微分方程式

基礎数学講座

8

微分方程式

広島大学教授
理学博士
占部　実
著

共立出版株式会社

編　集
秋月康夫
功力金二郎
佐々木重夫
福原満洲雄

基礎数学講座
8

基礎数学講座　8巻　©

微分方程式　　定価 300 円

昭和 30 年 11 月 20 日　初版 1 刷発行
昭和 33 年 12 月 1 日　初版 2 刷（増補）発行
昭和 34 年 4 月 15 日　初版 3 刷（増補）発行

著者　占部　実

発行者　南條初五郎
東京都千代田区神田駿河台3の9

印刷者　平尾秀吉
東京都新宿区市ケ谷本村町27

発行所　東京都千代田区神田駿河台3の9　共立出版株式会社
電話 東京(29)局 2951～3　2624
振替 東京 57035

印刷・新日本印刷　製本・中條製本工場　Printed in Japan

序

本書は，微分方程式研究の入門書として，微分方程式の解法をできるだけ共通の原理にもとづくよう整理統一して述べたものである．

第1次講座では常微分方程式を専ら扱ったので，本書ではそれを第1部とし，第2部として1階の偏微分方程式の解法をさらに付け加えることにした．

予備知識としては，大体大学理科教養の程度を予想した．ただ第7章で，形式解の収束を証明するために，複素函数論における Cauchy の積分表示を用いたが，未習の方はここをとばして読まれて差支えない．

本書で取り扱う量は，とくに断らない限りすべて実であるとする．

解の存在定理，その他微分方程式に関する基礎的理論については，解法を理解するに必要な最小限度にとどめ，その代りそれらの証明には，さらに進んで研究するときに役立つような方法をとることにした．

本書を書くにあたっては，内外の著書を多く参考にしたが，とくにつぎの著書はしばしば参照したので，ここにしるして厚く謝意を表したい．

福原満洲雄，微分方程式，上，下，朝倉書店 (1951—52)，

福原満洲雄，佐藤徳意，微分方程式論，現代数学講座，共立出版 K.K. (1956)，

南雲道夫，微分方程式，I，共立全書 (1955)，

南雲道夫，偏微分方程式，岩波講座，現代応用数学，岩波書店 (1957)，

福原満洲雄，中森寛二，偏微分方程式，数学演習講座，共立出版 K.K. (1957)，

A. R. Forsyth, A treatise on differential equations, Macmillan (1914),

E. L. Ince, Ordinary differential equations, Dover (1926),

I. G. Petrovsky, Vorlesungen über die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Moskau (1939)（ロシヤ語よりの独訳），

G. F. D. Duff, Partial differential equations, Toronto (1956).

終りに本書を書くべくすすめられ，なおいろいろと御教示を賜った福原満洲雄教授に厚く感謝の意を表する．

1958 年 11 月

著　者

目　　次

第1部　常微分方程式

第2部　偏微分方程式

第1部　常微分方程式

第１章　序　論

1·1　定　義

未知函数の導函数を含む方程式を**微分方程式**という．微分方程式は，その未知函数が関係している独立変数が一つであるか，または二つ以上であるかにしたがって，それぞれ**常微分方程式**または**偏微分方程式**とよばれる．微分方程式に含まれる未知函数の導函数の最高階数をその微分方程式の**階数**という．微分方程式が未知函数及びその導函数について多項式であるとき，最高階の導函数についての次数をその微分方程式の**次数**といい，特にすべての未知函数及び導函数について１次であるとき，この微分方程式は**線形**であるという．

例 1　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=x^3$：２階線形常微分方程式

例 2　$(x+y)^2\dfrac{dy}{dx}=1$：１階１次非線形常微分方程式

例 3　$x^2+2xy\dfrac{dy}{dx}+y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-z^2\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2=0$：１階２次常微分方程式

