シュヴァルツ

# 解析学 1

## 集合・位相

東京大学教授
齋藤正彦 訳

東京図書株式会社

シュヴァルツ

# 解析学 1

## 集合・位相

齋藤正彦 訳

東京図書株式会社

シュヴァルツ解析学 1

集合・位相　　¥1500

1970年9月11日　第1刷発行
1978年10月20日　第4刷発行　　Printed in Japan

著　者　L. シュヴァルツ
訳　者　齋 藤 正 彦
発行所　東京図書株式会社

東京都文京区水道2-5　カキビル
振替東京4-13803　電話(814)7818〜9

3341-2101-5160

LAURENT SCHWARTZ

# COURS D'ANALYSE

I

HERMANN

Paris 1967

# 序

しばしば語られて来たように，物理学者や技術者のための《涙なしの数学》は存在しない．現代の物理学者や技術者は，莫大な量の，しかも広大な領域にわたっての数学的知識を必要とする．だから，これら数学の《利用者》にとって，必要なすべての結果を，完全な証明つきで習得することは，もはや絶対に不可能である．ところが，数学では，一つ一つの結果に厳密な証明を付けることが通念となっている．したがって，数学の教程は，つぎの二つのうちのどちらかを選ばざるを得ない．一つは短い教程で，ほんの少しの結果をきちんと証明する．こうすると，数学の学生は満足するだろうが，物理の学生は満足しないだろう．もう一つはやはり短い教程で，結果は豊富だが，証明はごく概略だけ付けるか，またはまったく省略してしまう．この場合には，読者のデカルト精神がまったく満たされないことになるだろう．

そこで，我々はこのどちらとも異なる第三の道を選んだ．私は長い教程，非常に長い教程を作った．それは定理をふんだんに含み，しかも，それらすべてに原則として完全な証明が付けてある．したがって，これは本来の意味での教程というよりはむしろ一冊の本，参考図書である．この教程を実際に講義するときには，その要約だけしか話すひまがないと思う．学生諸君は，したがって，この本全部を義務的に学ぶ必要はない．その都度明確に指示される必須部分だけを学べばよい．必須部分は，たくさんの結果と少しの証明とから成っている．

そのかわり，学生諸君は，この本で出会う新しい考えかたや構造をすべて理解

しなければならない．また，諸定理とその精神とを知らなければならない．さらに，習得した定理が楽々と使いこなせるようにならなければならない．これは思ったほどやさしいことではない．もし，定理に述べられていることの意味を一度も深く考えなかったとしたら，たとえ本を見ながらでも，その定理をすぐに使いこなすことは絶対に不可能である．

必須と指示した証明は，すべてもっとも教育的でしかももっとも特徴的なものばかりである．

しかし，学生諸君は，必須でない部分からも，自分の好みに一番よく合ったところを選んで勉強することができるし，しかも私はそれを強くすすめる．その際，講義担当者や私自身に相談するとよい．我々は，諸君に助言を与えることを切に望んでいるのである．こうすることによって，いろいろな好みの学生，いろいろな学力水準の学生が，ひとしく満足を得ることになるだろう．その結果，本校（Ecole Polytechnique）の同学年の学生が，人によってそれぞれ別々の部分を深く学んだことになれば大変結構なことであろう．

ロラン・シュヴァルツ

# 訳　者　序

本書は，Laurent Schwartz 著

«*Cours d'analyse*» (1967)

の全訳である．これは，シュヴァルツ教授の Ecole Polytechnique での解析学の講義の教程として書かれた．

原書は全二巻の仮綴本であるが，訳書は全7巻に分けた．訳書の構成はつぎのとおりである．

| | | | |
|---|---|---|---|
| 第1巻 | 集合・位相 | Ch. 1 | 集　合 |
| | | Ch. 2 | 位　相 |
| 第2巻 | 微分法 | Ch. 3 | 微分法 |
| 第3巻 | 積分法 上 | Ch. 4 | 積分法 |
| 第4巻 | 積分法 下 | Ch. 4 | 積分法（つづき） |
| 第5巻 | 外微分法 | Ch. 6 | 外微分法 |
| 第6巻 | 複素関数 | Ch. 7 | 複素関数 |
| 第7巻 | 微分方程式 | Ch. 5 | 微分方程式 |
| | ヒルベルト空間 | Ch. 22 | ヒルベルト空間 |
| | フーリエ級数 | App. | フーリエ級数 |

# 読者への注意

1. 欄外の注意記号 ☡（危険な曲り角）は，そこが重大な誤りを犯しやすい箇所であることを示す．
2. 記号〚――〛は，反復を避けるための略記号である．たとえば，«A〚A′〛ならば B〚B′〛である» は，«A ならば B であり，A′ ならば B′ である» を意味する．
3. 訳者の補注は原注と同じ脚注の形とし，最後に［訳注］と断りを入れた．

# 目　　次

# 第1章　集　合　論

## §1.　集合とその基本的な演算

ものの集まりを**集合**と言う.

