

7560255

Blaue TR-Reihe

Digitale Telephonie

Von Albert Kündig



916.53

KI
Albert Kündig, Bern
Dipl.-Ing. ETH

Digitale Telephonie

Theorie und Praxis
der Pulsmodulation



E7560255



Blaue -Reihe Heft 103

Verlag «Technische Rundschau»
im Hallwag Verlag, Bern und Stuttgart

1250322

Digital

Telephonie

Albert L. ...
ETB ...

Technische Rundschau
Nr. 7, 13, 17, 19, 32, 36, 45, 50, 54/1969, 2, 6, 19, 47, 52
und 54/1970

Aus «Technische Rundschau» Nr. 7, 13, 17, 19, 32, 36, 45, 50, 54/1969, 2, 6, 19, 47, 52
und 54/1970

© 1972 Verlag «Technische Rundschau» im Hallwag Verlag, Bern und Stuttgart

Gesamtherstellung: Hallwag AG, Bern/Schweiz - Printed in Switzerland

Inhalt

1.	Einführung	7
1.1.	PCM einmal anders	7
1.2.	Geschichtlicher Rückblick	9
1.3.	PCM-Technik im Fernmeldewesen	10
2.	Theoretische Grundlagen	11
2.1.	Abtastung	11
2.1.1.	Impulsfunktion $\delta(t)$ und Impulsreihen	13
2.1.2.	Das Spektrum amplitudemodulierter Impulsfolgen	15
2.1.3.	Das Abtasttheorem	19
2.1.4.	Sende- und Empfangsfilter	20
2.2.	Quantisierung (Lit. 9, 10 und 11)	23
2.2.1.	Lineare Quantisierung	23
2.2.2.	Kompression und Expansion	27
2.3.	Spracheigenschaften, Uebertragungsqualität und Wahl der Systemparameter	30
2.3.1.	Die Eigenschaften der Sprache und eine grobe Abschätzung der wichtigsten Systemparameter	30
2.3.2.	Zusätzliche Betrachtungen	34
3.	Die Uebertragung digitaler Signale	35
3.1.	Allgemeines	35
3.2.	Das Problem von Nyquist	39
3.2.1.	Minimal notwendige Bandbreite	40
3.2.2.	Ideale Entzerrung zur Vermeidung von Impulsübersprechen	41
3.2.3.	Voraussetzungen für optimale Taktgewinnung	42
3.2.4.	Weitere Aspekte der Wahl der Entzerrfunktion	43
3.3.	Kabelübertragung	45
3.3.1.	Aufbau und Eigenschaften symmetrischer Telephonkabel	45
3.3.2.	PCM-Uebertragung auf symmetrischen Telephonkabeln	48
3.3.3.	PCM-Uebertragung auf Koaxialkabeln	51
3.4.	Regeneration; Störungen bei der Uebertragung	51
3.4.1.	Aufbau von Zwischenverstärkern	51
3.4.2.	Beeinflussung des Regenerators durch Störungen	52
4.	Codierung und Decodierung	53
4.1.	Analog-Digital- und Digital-Analog-Umwandlung	53
4.1.1.	Zahlensysteme	53
4.1.2.	Digital-Analog-Umwandlung (Decoder)	55
4.1.3.	Rückgekoppelte Coder	58
4.1.4.	Nichtlineare Codierung und Decodierung	61
4.1.5.	Praktische Gesichtspunkte	65
4.1.6.	Andere Codierungs- und Decodierungsmethoden	67
4.2.	PCM-Telephonie-Endausrüstungen	69
4.2.1.	Prinzipieller Aufbau	69
4.2.2.	Die Bildung des PAM-Zeitmultiplexes	70
4.2.3.	Beispiele von PCM-Kurzstreckensystemen	70
4.3.	Uebertragung von Daten und Bildern in einem digitalen Telefonsystem	71

4.3.1.	Endausrüstung für Daten	74
4.3.2.	Faksimileübertragung	75
4.3.3.	Musikübertragung	75
4.3.4.	Fernsehübertragung	75
5.	Verzerrungen, Störungen und Messmethoden	76
5.1.	Systembedingte Verzerrungen	76
5.1.1.	Quantisierungsverzerrungen	76
5.1.2.	Das Grundgeräusch	76
5.1.3.	Linear- und Aliasverzerrungen	77
5.1.4.	Begrenzung	78
5.1.5.	Der Einfluss von Quantisierung und Abtastung in der Messtechnik	79
5.2.	Andere Geräusche, Nebensprechen	80
5.2.1.	Nebensprechen	80
5.2.2.	Digitale Fehler	81
5.3.	PCM-Systeme als Störer	82
5.3.1.	Leistungsdichte von PCM-Zufallssignalen	83
5.3.2.	Leistungsverteilung periodischer PCM-Signale	84
5.3.3.	Die Störung des Hochfrequenz-Telephonrundspruchs	84
5.3.4.	Die Störung von Trägersystemen	86
5.3.5.	Die Störung von Niederfrequenz-Telephonkanälen	86
6.	Digitale Vermittlungstechnik und integrierte Netze	87
6.1.	Welche Ueberlegungen führen zur digitalen Vermittlungstechnik?	87
6.2.	Digitale Zeitvielfach-Durchschaltung	89
6.2.1.	Problemstellung	89
6.2.2.	Realisierungsvorschläge	93
6.3.	Die Synchronisierung in digitalen Netzen	101
6.3.1.	Asynchrone Netze mit eingeschränktem Datenverlust	101
6.3.2.	Asynchrone Netze ohne Datenverlust	103
6.3.3.	Synchronisierte Netze	105
6.4.	Das Ortsnetz: Teilnehmeranschluss und Konzentratoren	108
6.4.1.	Grundsätzlicher Aufbau von Konzentratoren	109
6.4.2.	Vergleich von Konzentratoren in Raum- und Zeitvielfachtechnik	109
6.4.3.	Die Resonanzübertragung	111
6.5.	Signalisierung und Steuerung	113
6.6.	Verwandte Systeme	114
7.	Schlussbemerkungen und Ausblick	116
7.1.	Nicht behandelte Probleme	116
7.2.	Aktuelle Fragen und neueste Entwicklungen	116
7.2.1.	Normierung	116
7.2.2.	Digitale Verarbeitung von codierten Analogsignalen	117
7.3.	Ausblick	118
8.	Literaturverzeichnis	119

Vorwort

In verschiedenen Ländern wird mehr und mehr die Pulsmodulation verwendet, um Adern in normalen Niederfrequenzkabeln mehrfach auszunutzen. Damit wird voraussichtlich die Zeitmultiplex-technik auf den kurzen Verbindungsstrecken jene Rolle übernehmen, die die Frequenzmultiplex-technik (Trägersysteme) heute schon auf langen Strecken, vor allem in Koaxialkabeln, spielt. Es besteht aber Grund zur Annahme, dass es nicht bei diesen Parallelen bleiben wird. Es ist vielmehr wahrscheinlich, dass damit die Digitaltechnik in grossem Stil ihren Einzug im Fernmeldewesen halten wird. Nicht nur ist die Pulsmodulation heute die wohl aussichtsreichste Methode, um rein elektronische Zentralen zu bauen; sie eignet sich auch vorzüglich, um neben Gesprächen Daten zu übertragen.