例 4　$\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$：２階線形偏微分方程式

第１部では専ら常微分方程式を取り扱うので，この部では特別の場合を除き“常”の字を省略する．

1·2　解

$$y=\varphi(x;C_1,C_2,\cdots,C_n) \tag{1·1}$$

が変数 x 及び n 個の任意定数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ に関係しているとき，これと，これを x について微分して得られる関係

$$\begin{cases} y'=\varphi'(x;C_1,C_2,\cdots,C_n), \\ y''=\varphi''(x;C_1,C_2,\cdots,C_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n)}=\varphi^{(n)}(\underset{x;}{\cancel{;x}}C_1,C_2,\cdots,C_n) \end{cases}$$

とから $C_1, C_2, \cdots, C_n$ を消去すれば

$$f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0 \tag{1·2}$$

なる微分方程式が得られる．

また $$y_i=\varphi_i(x; C_1, C_2, \cdots, C_n) \quad (i=1, 2, \cdots n) \tag{1·3}$$

が変数 x 及び n 個の任意定数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ に関係しているときは，これと，これを x について微分して得られる関係

$$y_i'=\varphi_i'(x; C_1, C_2, \cdots, C_n) \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

とから $C_1, C_2, \cdots, C_n$ を消去すれば

$$f_i(x, y_1, \cdots y_n, y_1', \cdots, y_n')=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{1·4}$$

なる連立微分方程式が得られる．

(1·2) または (1·4) の微分方程式があらかじめ与えられているとき，x の適当な函数 $\varphi(x)$ または $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ を取って

$$y=\varphi(x), \ y'=\varphi'(x), \cdots, y^{(n)}=\varphi^{(n)}(x)$$

または

$$y_1=\varphi_1(x), \ y_2=\varphi_2(x), \cdots, y_n=\varphi_n(x),$$
$$y_1'=\varphi_1'(x), \ y_2'=\varphi_2'(x), \cdots, y_n'=\varphi_n'(x)$$

とするとき，(1·2) または (1·4) が恒等式となるならば，$y=\varphi(x)$ または $y_1=\varphi_1(x), \cdots, y_n=\varphi_n(x)$ はそれぞれ (1·2) または (1·4) の解であるという．もし (1·2) または (1·4) が上のように (1·1) または (1·3) から $C_1, C_2, \cdots, C_n$ を消去して得られたものであれば，(1·1) または (1·3) は $C_1, C_2, \cdots, C_n$ に任意の値を入れたとき (1·2) または (1·4) の解となる．すなわち (1·1) または (1·3) は n 個の任意定数を含む (1·2) または (1·4) の解である．

微分方程式 (1·2) または (1·4) は，それらが任意定数の消去とは無関係にあらかじめ与えられているときでも，一般にはいずれも n 個の任意定数を含む解をもっている．このことは次のように考えれば了解されるであろう．（厳密な証明は第4章で述べる）

まず (1·4) の場合について考えよう．$x, y_1, y_2, \cdots, y_n$ を $(n+1)$ 次元空間の直交座標と考えると，(1·4) は曲線 $y_1=y_1(x), \cdots, y_n=y_n(x)$ 上の点とそ

の点における曲線の接線の方向との関係を表わしている．したがって (1·4) の解を幾何学的に求めることを考えて，まず一つの超平面 $x=\alpha$ 上に一点 A $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ を取り，(1·4) によって定まる点 A における $(y_1', y_2', \cdots, y_n')$ の表わす方向に点 A から少しだけ点 S_1 まで進む．次に (1·4) によって定まる点 S_1 における $(y_1', y_2', \cdots y_n')$ の表わす方向に，点 S_1 から少しだけ点 S_2 まで進む．以下これを繰返していくと，空間に点 A から出発する折れ線 $AS_1S_2\cdots$ が得られる．このとき点の進みを限りなく小さくすると，折れ線は点 A から出発する曲線に限りなく近づく．この曲線は出発点 A が超平面 $x=\alpha$ 上で変動するとき，それに応じて変動する．すなわち $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ の各値に対応して曲線が定まってき，しかも $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ の値が変わると，それに応じて曲線も変わってくる．したがって曲線の方程式は

$$y_i=\varphi_i(x; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

の形で表わされ，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ は n 個の任意定数になる．さてわれわれの曲線のつくり方から函数 $\varphi_i(x; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ は明らかに (1·4) の解になっている[1]．かくて一般に (1·4) は (1·3) の形の n 個の任意定数を含む解をもっていることがわかる．