**例**　あるクラスの生徒全部の集合
　平面上の点全部の集合
　三次元空間における非退化二次曲面全部の集合
　0 以上の整数全部の集合 $\mathbf{N}$
　整数全部の集合 $\mathbf{Z}$
　有理数全部の集合 $\mathbf{Q}$
　実数全部の集合 $\mathbf{R}$
　複素数全部の集合 $\mathbf{C}$

簡単のため, 《何々全部の集合》と言うかわりに《何々の全体》とも言うことにする.

### 部分集合

記号 $x \in \mathrm{E}$ は《$x$ は集合 E の元である》を意味する*). 集合 A がもう一つの集合 E の元だけから成るとき, A は E の**部分集合**であると言う. 楕円面全部の集合は二次曲面全部の集合の部分集合である.

集合 E の部分集合には E 自身もあり, 空集合 $\varnothing$ もある. また一点 $a$ から成る部分集合 $\{a\}$ もある. 三つの元 $a$, $b$, $c$ から成る集合を $\{a, b, c\}$ と書く. E の元 $a$ と E の部分集合 $\{a\}$ とを混同してはならない. ある性質 P を

---

*) 集合はまた空間と呼ばれることも多く, そのときにはその元は普通点と呼ばれる.

持つ元全部の集合を普通 $\{x\,;\,x$ は性質 P を持つ$\}$ と書く．たとえば，$\{x\,;\,x \in \mathbf{R},\ x \geqslant 0\}$ は 0 以上の実数全部の集合を意味し，$\{\mathrm{Arc}\tan x\,;\,x \in \mathbf{R},\ e \leqslant x \leqslant 2e\}$ は，$x$ が $e$ と $2e$ との間（両端も含めて）の値すべてを取るときの $\mathrm{Arc}\tan x$ なる数全部の集合を表わす．

集合 E の部分集合全部の集合を $\mathfrak{P}(\mathrm{E})$ で表わす．これは E から作られる新しい集合である．こうしてつぎつぎに $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathrm{E}))$ 等々を考えることができる．

E が $n$ 個の元から成るとき，$\mathfrak{P}(\mathrm{E})$ は $2^n$ 個の元から成る*)．

### 包含関係．補集合

X, Y を E の部分集合とする．X の元がすべて Y の元であるとき，X は Y に**含まれる**または Y は X を**含む**と言い，$\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$ または $\mathrm{Y} \supset \mathrm{X}$ と書く．すると，$\emptyset \subset \mathrm{X} \subset \mathrm{E}$, $\emptyset \subset \emptyset$, $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}$ が成立つ．また，$\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$, $\mathrm{Y} \subset \mathrm{Z}$ ならば $\mathrm{X} \subset \mathrm{Z}$ である．

A が E の部分集合であるとき，A に属さない E の元全部の集合を A の E における**補集合**と言い，$\complement_{\mathrm{E}} \mathrm{A}$ と書く．混乱のおそれのないときには，$\complement \mathrm{A}$ とも書く．このとき $\complement\complement \mathrm{A} = \mathrm{A}$ が成立つ．また，$\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ ならば $\complement \mathrm{A} \supset \complement \mathrm{B}$ となる．A, B が E の部分集合で $\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$ のとき，A の元で B に属さないもの全部の集合を $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ と書くことがある．

### 合併集合．共通部分

集合 E の部分集合の集まりの**合併集合**とは，E の元で，それらの部分集合の少なくとも一つに属するようなもの全部の集合である．たとえば三つの部分集合 A, B, C の場合，その合併集合を $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}$ と書く．

ある添字集合 I によって添字づけられた部分集合 $\mathrm{A}_i$ の族の場合には，その

---

*) $n$ 個の元から成る集合の部分集合のうち，$p$ 個の元から成るものの個数を ${}_n\mathrm{C}_p$ または $\binom{n}{p}$ と書く．そこで，E のあらゆる部分集合（$\emptyset$ や E も忘れずに）を数えて

