遊びもあり，競技者を4人に制限しないこともある．

7. 手持ち13枚の札の中，丁度 k 枚がスペードである確率はいくらか ($k=0, 1, 2, \cdots\cdots, 13$).

8. ブリッジで，東が m 枚のスペード，南が n 枚のスペードを持っている確率は，最初の52枚の中から13枚1組を2組でたらめにぬき出したとき，第一の組が m 枚のスペード，第二の組が n 枚のスペードを含んでいる確率に等しいことを証明せよ．ただし $m+n\leq 13$.

9. ブリッジで南北一緒にして手の中に丁度 k 枚のエースを持っている確率は何か．$k=0, 1, 2, 3, 4$.

10. a, b, c, d はおのおの負でない整数で $a+b+c+d=13$ とするとき，ブリッジで，東西南北がそれぞれ，a, b, c, d 枚のスペードをもっている確率を求む．

11. 前問 10. の結果を使って，ある者が a 枚，次の者が b 枚，他の者が c 枚，最後の者が d 枚のスペードをもつ確率を次の具体的な場合について計算せよ．

(a) $a=5,\quad b=4,\quad c=3,\quad d=1,$

(b) $a=b=c=4,\quad d=1$

(c) $a=b=4,\quad c=3,\quad d=2.$

12. a, b, c, d は和が 13 であるような負でない整数とするとき，ブリッジの手持ち札がスペード a 枚，ハート b 枚，ダイヤ c 枚，クラブ d 枚である確率 $q(a, b, c, d)$ を求めよ．

13. ポーカーの場合ある人の手持札が次のようになる確率を求む（でき上りの名称）．

(a) ロイヤルフラッシュ（同じ組の 10，ジャック，クィーン，キング，エースと5枚そろった場合）．

(b) ストレイトフラッシュ（同じ組で番号が兎に角5枚連続している場合．ただし，エースは2へ続かない）．

(c) フォーカインド（同じ種類の札が4枚と後1枚は任意，例えば，6, 6, 6, 6, 8）．

(d) フルハウス（同じ種類の札が，2枚と他の同じ種類の札3枚，例えば，4, 4, 9, 9, 9）．

(e) フラッシュ（兎に角同一組の札が5枚）．

(f) ストレート（組が異なってもよいから， 5枚の札の番号（種類）が連続している場合）．

(g) スリーカインド（3枚の同じ番号の札と，残り2枚は任意）．

(h) ツゥーペア（二つの同じ番号を持った2枚の札と後1枚は任意，例えば，2, 2, 5, 5, 3）．

(i) ワンペア（一つの同じ番号を持った2枚の札と後は任意），

注 このポーカーの出来役の名称の定義は，幾分簡易化してあるので，実際の場合と少し異なる．例えば，実際においてはエースは1ともなり，13 の後に続いて2へ続く．

14. 甲，乙二つの壷がある．甲には白球2，黒球1が入れてあり，乙には白球1，黒球

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com