(1·2) の場合には $y=y_1$，$y'=y_2, \cdots, y^{(n-1)}=y_n$ とおけば

$$\begin{cases} y_1'-y_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1}'-y_n=0, \\ f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_n')=0 \end{cases}$$

なる形の1階連立微分方程式が得られるから，前の議論より一般に (1·2) もやはり n 個の任意定数を含む解をもっていることがわかる．

(1·2) または (1·4) は，一般に上に述べたように n 個の任意定数を含む解をもっている．このような解を**一般解**という．一般解が含む任意定数に特定の値を与えると，それに応じて特定の解が得られるが，このような解を**特殊解**という．ところが (1·2) または (1·4) は，一般解が含む任意定数にどんな値を与え

1) ここで得られたような解を表わす曲線を**積分曲線**という．

ても得られないような解をもっていることがある．もし (1·2) または (1·4) がこのような解をもっている場合には，このような解を**特異解**という．（これらの解の厳密な定義は第4章で述べる．いまは一応このように考えておく）

例 1 $$y'^3=27y^2$$

〔解〕 $dy/dx=3y^{2/3}$ であるから $y\neq0$ ならば $y^{-2/3}dy=3\,dx$．両辺を積分して $y=(x-C)^3$ を得る．ここで C は任意定数である．よってこれは一般解である．C にきまった値を与えると特殊解が得られるが，それは $x=C$ において x-軸に接する3次曲線を表わしている．例えば $C=0$ とすれば $y=x^3$ なる特殊解が得られるが，これは原点において x-軸に接する3次曲線を表わしている．

また $y=0$ のときは，これは明らかに微分方程式を満足する．よって $y=0$ も微分方程式の解である．ところがこの解は，一般解の式よりわかるように特殊解ではない．すなわち特異解である．

例 2 $$y'=y/x$$

〔解〕 $y\neq0,\ x\neq0$ とすると $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x}$ より $y=Cx$ となる．これ一般解である．

$y=0,\ x\neq0$ ならば $y=0$ は明らかに一つの解である．ところがこれは一般解において $C=0$ として得られる．よってこれは一つの特殊解である．

$y\neq0,\ x=0$ のときは，もとの微分方程式を

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y} \tag{$*$}$$

のように変形すると，$x=0$ はこれの解になっている．この意味で $x=0$ ももとの微分方程式の解であるという．

さて（$*$）の一般解は明らかに $x=C'y$ で $x=0$ は $C'=0$ に応ずる特殊解である．さて C, C' の間には x, y の中少なくとも一つが0でない限り $CC'=1$ なる関係があるから，$x=0$ は $y=Cx$ なる一般解において $C=\infty$ に応ずる特殊解とみなすことができる．このようにして，この例題では一般解は $y=Cx$ で，$x=0$ は $C=\infty$ に応ずる特殊解と考え，特異解は存在しないと考える．

上のことは幾何学的に考えれば明らかで，一般解 $y=Cx$ は原点を通る方向係数が C である直線を表わし，$x=0$ は方向係数が∞のときの直線を表わしているからである．

注意 x の函数 $y=\varphi(x)$ が微分方程式

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{1·5}$$

の解であるとき，$\varphi'(x)\neq 0$ ならば $y=\varphi(x)$ の逆函数 $x=\psi(y)$ は微分方程式

$$f\left(x,\ y,\ \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\right)=0 \tag{1·6}$$

の解である．ところが $y=\varphi(x)$ も $x=\psi(y)$ も，x, y の間の関係としては同値であるから，一般には y を x の函数と限らず，(1·5) と (1·6) とを同値な方程式と考える．例2の場合には，このように考えて $x=0$ なる解を得ているのである．y を x の函数とだけ考えるならば，$x=0$ は解とはいえないが，上のように考えて，これも解としているわけである．