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

が得られる．

つぎのように考えてもよい．$\mathrm{E}_n = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ とすると，$\mathfrak{P}(\mathrm{E}_n)$ は $n \geqslant 1$ ならば，二つの共通元のない部分集合，すなわち $n$ を含む部分集合全部の集合および $n$ を含まない部分集合全部の集合とに分れる．そして，そのそれぞれの元の個数は $\mathfrak{P}(\mathrm{E}_{n-1})$ の元の個数である．だから，$\mathfrak{P}(\mathrm{E}_n)$ の元の個数を $\mathrm{A}_n$ とすれば，$\mathrm{A}_n = 2\mathrm{A}_{n-1}$ が成立つ．$\mathrm{A}_0 = 1$（$\mathrm{E}_0$ は空集合，その部分集合は $\emptyset$ のみ）であるから $\mathrm{A}_n = 2^n$ となる．

合併集合を $\bigcup_{i\in I} A_i$ と書く.

集合 E の部分集合の集まりの**共通部分**とは，E の元で，それらの部分集合のどれにも属するようなもの全部の集合である．前と同様，$A\cap B\cap C$, $\bigcap_{i\in I} A_i$ などの記号を用いる.

二つの部分集合の共通部分が空集合であるとき，この二つの部分集合は共通元がないと言う.

部分集合の族の共通部分の補集合は，各部分集合の補集合の合併集合である．部分集合の族の合併集合の補集合は，各部分集合の補集合の共通部分である．すなわち，

(1. 1)　$$\complement(A\cap B)=\complement A\cup\complement B,\qquad \complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B.$$

したがって，E の各部分集合にその補集合を対応させる操作により，$\subset$ は $\supset$ に，$\supset$ は $\subset$ に，$\cup$ は $\cap$ に，$\cap$ は $\cup$ に移る.

### 積　集　合

二つの集合 E, F に対し，E の元 $x$ と F の元 $y$ との順序のある組 $(x, y)$ 全部の集合を E と F との**積集合**と言い，$E\times F$ と書く．$x\neq y$ ならば $(x, y)$ と $(y, x)$ とは違うものであることに注意せよ．とくに E と F とが同じ集合のときには混同しないようにしなければならない.

同様に，もっと多くの集合の積や集合の族の積を定義することができる．このとき，$(E\times F)\times G$, $E\times(F\times G)$, $E\times F\times G$ はたがいに同一視することができる．これが集合の乗法の結合性である.

$E\times E$, $E\times E\times E$ 等はそれぞれ $E^2$, $E^3$ 等と記す.

したがって，実数全部の集合 $\mathbf{R}$ の $n$ 個の積は $\mathbf{R}^n$ と書かれる．$\mathbf{R}^n$ の点は $n$ 個の任意の実数の順序づけられた組 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ である.

## § 2.　写像あるいは関数

E, F を集合とする．E の各元 $x$ に F の一つの元を対応させる対応（規則）$f$ を E から F への**写像**あるいは E で定義されて F に値を取る**関数**と言う．$x$ に対応する F の元を $f(x)$ と書く．記号 $E\xrightarrow{f}F$ は，$f$ が E から F への写像であることを表わす．E, F をそれぞれこの写像の**始集合**，**終集合**と言う.

写像 $f$ と，$f$ によってある元 $x$ に対応する元 $f(x)$ とを注意深く区別しなければならない．しかし，実用の見地から言うと，この区別をつねにすることは

あまり簡単でない．たとえば《関数 $\sin x$》というのは便利だが正確ではなく，《関数 sin》と言うべきなのである．$\sin x$ はこの関数のある点 $x$ での値ということになる．しかしこれでは不便なので，関数《$x \mapsto \sin x$》と言うか，または《$f(x) = \sin x$ によって決まる関数 $f$》とか言うことにすればよい．

ある集合からそれ自身への写像は**作用素**とも呼ばれる．

**写 像 の 例**

**1.**　$f(x) = \dfrac{1}{x}$ によって決まる関数 $f$ は，実数直線 $\mathbf{R}$ から 0 を除いた集合から $\mathbf{R}$ への写像である．だから，この関数を実変数の実数値関数と言うのは正確ではない．変数は実数すべての値を取ることができないのだから．しかし，$\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への写像 $g$ を，$x \neq 0$ ならば $g(x) = \dfrac{1}{x}$，$g(0) = 2$ として決めることはもちろんできる．この関数 $g$ は関数 $f$ とは違うもので，その定義される集合自身がすでに違っている．また写像 $h$ を，$x \neq 0$ に対しては $h(x) = \dfrac{1}{x}$，$h(0) = +\infty$ と置いて，集合 $\mathrm{E} = \mathbf{R}$ から，$\mathbf{R}$ に $+\infty$ と記す一つの元を付加えた集合 F への写像として考えることもできる．

