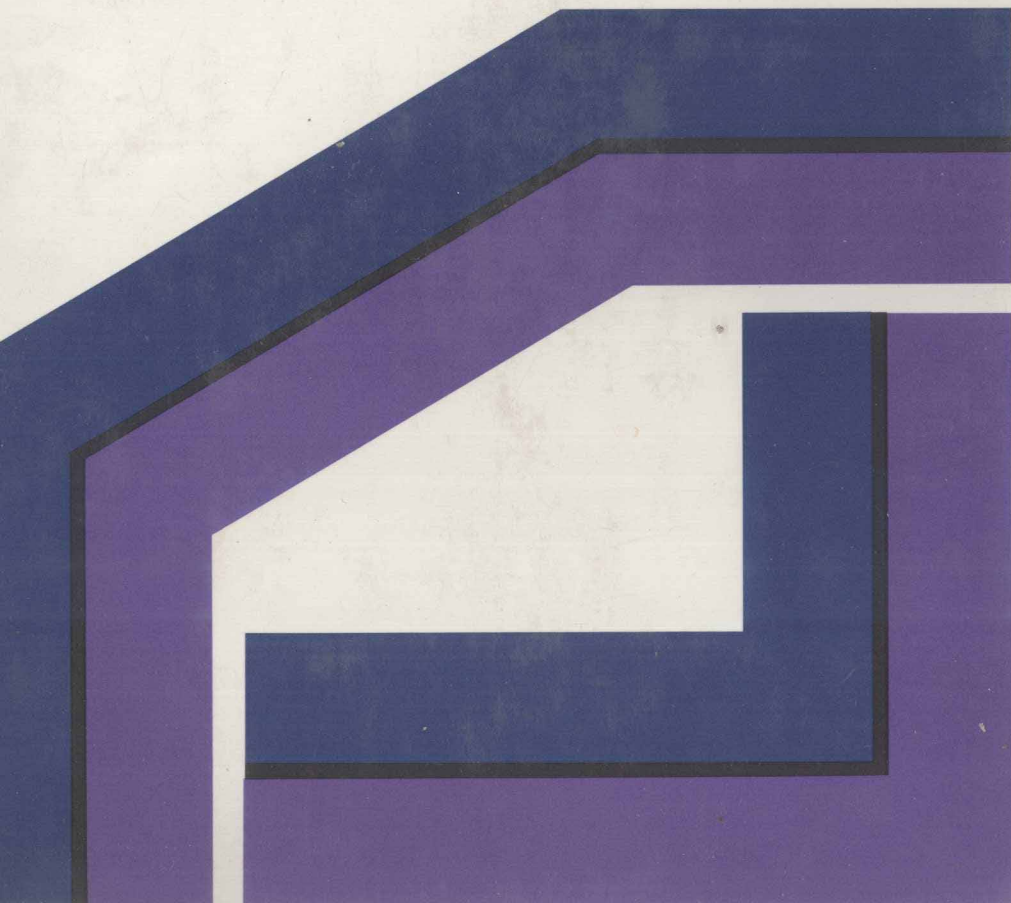


宮沢光一 編 経済分析のための数学入門 I

経済分析と線型代数

大成節夫 著

東洋経済新報社



宮沢光一編
経済分析のための数学入門

I

経済分析と線型代数

大成節夫 著

東洋経済新報社

著者紹介

1934年 東京に生まれる。
1959年 東京大学理学部数学科卒業。
現在 一橋大学教授。
専攻 数学。
著書 『数学概論 1, 2』(共著), 春秋社, 1966~67年。
現住所 東京都小平市学園西町2-21-16。