演 習 問 題 1

1. 次の函数より任意定数 A, B, C, D を消去して，それらが満足する微分方程式をつくれ：

(1) $$y=A\,\phi(x)+B\,\psi(x)$$

(2) $$\begin{cases} y=A\,\phi_1(x)+B\,\psi_1(x), \\ z=A\,\phi_2(x)+B\,\psi_2(x) \end{cases}$$

(3) $$y=A\,x\cos\left(\frac{1}{x}+B\right)$$

(4) $$y=\frac{A\,x+B}{C\,x+D}$$

ここに $\phi(x)$，$\psi(x)$；$\phi_1(x)$，$\cdots$，$\psi_2(x)$ は定まった函数とする．

2. 平面内の任意の円が満足する微分方程式を求めよ．

3. 原点を通る半径 a の円は

$$(x-a\cos\theta)^2+(y-a\sin\theta)^2=a^2$$

で表わされる．ここで θ を任意定数として，これらの円が満足する微分方程式をつくれ．

第 2 章　求積法 (1 階)

不定積分を有限回行うことによって一般解を求める方法を**求積法**という．本章では1階微分方程式についてその基本的方法を述べよう．

2·1　完全微分形

2·1·1　完全微分形　導函数について1次の1階微分方程式は

$$Pdx+Qdy=0 \tag{2·1}$$

の形に書くことができる．これはいうまでもなく

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P}{Q} \quad \text{または} \quad \frac{dx}{dy}=-\frac{Q}{P}$$

と同じ意味で，P, Q は一般に x, y の函数である．

(2·1) の左辺が完全微分，すなわち

$$df(x, y)=Pdx+Qdy \tag{2·2}$$

が成立つような函数 $f(x, y)$ が存在する場合には，(2·1) は直ちに積分できて

$$f(x, y)=C \quad (C \text{ は任意定数}) \tag{2·3}$$

により一般解が与えられる．

(2·1) の左辺の式が完全微分であるための条件を考えよう．P, Q は x, y に関して連続な偏導函数をもつとする．もし $Pdx+Qdy$ が完全微分であるとすると，(2·2) を満足する $f(x, y)$ が存在する．よって

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=Q \tag{2·4}$$

が成立つ．したがって

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

より

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{2·5}$$

が成立つ．逆に (2·5) が成立つとし

$$f(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx+\phi(y) \tag{2·6}$$

とおく．但し x_0 は任意の定数で，$\phi(y)$ は y のみの函数である．上式を y について微分し (2·5) を用いると次の式を得る：

$$\frac{\partial f}{\partial y}=Q(x, y)-Q(x_0, y)+\phi'(y). \tag{2·7}$$

よって $\phi(y)$ を

$$\phi(y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy+C \quad (y_0,\ C \text{ は任意の定数})$$

なるようにきめれば，(2·6)，(2·7) より (2·4) が成立ち，$Pdx+Qdy$ は完全微分となる．以上により次の定理を得る：

定理 2·1 “$Pdx+Qdy$ が完全微分であるための条件は (2·5) が成立つことである．(2·5) が成立つとき，(2·2) が成立つ $f(x, y)$ は

$$f(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)+C \tag{2·8}$$

で与えられる．ただし x_0，y_0，C は任意の定数である．”

例 1
$$\frac{2x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{2y+x}{x^2+y^2}dy=0$$

〔**解**〕 明らかに (2·5) が成立つ．よって (2·8) より一般解は次の式で与えられる：

$$\int_{x_0}^{x}\frac{2x-y}{x^2+y^2}\,dx+\int_{y_0}^{y}\frac{2y+x_0}{x^2_0+y^2}\,dy=C. \quad (C \text{ は任意定数})$$

$x_0=0,\ y_0=1$ にとれば

$$\log(x^2+y^2)-\tan^{-1}\frac{x}{y}=C.$$

2·1·2 変数分離形 完全微分形の重要な特別の場合は**変数分離形**である．これは P, Q がそれぞれ x のみ，y のみの函数のときである．このときは明らかに (2·5) が成立ち，一般解は (2·8) より

$$\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(y)dy=C \quad (C \text{ は任意定数})$$

