编著◎王万雄　史战红　刘彦平

生态学中的数学模型研究

——模糊数学方法与动力系统建模

兰州大学出版社

编著◎王万雄　史战红　刘彦平

生态学中的数学模型研究

——模糊数学方法与动力系统建模

蘭州大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

生态学中的数学模型研究:模糊数学方法与动力系统建模 / 王万雄,史战红,刘彦平编著. —兰州:兰州大学出版社,2013.9

ISBN 978-7-311-04254-7

Ⅰ.①生… Ⅱ.①王… ②史… ③刘… Ⅲ.①生态学—数学模型 Ⅳ.①Q14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 218247 号

责任编辑 张 萍
封面设计 李鹏远

书　　名 生态学中的数学模型研究
——模糊数学方法与动力系统建模
作　　者 王万雄 史战红 刘彦平 编著
出版发行 兰州大学出版社 (地址:兰州市天水南路 222 号 730000)
电　　话 0931-8912613(总编办公室) 0931-8617156(营销中心)
0931-8914298(读者服务部)
网　　址 http://www.onbook.com.cn
电子信箱 press@lzu.edu.cn
印　　刷 兰州瑞昌印务有限责任公司
开　　本 787 mm×1092 mm 1/16
印　　张 21.75
字　　数 496 千
版　　次 2013 年 9 月第 1 版
印　　次 2013 年 9 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-311-04254-7
定　　价 46.00 元

前 言

生态学（Ecology）一词，是德国动物学家海克尔于1866年提出的，他指出生态学是研究生物体与其周围环境（包括非生物环境和生物环境）相互关系的科学。

随着生态学研究范围向宏观和微观两个方面的拓展，生态学研究的方法正在发生新的变化。在宏观方面，除了需要利用一些能准确获取信息的手段，如遥感、地理信息系统和全球定位系统外，还需要强调应用数学模型方法来研究大尺度、多因素的大系统。在微观方面，则要求通过缩小研究对象的范围，利用实验的方法，在一个短暂的时间范围和确定的环境条件下进行研究，力图对生物与环境相互作用的机理得出严格的结论并进而进行调控。

进入21世纪，生态学不仅在理论和方法方面，而且在研究对象的范畴、规模和尺度方面，都有了自己的创新和发展。目前，生态学已经形成了许多成熟的学科分支：①按所研究的生物类别分，有微生物生态学、植物生态学、动物生态学、人类生态学、民族生态学等；还可细分，如昆虫生态学、鱼类生态学等。②按生物系统的结构层次分，有个体生态学、种群生态学、群落生态学、生态系统生态学等。③按生物栖居的环境类别分，有陆地生态学和水域生态学，前者又可分为森林生态学、草原生态学、荒漠生态学等，后者可分为海洋生态学、湖沼生态学、河流生态学等；还有更细的划分，如植物根际生态学、肠道生态学等。④生态学与非生命科学相结合，有数学生态学、化学生态学、物理生态学、地理生态学、经济生态学等；与生命科学其他分支相结合，有生理生态学、行为生态学、遗传生态学、进化生态学、古生态学等。⑤应用性分支学科有农业生态学、医学生态学、工业资源生态学、污染生态学（环境保护生态学）、城市生态学等。

把生态学的基础理论与定量的测定方法和建模技术以及系统分析等方法相结合，用以解决自然界和社会面临的一些迫切问题，是目前生态学的一个崭新分支，并日益展现出蓬勃的生机。早在20世纪40年代，就有人应用数学概念和技术整理了生态实验和观察的经验数据，如在物种散布和生态位填充、岛屿地理学和地理生态学以及在营养动态和食物链研究等方面做出了贡献。长期以来，人们一直试图通过将数学模型和生态学相结合的途径，达到利用数学方法定量地研究和解决生态学问题的目的，从而对生物和环境有进一步的定量了解。

由于在现实的生态学概念中往往存在许多模糊概念，诸如清洁与污染、脊椎动物与无脊椎动物、生物与非生物等这样一些对立的概念之间，都没有绝对分明的界限。而且，在多变量、非线性、时变的生态系统中，复杂性与精确性形成了尖锐的矛盾。模糊数学的创始人扎德教授从实践中总结出这样一条互克性原理："当系统的复杂性日趋增长时，我们对