〈経済分析のための数学入門 I〉

経済分析と線型代数

定価 4500 円

昭和 55 年 5 月 8 日発行

著者 おおなりせつお 大成節夫
発行者 中井義行

発行所 東京都中央区日本橋本石町 1 の 4 東洋経済新報社
郵便番号 103 電話 03(270)4111(大代表) 振替口座東京 3-6518

© 1980 〈検印省略〉 落丁・乱丁本はお取替えいたします。 3033-3921-5214
Printed in Japan

は し が き

本書は線型代数の基礎的な部分の概略を解説したものである。表題に「経済分析のための線型代数」と記されているが、特別なスタイルを持った線型代数ではなく、その内容も組立ても通常の線型代数とさほど異なったものではないことを、お断りしておかなくてはならない。筆者の考えでは、線型代数の分野の中で特に経済分析に使用されるものが区別して取り出しうるものでもなく、また経済分析のために線型代数を改竄できるものでもないと考えている。結局本書は、経済学を志す人々を対象に、数学を志す人々を対象とする場合とはやや違った形で、線型代数の概要を解説することを目的として執筆されたものである。経済学を志す人々を対象とする場合と、数学を志す人々を対象とする場合とでは、解説の仕方をどの程度厳密な論理で展開するかという点でやや差異があるかと思われる。筆者もこの点に留意しながら筆を進めたつもりである。

本書の全体は3部に分けられている。第Ⅰ部「数学的な準備」では、基本的な用語の解説と第Ⅱ部以降で扱われる内容の根底をなす実数について、その基本的な概念と性質を解説した。つづく第Ⅱ部が本書の中心で、線型代数の解説に充当されている。ここでは最初に具体的な対象である行列や行列式を扱って、それらに慣れたうえでやや抽象的な **vector** 空間や線型写像の概念を導入した。そして再び具体的な問題、連立1次方程式や行列の標準形を扱って第Ⅱ部を終えている。第Ⅲ部では線型不等式に関する基礎的な事項を、代数的な観点と幾何的な観点の双方から並行して取り扱った。通常の線型代数の書物では取り扱われることが少ない線型不等式の概説を取り入れたことは、本書の小さな特色といえるかもしれない。この第Ⅲ部を執筆するに

あたっては

H. W. Kuhn and A. W. Tucker(ed.) : Linear Inequalities and Related Systems, Annals of Mathematics Studies, No. 38, Princeton University Press, 1956.

を終始参考にした。この方面に興味を持たれる読者は、上記の書物で学ばれると良い。

本来こうした数学の入門書では、各章各節ごとに練習問題を付して、計算に習熟した新しく定義された概念を十分に咀嚼しながら読み進むという方法がとられる。本書では残念ながら練習問題を付すだけの紙幅の余裕がなかった。それを補うためにもできうるかぎり、本文中に具体的な例を多く示し、また練習のために読者に計算や証明を求めるようにしたところが数多くある。読者にはそうした本文中に提示された問題を一つ一つあたりながら、ゆっくり読み進まれることを希望する。

本書の執筆の機会を筆者に与えて下さったのは、東京大学名誉教授宮沢光一先生および東京大学教授鈴木雪夫先生の両先生である。筆者の微力をも顧みず両先生のお言葉に従い執筆をお引受けしてからも、遅筆の筆者を激励され、種々の点でのご教授を賜わりながらまがりなりにも脱稿できたのは両先生の賜物である。ここに深甚の謝意を表するものである。また筆者の奉職する一橋大学の磯野修教授、鍋谷清治教授の両先生からも、陰に陽に激励や助言を賜わることができた。それが本書を完成させる底力となった。あらためて厚く感謝する次第である。

本書の出版に関しては、その煩雑な編集、整理等の仕事を東洋経済新報社出版局の須永政男氏および小川正昭氏の両氏に終始お世話になった。また組版については西田整版所の方々に多くの配慮を煩わした。ここに合せて深甚の謝意を表する次第である。