In den folgenden Ausführungen wird zuerst ein Ueberblick auf die theoretischen Grundlagen dieser Technik gegeben. Es folgen die mehr praktischen Aspekte, beginnend mit der Uebertragung von Digitalsignalen sowie deren Erzeugung (Codierung). Schliesslich wird nach einem Kapitel über PCM-Vermittlungstechnik gezeigt, dass heute ein digitales, rein elektronisches Telefon- und Datennetz durchaus im Bereich des Möglichen liegt.

A. Kündig

Digitale Telephonie

Theorie und Praxis der Pulscodemodulation

1. Einführung

1.1. PCM einmal anders

Vorab soll versucht werden, mit einem einfachen Beispiel aus einem bekannten Gebiet eine Brücke zur PCM-Technik zu schlagen. Gleichzeitig lassen sich so jene Begriffe erläutern, die später immer wieder verwendet werden. Es sei folgendes Problem zu lösen¹:

Man möchte verschiedene Messwerte übertragen, wobei die Messstellen je zyklisch abgefragt und die Messresultate in Form von Zahlen gemeinsam über eine normale Fernschreibverbindung übertragen werden sollen. Im Empfänger kann der ursprüngliche Messwertverlauf angenähert werden, indem beispielsweise die periodisch eintreffenden Messpunkte durch Geraden verbunden werden (lineare Interpolation). Ausserdem muss von Zeit zu Zeit ein besonderes Zeichen gesendet werden, das dem Empfänger gestattet, die Zahlenwerte den richtigen Messstellen zuzuordnen. Beispielsweise kann diesem Zeichen die gleiche Länge wie den Messwerten gegeben und dasselbe jedesmal nach einem Abfragezyklus eingesetzt werden.

Damit erhält man das Uebertragungssystem gemäss Bild 1. Wir können nun klar die folgenden Stufen bei der Uebertragung unterscheiden:

1. Den zu messenden Signalen werden in regelmässigen Zeitabständen, entsprechend der Abtastfrequenz f_s , Proben oder, anders ausgedrückt, Abtastwerte entnommen.
2. Die Abtastwerte der verschiedenen Messstellen werden zeitlich ineinander geschachtelt: Bildung des *Zeitmultiplexsignals*. Eine Ab-

tastperiode ($T_s = 1/f_s$) wird als *Rahmen* bezeichnet; dieser enthält je einen Abtastwert von jeder Messstelle.

3. Die Abtastwerte werden als Zahlen übertragen. Deren beschränkte Stellenzahl bedeutet, dass die Grösse der Abtastwerte nun nur noch diskrete Stufen einnehmen kann. Den entsprechenden Rundungsvorgang nennt man *Quantisierung*, den Rundungsfehler *Quantisierungsfehler*. Die Umwandlung der Abtastwerte in Zahlengruppen (*Codeworte*) erfolgt in einem *Coder*.
4. Den Zahlengruppen werden elektrische Signale zugeordnet, die sich besonders gut für die Uebertragung eignen. Wurde beispielsweise ein Binärcode erzeugt, so liegt es nahe, den beiden Zuständen 0 bzw. 1 jeder einzelnen Binärstelle einen negativen bzw. positiven Impuls zuzuordnen. In diesem Fall spricht man von einer *Uebertragung Bit um Bit*.
5. Im Empfänger werden die aus den Uebertragungssignalen gewonnenen Zahlengruppen durch den *Decoder* wieder in Abtastwerte umgewandelt und nach Messstellen verteilt.
6. Das ursprüngliche Signal kann aus den Messwerten *angenähert rekonstruiert* werden, indem man die Messpunkte nach einer bestimmten Gesetzmässigkeit untereinander verbindet (Interpolation).

Offensichtlich unterscheidet sich das derart wiedergewonnene vom ursprünglichen Signal im allgemeinen durch zwei Abweichungen:

- den *Quantisierungsfehler*, der beim Messen der Abtastwerte mit beschränkter Genauigkeit durch das Runden entstanden ist.
- den *Rekonstruktionsfehler*, der bei der Annäherung des ursprünglichen Signals durch

¹Dipl.-Ing. ETH Albert Kündig, Abteilung Forschung und Versuche, Generaldirektion PTT, Bern.

²Zum Vereinfachen werden absichtlich einige unrealistische Annahmen gemacht.

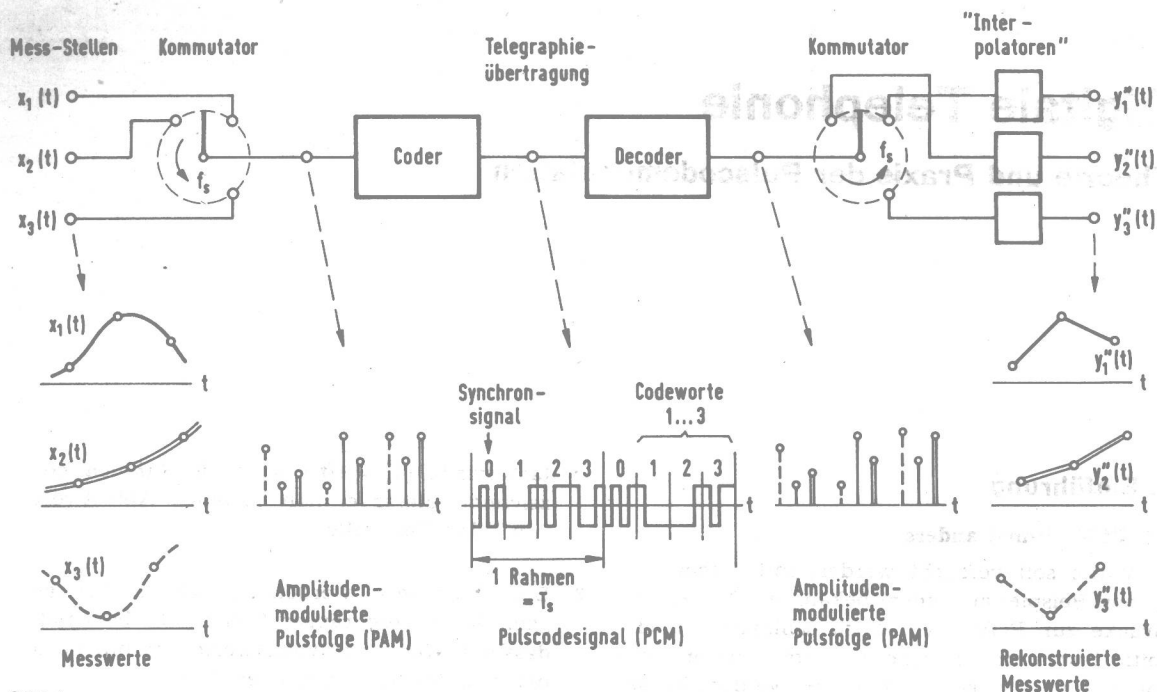


Bild 1.

