宮沢光一 編　経済分析のための 数学入門 I

経済分析と線型代数

大成節夫 著

東洋経済新報社

宮沢光一編
経済分析のための数学入門

I

経済分析と線型代数

大成節夫 著

東洋経済新報社

著者紹介

1934年　東京に生まれる.
1959年　東京大学理学部数学科卒業.
現　在　一橋大学教授.
専　攻　数学.
著　書『数学概論 1, 2』(共著), 春秋社, 1966～67年.
現住所　東京都小平市学園西町2-21-16.

〈経済分析のための数学入門 I〉
経済分析と線型代数　　定価 4500 円

昭和 55 年 5 月 8 日発行

著　者　大成節夫(おおなりせつお)
発行者　中井義行
発行所　東京都中央区日本橋本石町 1 の 4　東洋経済新報社
郵便番号 103　電話03(270)4111(大代表)　振替口座東京3-6518

3033-3921-5214

はしがき

本書は線型代数の基礎的な部分の概略を解説したものである．表題に「経済分析のための線型代数」と記されているが，特別なスタイルを持った線型代数ではなく，その内容も組立ても通常の線型代数とさほど異なったものではないことを，お断りしておかなくてはならない．筆者の考えでは，線型代数の分野の中で特に経済分析に使用されるものが区別して取り出しうるものでもなく，また経済分析のために線型代数を改竄できるものでもないと考えている．結局本書は，経済学を志す人々を対象に，数学を志す人々を対象とする場合とはやや違った形で，線型代数の概要を解説することを目的として執筆されたものである．経済学を志す人々を対象とする場合と，数学を志す人々を対象とする場合とでは，解説の仕方をどの程度厳密な論理で展開するかという点でやや差異があろうかと思われる．筆者もこの点に留意しながら筆を進めたつもりである．

本書の全体は3部に分けられている．第I部「数学的な準備」では，基本的な用語の解説と第II部以降で扱われる内容の根底をなす実数について，その基本的な概念と性質を解説した．つづく第II部が本書の中心で，線型代数の解説に充当されている．ここでは最初に具体的な対象である行列や行列式を扱って，それらに慣れたうえでやや抽象的な vector 空間や線型写像の概念を導入した．そして再び具体的な問題，連立1次方程式や行列の標準形を扱って第II部を終えている．第III部では線型不等式に関する基礎的な事項を，代数的な観点と幾何的な観点の双方から並行して取り扱った．通常の線型代数の書物では取り扱われることが少ない線型不等式の概説を取り入れたことは，本書の小さな特色といえるかもしれない．この第III部を執筆するに

あたっては

H. W. Kuhn and A. W. Tucker(ed.) : Linear Inequalities and Related Systems, Annals of Mathematics Studies, No. 38, Princeton University Press, 1956.

を終始参考にした．この方面に興味を持たれる読者は，上記の書物で学ばれると良い．

本来こうした数学の入門書では，各章各節ごとに練習問題を付して，計算に習熟しまた新しく定義された概念を十分に咀嚼しながら読み進むという方法がとられる．本書では残念ながら練習問題を付すだけの紙幅の余裕がなかった．それを補うためにもできうるかぎり，本文中に具体的な例を多く示し，また練習のために読者に計算や証明を求めるようにしたところが数多くある．読者にはそうした本文中に提示された問題を一つ一つあたりながら，ゆっくり読み進まれることを希望する．

本書の執筆の機会を筆者に与えて下さったのは，東京大学名誉教授宮沢光一先生および東京大学教授鈴木雪夫先生の両先生である．筆者の微力をも顧みず両先生のお言葉に従い執筆をお引受けしてからも，遅筆の筆者を激励され，種々の点でのご教授を賜わりながらまがりなりにも脱稿できたのは両先生の賜物である．ここに深甚の謝意を表するものである．また筆者の奉職する一橋大学の磯野修教授，鍋谷清治教授の両先生からも，陰に陽に激励や助言を賜わることができた．それが本書を完成させる底力となった．あらためて厚く感謝する次第である．

本書の出版に関しては，その煩雑な編集，整理等の仕事を東洋経済新報社出版局の須永政男氏および小川正昭氏の両氏に終始お世話になった．また組版については西田整版所の方々に多くの配慮を煩わした．ここに合せて深甚の謝意を表する次第である．