系统特性做出精确和有意义性描述的能力将相应降低，直至达到这样一个阈值，一旦超过它，精确性和有意义性将变成两个几乎互相排斥的特性。”这就是说，复杂程度越高，有意义的精确化能力便越低。复杂性意味着因素众多，时变性大，其中某些因素及其变化是人们难以精确掌握的，而且人们又常常不可能对全部因素和过程都进行精确的考察，而只能抓住其中的主要部分，忽略掉所谓的次要部分。这样，在事实上就给系统的描述带来了模糊性。因此，很有必要利用模糊数学的方法处理一些生态学问题。

本书主要涉及生态学中的模糊数学建模方法和动力系统建模两方面，全面阐述了模糊集的基本理论以及在生态学建模中的应用，同时介绍了生态学中的动力系统建模方法。通过本书的学习，可以了解和掌握模糊数学和动力系统的基础知识，并了解模糊数学和动力系统在生态学中的应用。

本书由三人合著，共 15 章，其中第 1 章至第 5 章由史战红编写，第 6 章至第 12 章由王万雄编写，第 13 章至第 15 章由刘彦平编写。

本书是作者在多年教学和科研工作及借鉴前人工作的基础上编著而成的，其中也包括作者的一些最新研究成果。

本书内容新颖丰富、层次分明、由浅入深，实用性和指导性强。

本书可作为模糊数学、数学生态学、生物数学等专业高年级本科生和研究生的参考教材，也可作为相关专业的教师、科技工作者的参考书。

本书得到了国家支撑计划项目（批准号：2007BAD88B07）和甘肃省自然基金项目（批准号：1208RJZA186）的资助，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中难免有疏漏之处，望广大读者批评指正。

编　者

2013 年 3 月

目 录

第 1 章　模糊集合及其运算

在人类社会和各个科学领域中，人们所遇到的各种量大体上可以分成两大类：确定的和不确定的，而不确定性又可分为随机性和模糊性。本章介绍模糊数学的基本概念以及在生态学中的应用。

现实生活中，人们对一些系统、一些事物的认识往往不只是“非此即彼”，而是“亦此亦彼”，诸如空气质量的好坏，生活中的年轻与年老、高个子与矮个子、薄与厚、长与短，以及农业中的丰收与减产等。这些现象及其概念严格来说，均无绝对的边界，称为模糊概念(或现象)。这些模糊的概念很难用经典数学来描述，但它们在人们头脑中的确是有标准的。当代科技发展的趋势之一，就是各个学科领域都要求定量化、数学化，当然也要求将这种模糊概念(或现象)定量化，这就促使人们必须寻找一种研究和处理模糊概念(或现象)的数学方法。1965 年，美国加利福尼亚大学控制论专家扎德(L. A. Zadeh)教授发表的论文《模糊集合》，标志着模糊数学的诞生。

经典数学是以精确性为特征的，而与精确性相悖的模糊性并不是完全消极的或没有价值的。可以说，有时模糊性比精确性还要好。如：要你去火车站接一个“大胡子、高个子、长头发、戴宽边黑色眼镜的中年男人”，尽管这里只提供了一个精确信息——男人，而其他信息——大胡子、高个子、长头发、宽边黑色眼镜、中年等——都是模糊概念，但是，你将这些模糊概念经过头脑的综合分析判断，就可以找到这个人。如果这个问题用计算机精确处理的话，就要求将此人的准确年龄与身高，胡子、头发的准确长度与根数，眼镜的边宽数值以及黑色的程度等全部输入电脑，才可以找到这个人。如果此人的头发在中途掉了一根的话，计算机就可能找不到这个人。由此可见，有时太精确未必是一件好事。

模糊数学绝不是把数学变成模模糊糊的东西，它也具有数学的共性：条理分明，即使描述模糊概念，也会描述得清清楚楚。模糊集合论的提出虽然较晚，但目前在各个领域的应用十分广泛。实践证明，模糊数学在农业中主要用于病虫测报、种植区划、品种选育等方面，在图像识别、天气预报、地质地震、交通运输、医疗诊断、信息控制、人工智能等诸多领域的应用也已初见成效。从该学科的发展趋势来看，它具有极其强大的生命力和渗透力。