eine Interpolation zwischen den Abtastwerten entsteht.²

Das an den Anfang gestellte Beispiel sei nun noch mit konkreten Zahlen zu Ende geführt: Es werde das Fernschreibalphabet zur Darstellung der Ziffern verwendet. Bei einer Uebertragungsgeschwindigkeit von 75 Baud können 10 Zehnerziffern je Sekunde übermittelt werden, was bei beispielsweise drei Messkanälen und einem Synchronkanal eine Uebertragungsgeschwindigkeit von $R = 2,5$ Zehnerziffern/s ergibt. Die zu codierenden Signale $x_i(t)$ seien auf den Bereich $-0,5$ bis $+0,5$ normiert, z. B. $-0,5$ entsprechend 0°C , $+0,5$ entsprechend 100°C . Ferner sei bekannt, dass die Aenderungsgeschwindigkeit höchstens den Wert $v = 0,05/\text{s}$ erreichen kann.

Offensichtlich kann bei vorgegebener Uebertragungsgeschwindigkeit weder die Abtastung beliebig schnell noch die Quantisierung beliebig fein erfolgen. Es gilt nun, diese beiden Grössen so festzulegen, dass irgendein Gütekriterium optimal erfüllt wird. Beispielsweise soll die

maximal mögliche Abweichung $\epsilon_{\max}$ des rekonstruierten Signals y_i'' vom ursprünglichen Signal x_i minimal gemacht werden. Es gilt (Bild 2)

$$\epsilon_{\max} = \frac{v \cdot T_s}{2} + \frac{1}{2s} = \frac{v}{2f_s} + \frac{1}{2s}$$

wenn angenommen wird, dass s gleich grosse Quantisierungsstufen verwendet werden.

Bei s Quantisierungsstufen sind $\log_{10} s$ Dezimalstellen notwendig (mit n Dezimalstellen kann man 10^n Zahlen bilden, mit n Binärstellen 2^n Zahlen). Es gilt daher

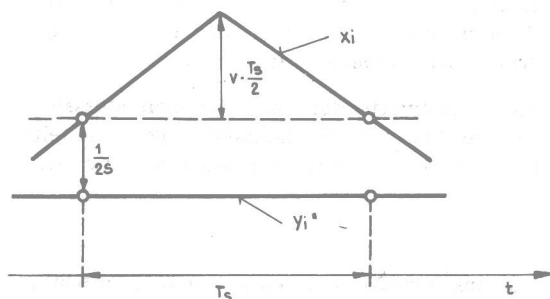


Bild 2.

² Wie später gezeigt wird, kann dieser Fehler theoretisch verschwinden, wenn das zu messende Signal bandbegrenzt ist und die Abtastfrequenz genügend hoch gewählt wird. Der Quantisierungsfehler aber ist unvermeidlich.

Uebertragungsgeschwindigkeit

$$R = f_s \cdot \log_{10} s \quad (1.1)$$

und

$$\varepsilon_{\max} = \frac{v \cdot \log_{10} s}{2R} + \frac{1}{2s} \quad (1.2)$$

$\varepsilon_{\max}$ wird minimal für

$$\frac{d\varepsilon_{\max}}{ds} = 0$$

und man erhält daher

$$s_{\text{opt}} = \frac{R \cdot \ln 10}{v} = 115 \text{ Stufen}$$

Bei Dezimalzahlen kann s nur Potenzen von 10 einnehmen, so dass man $s = 100$ Stufen entsprechend 2 Dezimalstellen verwenden wird. Die Abtastfrequenz ist dann

$$f_s = \frac{R}{\log_{10} s} = 1,25 \text{ Hz}$$

und

$$\varepsilon_{\max} = 0,025 \text{ (2,5\%)}$$

Das Leitungssignal ist in Bild 1 dargestellt. Eine letzte grundsätzliche Feststellung, die wir nun auf Grund des einfachen Beispiels über die PCM-Uebertragung noch machen können, ist:

7. Der systemeigene Fehler, der sich aus dem Quantisierungsfehler und dem Rekonstruktionsfehler zusammensetzt, kann durch geeignete Wahl von Abtastfrequenz und Quantisierungsstufenzahl minimal gemacht werden, wenn die Uebertragungsgeschwindigkeit vorgeschrieben ist.

Dies wird noch durch die graphische Darstellung der Gleichung (1.2) in Bild 3 deutlich gemacht.

Was bringt nun die beschriebene Methode der Messwertübertragung für Vorteile?

- Die Telegraphiesignale können beliebig oft regeneriert werden, wenn die Regeneration erfolgt, bevor die Störungen grösser als die Telegraphieimpulse werden. Das bedeutet, dass die Messwerte praktisch störungsfrei über beliebig lange Distanzen übertragen werden können.
- Ein Uebertragungsweg kann mit der Zeitmultiplexmethode bequem mehrfach ausgenutzt werden.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie mit den gleichen Prinzipien auch Telephonie- und andere Signale statt der Messwerte des Beispiels übertragen werden können.

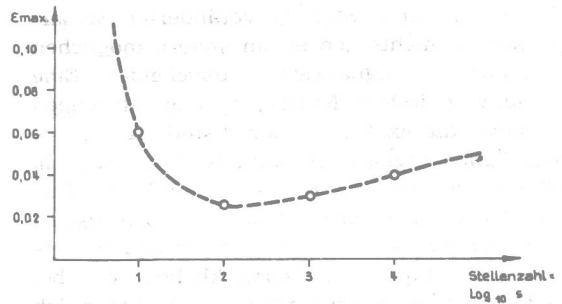


Bild 3.

1.2. Geschichtlicher Rückblick

Die Telegraphentechnik erreichte bereits vor mehr als hundert Jahren einen beachtlichen Stand. Ungefähr zur Zeit, als Bell das erste brauchbare Telephon herstellte, gelang es Baudot bereits, mehrere Telegraphiekanäle auf einer einzigen Leitung zu übertragen, die er zyklisch an mehrere Sender und Empfänger anschloss. Damit war das, was wir heute digitale Zeitmultiplextechnik nennen, bereits vorweggenommen.