昭和55年3月

著　　者

目　　次

第II部 線 型 代 数

第Ⅲ部　線 型 不 等 式

第 I 部　数学的な準備

第1章
基本的な用語

本章では，数学のどの分野でも使用される基本的な用語，すなわち集合，写像，対応，関係といった用語について，ごく簡単に説明して本書を読み進むうえでの準備とすることをその目的としている．すべての記述について証明を付すことを避けた理由は，読者が本章をざっと一読して集合，写像，対応,関係といった概念が全体として把握されることを期待したからでもある．詳細にわたる証明や，もっと正確な叙述，あるいはもっと深い議論を求める読者は巻末の参考書[1]，[3]，等を参照されるのがよい．

近年は高等学校でも集合や写像の概念を教えるようになったが，こうした数学の基礎的な概念がもっと多くの学問の分野にあるいは我々の日常生活の中に取り入れられて，自由に使用されることはきわめて望ましいことと考えられる．本章で取り上げた程度の意味での集合，写像，対応，関係等の概念は，いずれも数学を展開していくうえでの用語であって，数学の研究の対象ではない．読者はこの点に留意されて，こうした用語をもっと広い世界に持ち出す可能性を探りながら，本章を読んでもらいたい．

最後の **1.6** はあまり内容はない．証明も省略してある．ただ帰納的順序集合とか Zorn の補題等には十分慣れてほしいと考えている．第II部で vector 空間の基底の存在を証明するときさっそくこれらが利用される．

1.1 命　　題

数学的な叙述は固苦しくはあるが，正確な内容を記述しうる点を，その利点の1つとしている．その正確さは多分にその叙述が形式論理にのっとった仕方で組み立てられていることに依存しているのであろう．したがって無味乾燥の誘りを避けえないが，形式論理にのっとった叙述にだんだんと慣れていただくことが本書を読み進むうえで必要である．その手始めとして，本節では叙述に関する基礎的な事項を簡潔にまとめておくことにした．

一般に叙述は文章によって行われるが，文法上の規則を遵守した文章で，その主張する内容が正しいか誤りであるか明確に判断がつくようなものを数学では**命題**と称している．命題を考える場合，その文章の主張する内容が正しいから命題であり，また誤っているから命題でないということはない．つまり明らかに誤った内容を主張している文章でも，それが文法上の規則を遵守しているかぎり命題と称されるのである．

命題を P, Q, ……等1つの文字で表わすと種々便利である．たとえば

(1.1)　　　　P：人類は滅亡する，

というぐあいである．命題を，その命題を表わす文章の主語に関する“条件”ということもある．(1.1)の命題Pは人類に関する条件といってもよい．

同一の内容を持つ命題を記述する仕方はけっして1通りではない．(1.1)の命題Pについて

(1.2)　　将来いかなる人間も生存していない時刻が存在する．

といってもよければ，また

(1.3)　　「将来のすべての時刻において，少なくとも1人の人間が生存している」ということは否定される．

といってもよい．(1.2)のような叙述を

$\exists$時刻；将来いかなる人間も存在していない．

と(1.2)の下線部分を記号化して書くことがある．セミコロンの後の記述が時刻に対する説明であり，ある時刻に対してその説明に述べられたような事

態が成立していることを記号∃で表わしている．“存在”を主張している記号∃を**存在記号**という．また(1.3)のような叙述を

「∀時刻；少なくとも1人の人間が生存している」ということは否定される．

と(1.3)の下線部分を記号化して書くことがある．括弧内の文章については，存在記号の場合と同様にセミコロンの後が時刻に対する説明であり，“すべての”あるいは“任意の”時刻に対してその説明に述べられているような事態が成立していることを，記号∀で表わしている．“すべての”あるいは“任意の”という意味を示す記号∀を**全称記号**という．

1個の命題を否定して新しい命題をつくったり，あるいはいくつかの命題から新しい命題を合成してより複雑な内容を持った命題をつくり，それらを幾重にも連結して叙述が進行していく．ここでは最も基本的な命題の合成の仕方について説明しよう．命題Pに対して「Pではない」という文章も1つの命題を示している．この命題を