昭和55年3月

著 者

目 次

は し が き

第Ⅰ部 数学的な準備

第1章 基本的な用語..... 3

1. 1 命 題..... 4

1. 2 集 合..... 8

1. 3 写 像.....15

1. 4 対 応.....25

1. 5 関 係.....30

1. 6 3 つ の 公 理.....38

第2章 実 数40

2. 1 実 数 の 演 算.....41

2. 2 実 数 の 順 序.....48

2. 3 実数の完備性.....53

2. 4 R^n に関する基本的事項64

第Ⅱ部 線 型 代 数

第3章 行 列 の 演 算81

3. 1 行 列82

3. 2 行列の和とスカラー倍84

3. 3 行 列 の 積85

3. 4 逆行列と正則行列88

3. 5 行列の冪と2項定理90

第4章 行列の列および級数92

4. 1 行列の列とその収束(1)92

4. 2 行列のノルム93

4. 3 行列の列とその収束(2)96

4. 4 行列の基本列97

4. 5 行列の級数とその収束98

4. 6 行列の指数関数99

第5章 行 列 式 104

5. 1 n 次 対 称 群 104

5. 2 行列式の定義 109

5. 3 行列式の基本的な性質 113

5. 4 行列の行列式の値 117

第6章 逆 行 列 118

6. 1 行列式の展開公式 118

6. 2 展開公式による行列の行列式の値の計算 121

6. 3 正則行列の逆行列を求める計算 122

6. 4	正則行列であることの判定	124
6. 5	行列の積の行列式の値	125
6. 6	連立 1 次方程式(1)——Cramer の公式——	127
第 7 章 Vector 空間		132
7. 1	Vector 空間の例	132
7. 2	Vector 空間の定義	135
7. 3	Vector 空間の部分空間	137
7. 4	部分空間の和と部分空間の直和への分解	138
7. 5	1 次独立と 1 次従属	140
7. 6	Vector 空間の基底と次元の定義	142
7. 7	補 題 の 証 明	143
7. 8	Vector 空間の次元の計算例	144
7. 9	部分空間の次元の相互関係	146
7.10	Vector 空間の部分空間による商空間	148
第 8 章 線 型 写 像		152
8. 1	線型写像の定義と同型な vector 空間	152
8. 2	線型写像の例	154
8. 3	双対空間と標準的同型な vector 空間	155
8. 4	線型写像の基礎的な性質	158
8. 5	基底を固定したときの線型写像の行列による表現	160
8. 6	基底を変換したときの線型写像の行列による表現	161
第 9 章 連立 1 次方程式		166
9. 1	正規直交系と正規直交基底	166
9. 2	Schmidt の直交化の意味	169
9. 3	nR あるいは R^n の直交補空間による直和分解	171

9. 4	行列の階数の定義	173
9. 5	行列の階数の基本的性質	174
9. 6	基本変形による行列の階数の計算	176
9. 7	正方小行列の行列式の値による行列の階数の計算	178
9. 8	連立 1 次方程式(2)——一般の場合——	180
第10章 行列の固有値		187
10. 1	行列の固有値と狭義固有空間の定義	187
10. 2	固有多項式, 固有 vector の基本的性質	191
10. 3	狭義固有空間の直和性	193
10. 4	Hamilton-Cayley の定理と最小多項式	194
10. 5	複素行列により対角化可能な行列の特徴づけ	196
第11章 行列の標準形		200
11. 1	行列の標準形の意味	200
11. 2	線型写像に関する不変部分空間	201
11. 3	直交幂等行列系による広義固有空間への直和分解	202
11. 4	広義固有空間の次元	205
11. 5	広義固有空間への基底の設定(1)	207
11. 6	広義固有空間への基底の設定(2)——Jordan の標準形——	209
11. 7	対称行列の直交行列による対角化	213
11. 8	実 2 次型式への応用	217
11. 9	Hermite 行列の unitary 行列による対角化	219
11.10	Hermite 型式への応用	222
11.11	Cayley 変換	224

第Ⅲ部 線 型 不 等 式

第12章 同次線型不等式，代数的な扱い	229
12. 1 記号と諸結果間の相互関係	229
12. 2 同次線型不等式に関する基本定理	234
第13章 同次線型不等式，幾何的な扱い	252
13. 1 凸多面錐の定義	252
13. 2 凸多面錐の面	261
13. 3 凸多面錐の構造	268
13. 4 凸多面錐に関する基本定理	274
13. 5 凸多面錐の双対性	277
第14章 非同次線型不等式	281
14. 1 凸多面体の定義	281
14. 2 凸多面体の構造	285
第15章 線 型 計 画 問 題	293
15. 1 線型計画問題の例	293
15. 2 線型計画問題の双対性	299
15. 3 線型計画問題と鞍点	307
参 考 文 献	311
索 引	313