Es verwundert nicht, dass schon früh etwas Ähnliches für die Telephonie versucht wurde, nämlich die bessere Ausnutzung eines Uebertragungsweges, indem dieser abwechselungsweise für kurze Zeitabschnitte verschiedenen Teilnehmern zur Verfügung gestellt wurde. Auf Grund der heutigen Kenntnisse lässt sich das Resultat der meisten derartigen Experimente leicht voraussagen: Die dabei verwendeten mechanischen Kommutatoren waren viel zu langsam, das heisst die Abtastfrequenz viel zu klein, um eine auch nur annähernd genügende Sprachqualität zu gewährleisten. Immerhin war es mit dieser Methode möglich — elf Jahre vor den ersten Versuchen auf dem Gebiet der Trägertelephonie! —, Sprache einigermaßen verständlich zu übertragen. Man erkannte bald, dass die minimal notwendige Abtastgeschwindigkeit in einem proportionalen Zusammenhang zu den höchsten im Sprachsignal vorkommenden Frequenzen stehen muss. Aber sowohl die exakte Formulierung dieses Zusammenhangs in der Form des Abtasttheorems wie auch die entsprechende technische Realisierung hatten noch Jahrzehnte zu warten. Das Ziel aber war klar: Mehrfache Ausnutzung eines Uebertragungsweges mit Hilfe der Zeitmultiplextechnik.

Noch eine andere Möglichkeit hatte die Telegraphentechnik der damaligen Telephonie voraus: ihre Signale konnten, solange sie nicht allzu stark gestört wurden, immer wieder *exakt* reproduziert werden. Dies ist beim Uebertragen

kontinuierlicher Signale prinzipiell undurchführbar, da ein durch Störung veränderter Signalwert sich in nichts von einem andern möglichen unveränderten Signalwert unterscheidet. Eine Trennung zwischen Nutzsignal und Störungen und damit die exakte Wiederherstellung des ursprünglichen Signals ist deshalb nicht möglich. 1938 aber gelang es A. H. Reeves, mit der Erfindung der *Pulscodemodulation* die Störfestigkeit des Telegraphs auch bei der Uebertragung kontinuierlicher Signale zu verwirklichen. Wie bei den Kommutatorexperimenten beschränkte er sich darauf, statt eines zeitlich kontinuierlichen Signals bloss regelmässig daraus entnommene Proben zu verwenden (Abtastung oder Zeitquantisierung). Die grundlegend neue Idee bestand nun darin, auch für die Amplitude der Proben nicht mehr eine kontinuierliche Wertskala zu verwenden (Amplitudenquantisierung). Statt dessen werden die Abtastwerte gemessen und als Zahlen, die auf eine beschränkte Stellenzahl gerundet werden, in der Form einer Art Telegraphiecode übertragen. Reeves erkannte klar den Preis, mit dem man die Vorteile der Pulscodemodulation erkaufte: Die Uebertragungsbandbreite wird umso grösser, je kleiner der willkürlich eingeführte Quantisierungsfehler gemacht wird (Impulse je Sekunde proportional zur Stellenzahl).

Es mussten aber nochmals zehn Jahre verstreichen, bis mit der Informationstheorie das umfassende theoretische Verständnis für die neue Methode geschaffen wurde. Sogar mehr als zwanzig Jahre vergingen, bis durch die moderne Halbleitertechnik die Pulscodemodulation wirtschaftlich werden konnte (Lit. 1, 2 und 65).

1.3. PCM-Technik im Fernmeldewesen

Die Pulscodemodulation wurde mit dem Ziel entwickelt, eine den speziellen Eigenschaften der damals neuen Mikrowellenrichtstrahltechnik (starke Störungen und Verzerrungen, grosse verfügbare Bandbreite) besonders gut angepasste Methode zu finden. Ihr Erfinder, A. H. Reeves, betrachtete als Hauptvorteil der Pulscodemodulation, dass sie «...das bisher wirkungsvollste Mittel gegen die Störbeeinflussung bei Sprach-

übertragung ist — speziell auf langen Strecken mit vielen Zwischenverstärkern, da dieselben leicht zu konstruieren sind und in solchen Abständen plazierte werden können, dass sich die Störungen annähernd nicht mehr kumulieren...».

Dass heute, nach dreissig Jahren, der Pulscodemodulation ein ganzes Spektrum neuer Vorteile und Anwendungsmöglichkeiten erwachsen ist, ist vor allem auf die gewaltige Entwicklung der Halbleitertechnik zurückzuführen. Von diesen neuen Vorteilen sind heute die folgenden unmittelbar realisierbar:

- Bessere Ausnutzung bestehender Kabel,
- Verwendung billiger, standardisierter Schaltkreise grosser Zuverlässigkeit in der Form der integrierten Digitalschaltungen,
- Möglichkeit, Signale verschiedenster Herkunft auf gleiche Art zu übertragen: Telephonie, Fernsehen, Daten, Faksimile, systemeigene Signalisierung usw.

Eine neue Phase der Entwicklung wird heute eingeleitet:

- Es ist möglich, die PCM-Signale direkt in digitalen Zentralen zu vermitteln. Damit wird es durchaus denkbar, dass sich das heutige Telephonnetz zu einem eigentlichen digitalen Fernmeldenetz entwickelt, das nicht nur Telephon Teilnehmer untereinander verbindet, sondern gewissermassen als Umschlagplatz aller möglichen Arten von Nachrichten in der gleichen digitalen Form dient.
- Insbesondere wäre dieses Netz geeignet, Computer (diese geben bereits digitale Signale ab!) untereinander zu verbinden.
- In einem derartigen Netz würde nur eine einmalige Codierung und Decodierung an den Enden einer Verbindung nötig sein. Damit wäre die Uebertragungsqualität praktisch unabhängig von der Verbindungsstrecke und vom Verbindungsweg.

Schliesslich darf nicht ausser acht gelassen werden, dass sich die Pulscodemodulation auch für die zukünftige Ausnutzung von Wellenleitern, Lichtleitern und Satellitenverbindungen eignet.

2. Theoretische Grundlagen

Im Einführungsbeispiel wurde gezeigt, dass die PCM-Uebertragung systembedingte Störungen infolge Abtastung und Quantisierung aufweist. Dabei wurde als wesentliches Merkmal der zu codierenden Grössen deren Aenderungsgeschwindigkeit erkannt. Nun ist ein Mass für diese Aenderungsgeschwindigkeit der Frequenzgehalt der Signale. Es wird also wichtig sein, den Einfluss der PCM-Uebertragung auf die Signalspektren zu bestimmen. Dies gilt namentlich für die Telephonie, deren Signale ohnehin viel eher in der Frequenzebene beschrieben werden. Im folgenden soll ein Modell eingeführt werden, an dem die Vorgänge des Abtastens und Quantisierens sowie die dazugehörige Beeinflussung der Spektren mathematisch behandelt werden können.