で与えられる．

例 2
$$(x^2+1)(y^2-1)dx+xydy=0$$

〔解〕 $x \neq 0, y^2-1 \neq 0$ とすると

$$\frac{x^2+1}{x}dx+\frac{y}{y^2-1}dy=0.$$

よって

$$x^2+\log x^2+\log(y^2-1)=C', \quad (C' \text{ は任意定数})$$

あるいは

$$y^2=1+C\frac{e^{-x^2}}{x^2}. \quad (C=e^{C'})$$

$x=0,\ y^2-1=0$ はまた明らかに解であるが，これらはいずれも $C=0$ に応ずる特殊解である．

2·1·3 積分因子 $Pdx+Qdy$ は完全微分でないが，適当な0でない因子 $\lambda(x,y)$ を $Pdx+Qdy$ に乗ずるとこれが完全微分になるとき，すなわち

$$df(x,y)=\lambda(Pdx+Qdy) \tag{2·9}$$

が成立つような $f(x,y)$ が存在するときは，(2·1) の一般解は明らかに (2·3) で求められる．例2では $\lambda(x,y)=\dfrac{1}{x(y^2-1)}$ を取ったことになっている．このような $\lambda(x,y)$ を**積分因子**といい，これに対応して (2·9) が成立つような $f(x,y)$ を $\lambda(x,y)$ に対応する**積分**という．積分に対しては次の定理が成立つ：

定理 2·2 “$f(x,y)$ を任意の積分とするとき，他の任意の積分は $f(x,y)$ の函数として表わされる．”

証明 $g(x,y)$ を任意の積分とすると (2·9) より

$$Q\frac{\partial g}{\partial x}-P\frac{\partial g}{\partial y}=0$$

が成立つ．同様な式が $f(x,y)$ に対しても成立つ．ところが P,Q 両方とも恒等的に0ということはないから（このときは与えられた微分方程式そのものが無意味である），P,Q のうち少なくとも一つが0でない範囲で

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}=0$$

が成立つ．よってその範囲で f,g の間に函数関係 $F(f,g)=0$ が成立つ．積分は定数でないから——定数ならば $P=Q=0$ となる——$F(f,g)$ は必ず g を含む．したがって $F(f,g)=0$ より g は f の函数として表わされる．これで

定理は証明された.

(2·9) より λ が積分因子であるための条件は定理 **2·1** によって

$$\frac{\partial(\lambda P)}{\partial y}=\frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x}$$

である. これは書き直すと次のようになる：

$$P\frac{\partial\lambda}{\partial y}-Q\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\lambda\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{2·10}$$

よって積分因子を直接求めるには, (2·10) なる1階偏微分方程式を解かねばならぬことになるが, 一般には偏微分方程式を解くことは常微分方程式を解くより困難である. したがって実際の場合に (2·1) を解くために (2·10) を解いて積分因子を求めるということは無意味である. ところが (2·1) を解くために必要なのは, 何か一つの積分因子がわかれば十分なので, (2·10) の一般解, いいかえればすべての積分因子はわからなくても差支えないのである. 実際, (2·10) の一般解を求めることは困難であっても, その特別な解は見当で直ちにわかることがしばしばある. このような場合, その見当で見つかった積分因子を利用してわれわれは (2·1) を解くことができるのである.

積分因子については次の定理が成立つ：

定理 2·3 “任意の二つの積分因子の比は積分である. また任意の積分因子と任意の積分との積は積分因子である.”

証明 λ, μ を任意の二つの積分因子とすると, λ, μ 両方とも (2·10) を満足するから

$$P\left(\mu\frac{\partial\lambda}{\partial y}-\lambda\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)-Q\left(\mu\frac{\partial\lambda}{\partial x}-\lambda\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)=0$$

が成立つ. $\nu=\lambda/\mu$ とおけば上式より

$$P\frac{\partial\nu}{\partial y}-Q\frac{\partial\nu}{\partial x}=0.$$

よって

$$\frac{\dfrac{\partial\nu}{\partial x}}{P}=\frac{\dfrac{\partial\nu}{\partial y}}{Q}=\rho$$