第 I 部 数学的な準備

第 1 章

基本的な用語

本章では、数学のどの分野でも使用される基本的な用語、すなわち集合、写像、対応、関係といった用語について、ごく簡単に説明して本書を読み進むうえでの準備とすることをその目的としている。すべての記述について証明を付すことを避けた理由は、読者が本章をざっと一読して集合、写像、対応、関係といった概念が全体として把握されることを期待したからでもある。詳細にわたる証明や、もっと正確な叙述、あるいはもっと深い議論を求める読者は巻末の参考書[1], [3], 等を参照されるのがよい。

近年は高等学校でも集合や写像の概念を教えるようになったが、こうした数学の基礎的な概念がもっと多くの学問の分野にあるいは我々の日常生活の中に取り入れられて、自由に使用されることはきわめて望ましいことと考えられる。本章で取り上げた程度の意味での集合、写像、対応、関係等の概念は、いずれも数学を展開していくうえでの用語であって、数学の研究の対象ではない。読者はこの点に留意されて、こうした用語をもっと広い世界に持ち出す可能性を探りながら、本章を読んでもらいたい。

最後の 1.6 はあまり内容はない。証明も省略してある。ただ帰納的順序集合とか Zorn の補題等には十分慣れてほしいと考えている。第 II 部で vector 空間の基底の存在を証明するときさっそくこれらが利用される。

1.1 命 題

数学的な叙述は固苦しくはあるが、正確な内容を記述しうる点を、その利点の1つとしている。その正確さは多分にその叙述が形式論理にのっとった仕方でも組み立てられていることに依存しているのであろう。したがって無味乾燥の誘いを避けえないが、形式論理にのっとった叙述にだんだんと慣れていただくことが本書を読み進むうえで必要である。その手始めとして、本節では叙述に関する基礎的な事項を簡潔にまとめておくことにした。

一般に叙述は文章によって行われるが、文法上の規則を遵守した文章で、その主張する内容が正しいか誤りであるか明確に判断がつくようなものを数学では**命題**と称している。命題を考える場合、その文章の主張する内容が正しいから命題であり、また誤っているから命題でないということはない。つまり明らかに誤った内容を主張している文章でも、それが文法上の規則を遵守しているかぎり命題と称されるのである。

命題を $P, Q, \dots$ 等1つの文字で表わすと種々便利である。たとえば

(1.1) P : 人類は滅亡する,

というぐあいである。命題を、その命題を表わす文章の主語に関する“条件”ということもある。(1.1)の命題 P は人類に関する条件といってもよい。

同一の内容を持つ命題を記述する仕方は決して1通りではない。(1.1)の命題 P について

(1.2) 将来いかなる人間も生存していない時刻が存在する。

といってもよければ、また

(1.3) 「将来のすべての時刻において、少なくとも1人の人間が生存している」ということは否定される。

といってもよい。(1.2)のような叙述を

∃時刻; 将来いかなる人間も存在していない。

と(1.2)の下線部分を記号化して書くことがある。セミコロンの後の記述が時刻に対する説明であり、ある時刻に対してその説明に述べられたような事

態が成立していることを記号 $\exists$ で表わしている。“存在”を主張している記号 $\exists$ を**存在記号**という。また(1.3)のような叙述を

「 $\forall$ 時刻；少なくとも1人の人間が生存している」ということは否定される。

と(1.3)の下線部分を記号化して書くことがある。括弧内の文章については、存在記号の場合と同様にセミコロンの後が時刻に対する説明であり、“すべての”あるいは“任意の”時刻に対してその説明に述べられているような事態が成立していることを、記号 $\forall$ で表わしている。“すべての”あるいは“任意の”という意味を示す記号 $\forall$ を**全称記号**という。