Dafür ist es zweckmässig, die Reihenfolge der Operationen bei der PCM-Uebertragung etwas umzustellen, indem man zuerst die Amplitudenquantisierung vornimmt und dann erst die Abtastung. Auf diese Weise gelangt man zum Ersatzschema in Bild 4. Man erkennt, dass hier gegenüber dem Einführungsbeispiel noch zwei weitere Modifikationen vorgenommen wurden. Als erstes wird das Signal $x(t)$ mit einem Filter $G_0(f)$ vorverzerrt, d. h. es wird die Aenderungsgeschwindigkeit beeinflusst. Es soll noch nachgewiesen werden, wie mit dieser Massnahme die Uebertragungsfehler unter Umständen kleiner gemacht werden können. Die Amplitudenquantisierung wird mit einer Treppenkennlinie $y(x')$ charakterisiert: Dem kontinuierlichen Eingangsmomentanwert $x'(t)$ wird eine endliche Zahl von Ausgangsmomentanwerten $y(t)$ zugeordnet. Beim Abtasten entnimmt man diesem Signal in regelmässigen Abständen T_s Proben $y(nT_s)$. Der Coder ordnet den Proben Codewörter zu, die nach der Uebertragung vom Decoder wiederum

in die Reihe $y(nT_s)$ der Abtastwerte zurückverwandelt wird. Die zweite Modifikation zeigt, dass das ursprüngliche Signal annähernd wiedergewonnen werden kann, indem man für jeden Abtastwert $y(nT_s)$ einen Puls $y(nT_s) \cdot p(t - nT_s)$ erzeugt und die dadurch entstehende Pulsfolge mit einem geeigneten Filter $H(f)$ filtert.

2.1. Abtastung

Zunächst sei der Vorgang der Abtastung und Rückgewinnung von Signalen aus den Abtastwerten für sich betrachtet. Entsprechend können in Bild 4 die Strecken 1—2 und 3—4—5—6 überbrückt werden. Es wird sich lohnen, diese Untersuchungen etwas ausführlicher zu machen, da die Ergebnisse nicht nur für alles folgende unentbehrlich sein werden, sondern auch in Gebieten ausserhalb der PCM-Technik wichtig sind. Nach Möglichkeit wurde darauf geachtet, dass die Ableitungen auch verständlich sind, ohne dass der Mathematik im Detail gefolgt werden muss.

Es interessiert vor allem, wie die Filter $G_0(f)$ und $H(f)$ beschaffen sein müssen, damit das Ausgangssignal $y''(t)$ das ursprüngliche Signal $x(t)$ möglichst gut annähert. In einem ersten Schritt soll dazu das Spektrum $Y'(f)$ der Pulsfolge

$$\begin{aligned} y'(t) &= \dots y(-2T_s) p(t+2T_s) + y(-T_s) p(t+T_s) \\ &+ y(0) p(t) + y(T_s) p(t-T_s) \\ &+ y(+2T_s) p(t-2T_s) + \dots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT_s) \cdot p(t-nT_s) \end{aligned}$$

berechnet werden. Damit das Ergebnis möglichst allgemeingültig ist, verwendet man am besten eine Pulsfunktion $p(t)$ in Form des sogenannten Impulses $\delta(t)$ (Diracimpuls, Diracstoss) (Lit. 3, 4, 5).

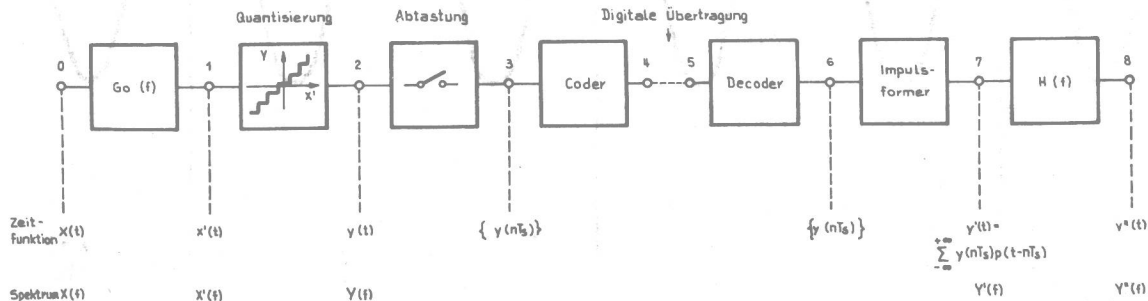
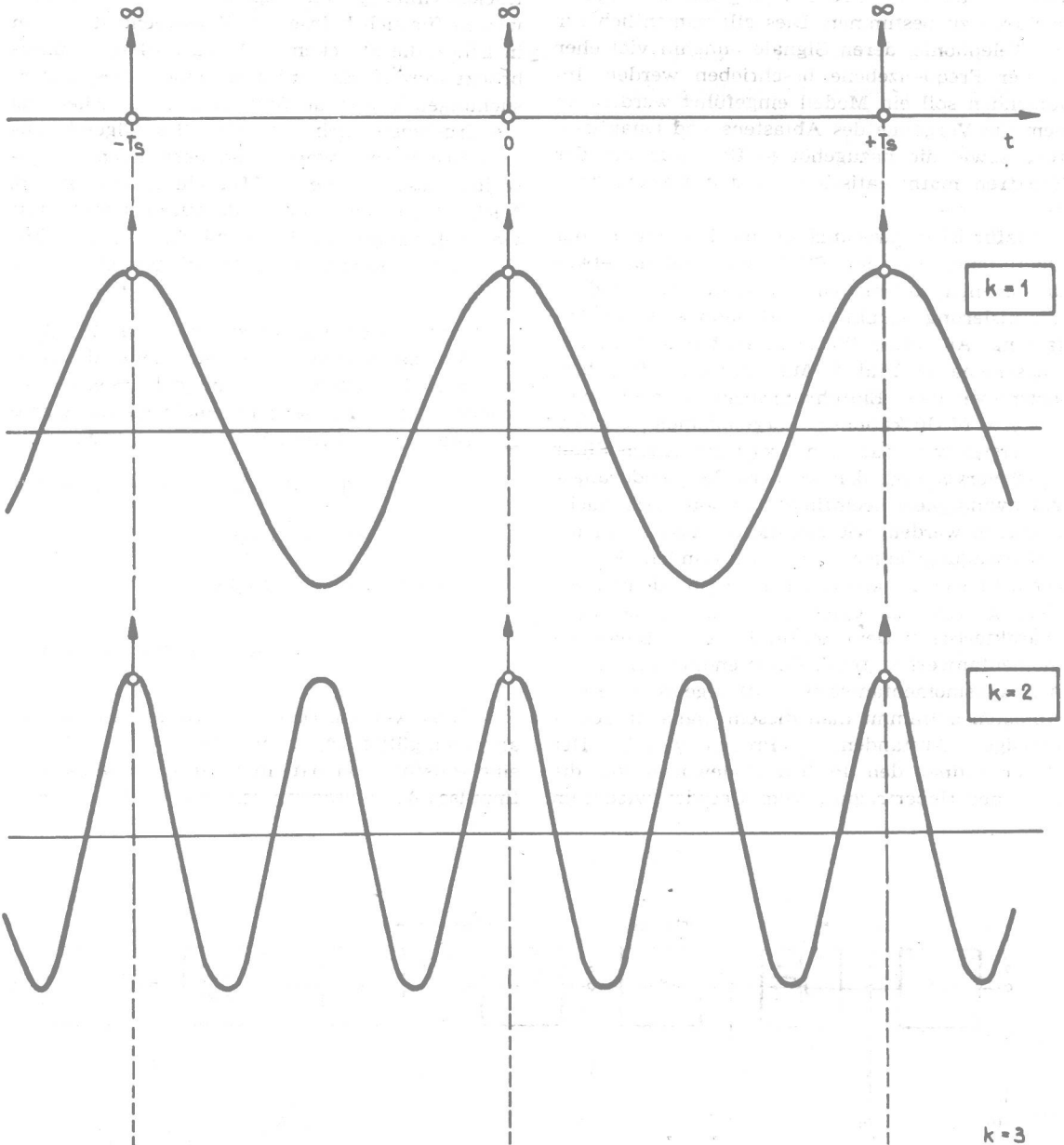
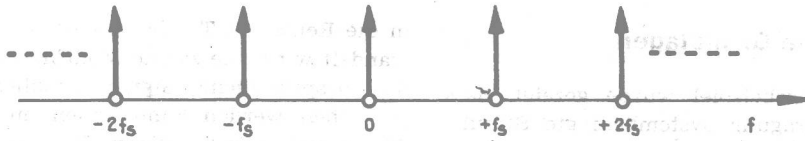