**2.**　閉区間 $[a, b]$ で定義される実数値可積分関数全部の集合を E とすれば，積分 $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x)dx$ は E から実数直線 $\mathbf{R}$ への写像である．

**3.**　ユークリッド平面内の長さ有限な曲線全部の集合を E とすると，各曲線にその長さを対応させる対応は，E から半直線 $\mathbf{R}_+$（0 以上の実数全体）への写像である．

集合 E 上，$f(x) = x$ で定まる E から E への写像 $f$ を E の**恒等写像**と言う．E が F の部分集合のとき，$f(x) = x$ によって定まる E から F への写像を E から F への**標準単射**と言う．

積集合 $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ から E への写像が，組 $(x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}$ に $x$ を対応させることによって得られる．これを E への**射影**と言う．同様に F への射影も定義される．

E, F, G を集合とする．$\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ から G への写像 $f$ は組 $(x, y) = z \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}$ に G の元 $f(z) = f((x, y))$ を対応させる．普通，二重括弧をはずして，これを $f(x, y)$ と書き，$f$ を二変数の関数と言う．たとえば，E が実変数の，各有限区間で可積分な実数値関数全部の集合であるとき，積分 $\int_a^b \varphi(x)dx$ は $\mathrm{E} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への写像を定める．実際，それは三変数 $\varphi \in \mathrm{E}$，$a \in \mathbf{R}$，$b \in \mathbf{R}$ の関数である．

つぎに，E から $\mathrm{F} \times \mathrm{G}$ への写像は $x \mapsto (f(x), g(x))$ の形となり，ここ

で $f$, $g$ はそれぞれ E から F, G への写像である． すなわちこの関数は，二つの関数の組を考えているのと同じである．

もっと一般に，積集合 $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ から積集合 $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_m$ への写像は，$n$ 変数の関数 $m$ 個の組と同じものである．

E から F への写像 $f$ で，すべての $x \in E$ に対する $f(x)$ が F の同一の元であるとき，$f$ を**定値写像**と言う．

### 単射．上射．双射

E から F への写像 $f$ による E の二つの相異なる元の像が F の相異なる元であるとき， $f$ を**単射**と言う． ある集合の部分集合から全集合への標準単射はもちろん単射である．

F の各元が， E の少なくとも一つの元の $f$ による像であるとき，$f$ を**上射**と言う．

F の各元が， E のちょうど一つの元の $f$ による像であるとき， $f$ を**双射**と言う．ある写像が双射であるのは，それが単射かつ上射であるときである．ある集合からそれ自身への双射は，**置換**とか**変換**とかとも呼ばれる．

$f$ を双射とし，$y \in F$ とする．$f(x) = y$ となる E の唯一つの元 $x$ を $f^{-1}(y)$ と書く．こうして F から E への写像 $f^{-1}$ が定まる． これを $f$ の**逆写像**あるいは**逆双射**と言う．適切ではないが，しばしば**逆関数**とも言う．

### 部分集合の順像と逆像

$f$ を E から F への写像とし，A を E の部分集合とする．$x \in A$ に対する $f(x)$ の全部から成る F の部分集合を $f(A)$ と書く．もちろん $f(\emptyset) = \emptyset$ である．$A \mapsto f(A)$ によって $\mathfrak{P}(E)$ から $\mathfrak{P}(F)$ への写像が定まる．この写像は記号 $\subset$, $\supset$, $\cup$ を保存する．すなわち

$$(2.1)\qquad \begin{cases} A \subset B \text{ ならば } f(A) \subset f(B). \\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B). \end{cases}$$

しかしそれは記号 $\cap$, $\complement$ を保存しない．すなわち

$$(2.2)\qquad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

が成立つだけである*)．$f(A)$ を A の $f$ による**順像**または**像**と言う．

つぎに B が F の部分集合であるとき， $f(x) \in B$ となる E の元 $x$ 全部の

---

*) $f$ を定値写像，$f(x) = b$ とする．A, B を E の共通元のない部分集合とすると，$A \cap B = \emptyset$ だからもちろん $f(A \cap B) = \emptyset$ である．一方 $f(A) \cap f(B) = \{b\}$ となる．