1個の命題を否定して新しい命題をつくったり、あるいはいくつかの命題から新しい命題を合成してより複雑な内容を持った命題をつくり、それらを幾重にも連結して叙述が進行していく。ここでは最も基本的な命題の合成の仕方について説明しよう。命題 P に対して「 P ではない」という文章も1つの命題を示している。この命題を

$$(1.4) \quad \neg P$$

と記す。2つの命題 P および Q に対して「 P であるかまたは Q である」という命題を

$$(1.5) \quad P \vee Q$$

と記し、また「 P でありかつ Q でもある」という命題を

$$(1.6) \quad P \wedge Q$$

と記す。また「 P であるならば Q である」という命題を

$$(1.7) \quad P \Rightarrow Q$$

と記す。与えられた命題 P を否定して新しい命題(1.4)をつくる方法、および3種類の接続詞“または”、“かつ”、“ならば”を用いて、2つの命題 P および Q を合成して新しい命題(1.5), (1.6), (1.7)をつくる方法は最も基本的な方法であり、ほとんどすべての命題は単純な命題から上記の4種の方法で合成されて連結されたものと解釈することができる。

前述したように、どのような命題をとってもそれは正しい命題か誤った命

題が明確に判断がつくものである。2つの命題 P および Q についての正誤の判断がついているとき、(1.4), (1.5), (1.6), (1.7)でつくられた新しい命題の正誤はどのように判断されるのであろうか。それを示したのが表 1.1 お

表 1.1

P	$\neg P$
正	誤
誤	正

よび表 1.2 である。

表 1.1 については説明の必要はないであろう。表 1.2 に従えば“または”という接続詞は、 P および Q 両命題がともに誤りである場合以外は、常に正しい命題を合成してつくり出す性質を持っており、“かつ”という接続

表 1.2

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$
正	正	正	正	正
正	誤	正	誤	誤
誤	正	正	誤	正
誤	誤	誤	誤	正

詞は P および Q 両命題がともに正しい場合にのみ、正しい命題を合成してつくり出す性質を持っている。また“ならば”という接続詞は、 P が正しい命題であるにもかかわらず Q が誤りの命題である場合以外は、常に正しい命題を合成してつくり出すのである。なお命題 P が誤りである場合、命題 Q の正誤にかかわらず命題 $[P \Rightarrow Q]$ は正しい命題であると約束されている点に注意されたい。

2つの命題 P および Q に対して、2種類の接続詞“ならば”と“かつ”を用いて合成して得られる命題

$$[P \Rightarrow Q] \wedge [Q \Rightarrow P]$$

が正しい命題であるとき、命題 P と Q は“同値である”といって

$$P \Longleftrightarrow Q$$

と記すことが多い。命題 P と Q が同値であるということは、表 1.3 に示されているように P と Q が同時に正しい命題であるか、あるいは P と Q が同時に誤りの命題であるかいずれかであることを意味しているので、 P と Q が論理

表 1.3

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$[P \Rightarrow Q] \wedge [Q \Rightarrow P]$
正	正	正	正	正
正	誤	誤	正	誤
誤	正	正	誤	誤
誤	誤	正	正	正

的には同一の“構造”を持つと考えてもよい。

この記法に従うと

$$[P \Rightarrow Q] \Longleftrightarrow \neg[P \wedge \neg Q]$$

であること、すなわち $[P \Rightarrow Q]$ と $\neg[P \wedge \neg Q]$ の2つの命題に対してそれらが同時に正しいか同時に誤りであるかいずれかの場合しかありえないことが表 1.4 と表 1.2 の最後の列を比較して確かめられる。

表 1.4

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg[P \wedge \neg Q]$
正	正	誤	誤	正
正	誤	正	正	誤
誤	正	誤	誤	正
誤	誤	正	誤	正

同様の方法で、

$$\neg[P \vee Q] \Longleftrightarrow [\neg P \wedge \neg Q],$$

$$\neg[P \wedge Q] \Longleftrightarrow [\neg P \vee \neg Q],$$

$$[P \Rightarrow Q] \Longleftrightarrow [\neg P \vee Q],$$

であることが確かめられる。読者は表 1.4 を参照してこれらの命題の正誤の表をつくり確かめられたい。

最後に言葉づかいに対する注意を付言しよう。命題 P に対して P が“正しい命題である”ということを簡潔に P が“成立する”ともいうのである。したがって“命題 P が成立することを証明せよ”とは P が“正しい命題であることを論理的に導け”という意味である。そのさい注意すべき点は、命題 P と“命題 P は正しい”という命題 Q とは明確に区別して異なった2つの命題