Bild 4. Ersatzschema für die PCM-Uebertragung.

Bild 5.



$k=3$
etc.

Bild 6.

2.1.1. Impulsfunktion $\delta(t)$ und Impulsreihen

Es wurde vorweggenommen, dass man zweckmässigerweise die Abtastwerte $y(nT_s)$ einer Pulsfolge aufmoduliert. Die unmodulierte Pulsfolge

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT_s)$$

selbst ist periodisch, so dass sich dafür eine Fourierreihe ansetzen lässt. Es soll nun eine bestimmte derartige Reihe untersucht werden, in der alle Harmonischen gleich gross sind. Der Ansatz dafür lautet:

$$\begin{aligned} p_\delta(t) &= \dots + \exp(-2 \cdot 2\pi j f_s t) + \exp(-2\pi j f_s t) \\ &+ 1 + \exp(+2\pi j f_s t) + \exp(+2 \cdot 2\pi j f_s t) + \dots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(k \cdot 2\pi j f_s t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$p_\delta(t)$ besitzt das Linienspektrum in Bild 5.

$p_\delta(t)$ kann auch rein reell geschrieben werden.

$$\begin{aligned} p_\delta(t) &= 1 + 2 \cos 2\pi f_s t + 2 \cos 4\pi f_s t + 2 \cos 6\pi f_s t \\ &+ \dots = 1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \cos k 2\pi f_s t \end{aligned} \quad (2.2)$$

Welche Form hat nun $p_\delta(t)$? Offensichtlich nimmt $p_\delta(t)$ an den Stellen $f_s t = m$ (ganze Zahl) oder

$$t = \frac{m}{f_s} = m T_s$$

unendlich hohe Funktionswerte an, da sich hier alle Harmonischen «in Phase» addieren, wie dies in Bild 6 angedeutet wird.

Das Verhalten von $p_\delta(t)$ zwischen den Stellen mT_s ergibt sich aus Bild 7, bei dem die Reihe $p_\delta(t)$ nach dem n -ten Glied abgebrochen dargestellt ist:

$$p_{\delta n}(t) = 1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^n \cos k 2\pi f_s t \quad (2.3)$$

Es wird daraus deutlich, dass mit steigendem n in der unmittelbaren Umgebung der Zeitpunkte $t = mT_s$ eine Ueberlagerung der Harmonischen zu hohen Funktionswerten erfolgt, während in dazwischenliegenden Zeitabschnitten die Funktionswerte im Vergleich zum Spitzenwert immer kleiner werden. Lässt man n gegen unendlich gehen, so gilt offenbar:

$$p_\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq mT_s \\ \infty & \text{für } t = mT_s \end{cases} \quad (2.4)$$

Eine weitere Eigenschaft dieser Funktion lässt sich einfach herleiten. Integriert man über die Umgebung der Spitzenwerte mT_s , so erhält man trotz des unendlichen Funktionswertes ein endliches Resultat:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{+\frac{T_s}{2}} p_\delta(t) dt &= \int_{-\frac{T_s}{2}}^{+\frac{T_s}{2}} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos k 2\pi f_s t \right] dt \\ &= T_s + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k 2\pi f_s t}{k 2\pi f_s t} \Bigg|_{-\frac{T_s}{2}}^{+\frac{T_s}{2}} \\ &= T_s + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k \pi}{k \pi} = T_s \quad (\sin k \pi = 0!) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Der Anschluss an die vorher erwähnte Impulsfunktion $\delta(t)$ ergibt sich, indem man folgende Definition trifft:

$$\frac{1}{T_s} \cdot p_\delta(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_s) \quad (2.6)$$

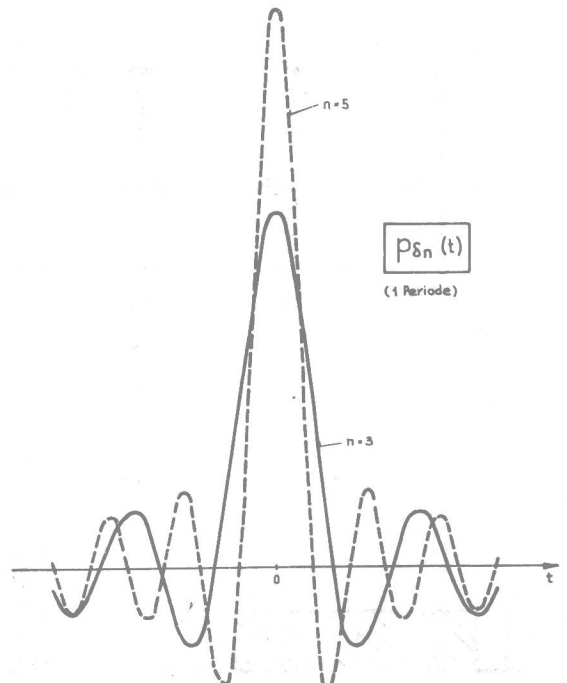


Bild 7.