(1.4) $$\neg P$$

と記す．2つの命題PおよびQに対して「PであるかまたはQである」という命題を

(1.5) $$P \vee Q$$

と記し，また「PでありかつQでもある」という命題を

(1.6) $$P \wedge Q$$

と記す．また「PであるならばQである」という命題を

(1.7) $$P \Rightarrow Q$$

と記す．与えられた命題Pを否定して新しい命題(1.4)をつくる方法，および3種類の接続詞“または”，“かつ”，“ならば”を用いて，2つの命題PおよびQを合成して新しい命題(1.5)，(1.6)，(1.7)をつくる方法は最も基本的な方法であり，ほとんどすべての命題は単純な命題から上記の4種の方法で合成されて連結されたものと解釈することができる．

前述したように，どのような命題をとってもそれは正しい命題か誤った命

題か明確に判断がつくものである．2つの命題PおよびQについての正誤の判断がついているとき，(1.4)，(1.5)，(1.6)，(1.7)でつくられた新しい命題の正誤はどのように判断されるのであろうか．それを示したのが表1.1および表1.2である．

表 1.1

P	$\neg P$
正	誤
誤	正

表1.1については説明の必要はないであろう．表1.2に従えば“または”という接続詞は，PおよびQ両命題がともに誤りである場合以外は，常に正しい命題を合成してつくり出す性質を持っており，“かつ”という接続詞はPおよびQ両命題がともに正しい場合にのみ，正しい命題を合成してつくり出す性質を持っている．また“ならば”という接続詞は，Pが正しい命題であるにもかかわらずQが誤りの命題である場合以外は，常に正しい命題を合成してつくり出すのである．なお命題Pが誤りである場合，命題Qの正誤にかかわらず命題$[P \Rightarrow Q]$は正しい命題であると約束されている点に注意されたい．

表 1.2

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$
正	正	正	正	正
正	誤	正	誤	誤
誤	正	正	誤	正
誤	誤	誤	誤	正

2つの命題PおよびQに対して，2種類の接続詞“ならば”と“かつ”を用いて合成して得られる命題

$$[P \Rightarrow Q] \wedge [Q \Rightarrow P]$$

が正しい命題であるとき，命題PとQは“同値である”といって

$$P \Longleftrightarrow Q$$

と記すことが多い．命題PとQが同値であるということは，表1.3に示されているようにPとQが同時に正しい命題であるか，あるいはPとQが同時に誤りの命題であるかいずれかであることを意味しているので，PとQが論理

表 1.3

P	Q	$P\Rightarrow Q$	$Q\Rightarrow P$	$[P\Rightarrow Q]\wedge[Q\Rightarrow P]$
正	正	正	正	正
正	誤	誤	正	誤
誤	正	正	誤	誤
誤	誤	正	正	正

的には同一の“構造”を持つと考えてもよい.

この記法に従うと

$$[P\Rightarrow Q]\Longleftrightarrow\urcorner[P\wedge\urcorner Q]$$

であること，すなわち$[P\Rightarrow Q]$と $\urcorner[P\wedge\urcorner Q]$ の2つの命題に対してそれらが同時に正しいか同時に誤りであるかいずれかの場合しかありえないことが表1.4と表1.2の最後の列を比較して確かめられる.

表 1.4

P	Q	$\urcorner Q$	$P\wedge\urcorner Q$	$\urcorner[P\wedge\urcorner Q]$
正	正	誤	誤	正
正	誤	正	正	誤
誤	正	誤	誤	正
誤	誤	正	誤	正

同様の方法で,

$$\urcorner[P\vee Q]\Longleftrightarrow[\urcorner P\wedge\urcorner Q],$$

$$\urcorner[P\wedge Q]\Longleftrightarrow[\urcorner P\vee\urcorner Q],$$

$$[P\Rightarrow Q]\Longleftrightarrow[\urcorner P\vee Q],$$

であることが確められる．読者は表1.4を参照してこれらの命題の正誤の表をつくり確かめられたい.

最後に言葉づかいに対する注意を付言しよう．命題Pに対してPが“正しい命題である”ということを簡潔にPが“成立する”ともいうのである．したがって“命題Pが成立することを証明せよ”とはPが“正しい命題であることを論理的に導け”という意味である．そのさい注意すべき点は，命題Pと“命題Pは正しい”という命題Qとは明確に区別して異なった2つの命題