Man betrachtet also

$$\frac{1}{T_s} p_\delta(t)$$

als eine unendliche Folge von je um T_s gegeneinander verschobenen δ -Impulsen (Bild 8).

Die der Gleichung (2.5) entsprechende Beziehung für $\delta(t)$ lautet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.7)$$

Das bedeutet, dass der Impuls $\delta(t)$ trotz unendlich kleiner Ausdehnung die endliche Fläche 1 umrandet. Er kann daher auch als Grenzwert eines immer schmaler werdenden Rechteckpulses konstanter Fläche betrachtet werden, wie Bild 9 zeigt.

Ohne strengen Beweis ist damit auch einleuchtend, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) f(t) dt = f(a) \quad (2.8)$$

Mit Hilfe des Impulses $\delta(t-a)$ wird einer beliebigen Funktion $f(t)$ an der Stelle $t=a$ die

Probe $f(a)$ entnommen. Wendet man ferner Gleichung (2.8) auf die Funktion $\exp(-j2\pi ft)$ an, so erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j2\pi ft) dt = 1 \quad (2.9)$$

Dies ist die Fouriertransformierte von $\delta(t)$! Also besitzt $\delta(t)$ ein weisses (konstantes) Spektrum, ähnlich wie vorher die periodische Impulsreihe

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-mT_s)$$

alles gleich grosse Harmonische aufwies (Bild 5). Umgekehrt gilt

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi ft) df \quad (2.10)$$

Diese Beziehung wird oft als Definition von $\delta(t)$ verwendet. Alle diese Eigenschaften machen Impulsfunktion und Impulsreihe zu einem ausserordentlich praktischen Werkzeug der Nachrichtentechnik. In Tabelle 1 findet man die wesentlichen Ergebnisse zusammengefasst.

Mit der Impulsfunktion $\delta(t)$ und der Impulsreihe $p_\delta(t)$ steht zwar ein mathematisch gutes

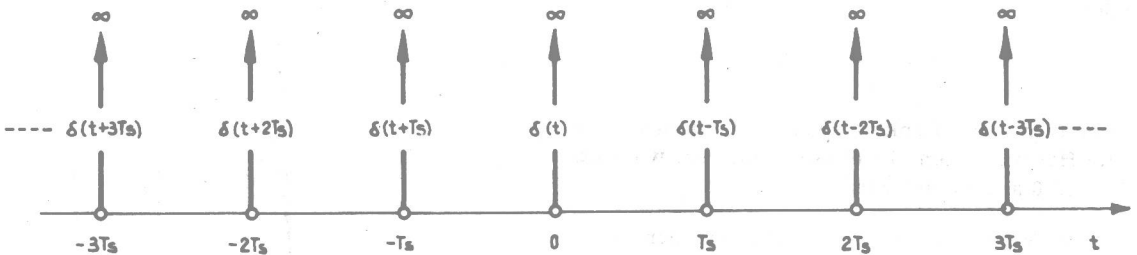


Bild 8.

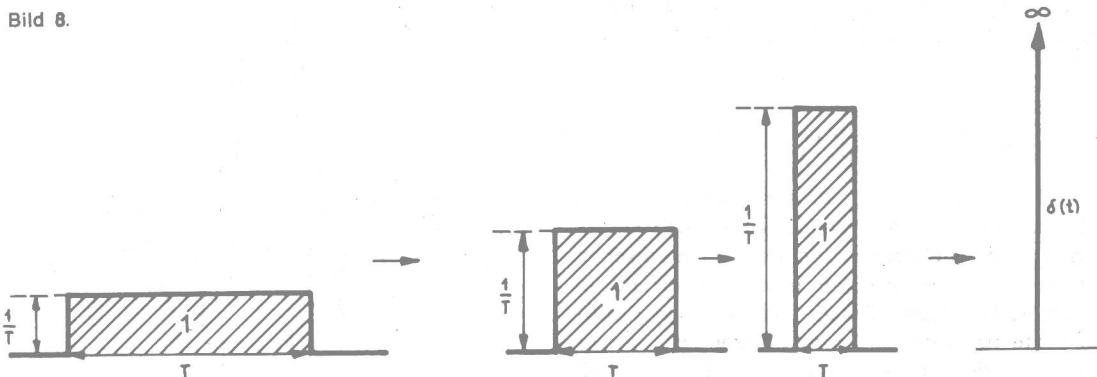
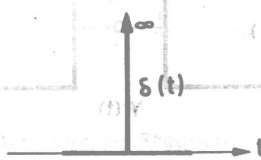


Bild 9.

Zeitfunktion

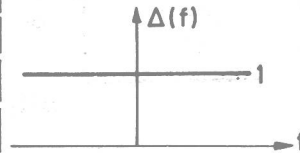
Impulsfunktion

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} df$$



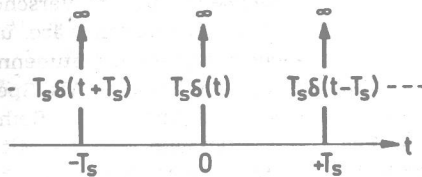
Spektrum

$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1$$

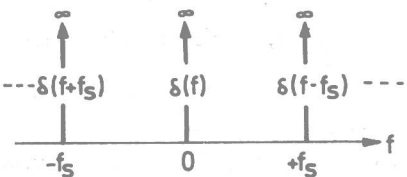


Impulsreihe

$$p_\delta(t) = T_s \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{kj2\pi f_s t}$$



$$P_\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_s)$$



Spezielle Eigenschaften

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \text{ ("Fläche")}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) f(t) dt = f(a)$$

$$\text{Einheit } \{\delta(x)\} = \frac{1}{\text{Einheit}\{x\}}$$

Tabelle 1: Impulsfunktion und Impulsreihe

Werkzeug zur Verfügung, doch stehen deren Eigenschaften mit den in der elektronischen Schaltungstechnik realisierbaren endlichen Pulsbreiten und endlichen Amplituden in Widerspruch. Nun lässt sich aber der fiktive unendlich hohe und schmale Diracimpuls leicht in eine beliebige Pulsform $p(t)$ umwandeln. Aus der Vierpoltheorie ist bekannt, dass bei einem linearen Filter das Spektrum der Ausgangsgröße als Produkt von Eingangsspektrum und Übertragungsfunktion erhalten wird. Der δ -Impuls besitzt das Spektrum $\Delta(f) = 1$; ein Filter mit der Übertragungsfunktion

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

liefert demnach an seinem Ausgang gerade den Puls $p(t)$ bei Anlegen eines Diracstosses am Eingang. Man kann also tatsächlich mit den bequemen δ -Impulsen rechnen, wenn man in Bild 4 das Filter $H(f)$ erweitert (Bild 10).

Man wird zunächst das fiktive Filter $H_0(f)$ bestimmen, worauf dann in einem zweiten Schritt

auf Grund des durch die tatsächliche Pulsform $p(t)$ gegebenen $P(f)$ das in Wirklichkeit notwendige Filter

$$H(f) = \frac{H_0(f)}{P(f)}$$

berechnet werden kann.

2.1.2. Das Spektrum amplitudenmodulierter Impulsfolgen

Vorerst wird als Eingangsfunktion $x(t) = x'(t) = y(t)$ eine harmonische Schwingung der Frequenz f_m betrachtet

$$y(t) = \cos 2\pi f_m t$$

$$= \frac{\exp(j2\pi f_m t)}{2} + \frac{\exp(-j2\pi f_m t)}{2} \quad (2.11)$$

Diese Wahl ist verständlich, denn die harmonische Schwingung bildet den Grundbaustein beim Darstellen von Signalen durch Fourier-

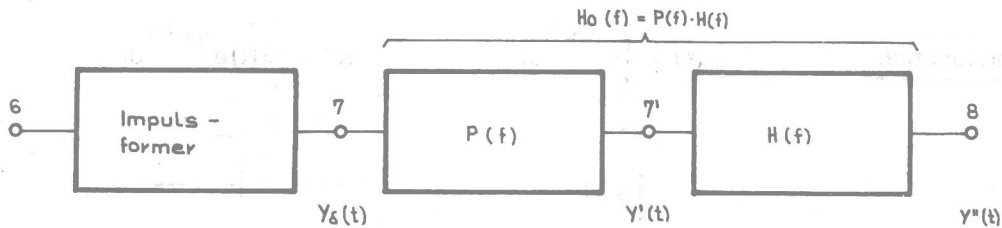


Bild 10.

reihen oder Fourierintegrale. Für das Spektrum von $y(t)$ erhält man

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j 2 \pi f t) [\exp(j 2 \pi f_m t) + \exp(-j 2 \pi f_m t)] \cdot \frac{1}{2} \cdot dt \quad (2.12)$$

Ein Vergleich mit Tabelle 1 zeigt, dass $Y(f)$ aus zwei Spektrallinien bei $f = +f_m$ beziehungsweise $f = -f_m$ besteht (Bild 11):

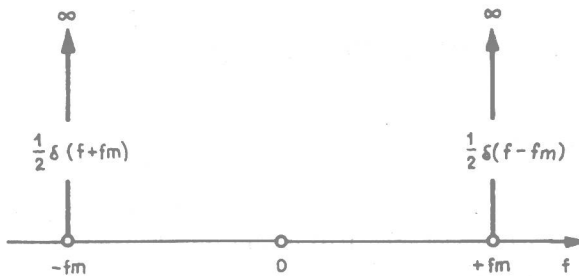


Bild 11.

$$Y(f) = \frac{1}{2} \delta(f - f_m) + \frac{1}{2} \delta(f + f_m) \quad (2.13)$$

Für das Signal

$$y(t) = \sin 2 \pi f_m t$$

$$= \frac{\exp(j 2 \pi f_m t)}{2j} - \frac{\exp(-j 2 \pi f_m t)}{2j}$$

hätten die beiden Linien ein verschiedenes Vorzeichen gehabt und wären imaginär gewesen.

Nach dem Impulsformer entsteht das Signal

$$y_\delta(t) = p_\delta(t) \cdot \cos 2 \pi f_m t \quad (2.14)$$

In diesem Fall lässt sich das Spektrum $Y_\delta(f)$ besonders leicht errechnen, wenn man für $p_\delta(t)$ direkt die Fourierreihe (2.1) oder (2.2) einsetzt:

$$y_\delta(t) = \cos 2 \pi f_m t [1 + 2 \cos 2 \pi f_s t + 2 \cos 4 \pi f_s t \dots] \quad (2.15)$$

Denselben Ausdruck hätte man erhalten, wenn die Schwingung $\cos 2 \pi f_m t$ unendlich vielen (gegenseitig um f_s verschobenen) Trägerwellen aufgeprägt worden wäre, und zwar in Form der Zweiseitenbandamplitudenmodulation mit unterdrücktem Träger! Als Spektrum erwartet man also eine unendliche Reihe von Seitenbändern um Vielfache von f_s . Mit Hilfe einer trigonometrischen Umformung erhält man tatsächlich

$$\begin{aligned} & + \cos 2 \pi (f_s - f_m) t + \cos 2 \pi (f_s + f_m) t \\ & + \cos 2 \pi (2 f_s - f_m) t + \cos 2 \pi (2 f_s + f_m) t \\ & + \cos 2 \pi (3 f_s - f_m) t + \cos 2 \pi (3 f_s + f_m) t \\ & \vdots \end{aligned} \quad (2.16)$$

Für eine einzelne harmonische Schwingung wurde das Spektrum mit (2.13) bestimmt. Nun kann man dieses Ergebnis gliedweise auf die unendliche Summe (2.16) für $y_\delta(t)$ anwenden und erhält dann (für den Fall $f_m < f_s/2$) wie erwartet das Linienspektrum in Bild 12.

Die beiden Linien der Schwingung $\cos 2 \pi f_m t$ findet man periodisch in Abständen von f_s als «Seitenbänder» fortgesetzt. Besonders interessant ist nun der Fall einer allmählichen Vergrößerung von f_m , wie das im Bild 13 dargestellt wird (unteres Seitenband gestrichelt). Man erkennt daraus, dass mit zunehmendem f_m immer wieder das ursprüngliche Linienbild entsteht, und zwar abwechselungsweise gespiegelt und wieder seitenrichtig. Es ist dies der stroboskopische Effekt. Beispielsweise entspricht der Abtastfrequenz die Bildwechselfrequenz eines Filmes: Ein Rad steht vermeintlich still, wenn seine Umdrehungszahl je Sekunde (f_m) gleich der Bildwechselfrequenz (f_s) ist; es scheint rückwärts zu drehen, wenn f_s um wenig grösser als f_m ist.