1.1 经典集合

1.1.1 经典集合

集合是现代数学中最基本的概念，集合论是基于二值逻辑的数学的基石。具有某一特征的对象全体称为集合，我们也称为经典集合，常用大写英文字母$A,B,C\cdots$表示。集合内的每个对象称为集合的元素，常用小写字母$x,y,z\cdots$表示。不含任何元素的集合称为空集，记为ϕ。只含有限个元素的集合称为有限集，有限集所含元素的个数称为集合的基数。包含无限个元素的集合称为无限集。所谓论域是指所讨论对象的全体，也称为全集，以下用大写英文字母U表示。

集合的表示法主要有两种：

(1)枚举法：如果一个集合包含的元素是有限个，则该集合叫作有限集。有限集可用枚举法表示。如：松树={红松，白皮松，樟子松，马尾松，花旗松，黑松}。

(2)描述法：如果一个集合包含的元素是无限多个，则该集合叫作无限集。无限集可用集合中元素的共性来表示，使$P(x)$成立的一切x组成的集合可表示为$\{x\mid P(x)\}$。如实数集可表示为$A=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$。当然，描述法也可以表示有限集，如$B=\{x\mid x^2-1=0\}$实际上是由元素-1与1组成的集合。

1.1.2 经典集合的关系与运算

集合间的关系有：

包含 $A\subseteq B$:对任意$x\in A$都有$x\in B$，并称A为B的子集(若$A\subseteq B$，但$A\neq B$，则称A为B的真子集，记为$A\subset B$)；

相等 $A=B$: $A\subseteq B$且$B\subseteq A$。

集合的运算有：

并运算 $A\cup B=\{x\mid x\in A或x\in B\}$；

交运算 $A\cap B=\{x\mid x\in A且x\in B\}$，也记为$AB$；

差运算 $A-B=\{x\mid x\in A,x\notin B\}$；

余运算 $A^c=\{x\mid x\notin A,x\in U\}$。

此外，集合的运算满足如下运算规律：

幂等律 $A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

吸收律　$(A \cap B) \cup B = B$，$(A \cup B) \cap B = B$；

两极律　$A \cup U = U$，$A \cap U = A$，$A \cup \phi = A$，$A \cap \phi = \phi$；

还原律　$(A^c)^c = A$；

互补律　$A \cup A^c = U$，$A \cap A^c = \phi$；

De-Morgan 律　$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$。

在传统的经典数学中，元素对某一个集合的关系只有两种可能：对一普通集合 A，任一元素 x，要么 $x \in A$，要么 $x \notin A$，二者必具其一。这一特征可用集合的特征函数(图 1-1)表示为：

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A, \\ 1, & x \in A。 \end{cases}$$

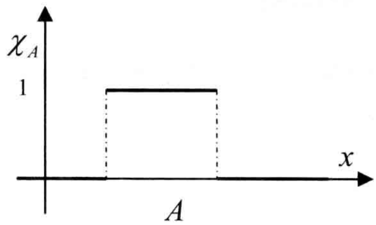

图 1-1 特征函数

引入特征函数的好处是可以将集合转化为函数，
特征函数和集合之间有如下关系：

(1) $A = U \Leftrightarrow \chi_A(x) = 1$，$A = \phi \Leftrightarrow \chi_A(x) = 0$，$\forall x \in U$；

(2) $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leqslant \chi_B(x)$，$\forall x \in U$；

(3) $A = B \Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x)$，$\forall x \in U$；

(4) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x)$，$\forall x \in U$；

(5) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x)$，$\forall x \in U$；

(6) $\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x)$，$\forall x \in U$。

这里 $\vee$、$\wedge$ 分别表示 sup 及 inf(取上、下确界)，在有限个成员之间，它们表示 max 及 min(取最大、最小值)。

例 1-1　$A = [1,4]$，$B = [2,5]$，则

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1,4], \\ 0, & x \notin [1,4], \end{cases} \qquad \chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in [2,5], \\ 0, & x \notin [2,5], \end{cases}$$

$$\max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \begin{cases} 1, & x \in [1,5], \\ 0, & x \notin [1,5], \end{cases}$$

而 $A \cup B = [1,5]$，又 $\chi_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1,5], \\ 0, & x \notin [1,5], \end{cases}$ 可见

$$\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}。$$

集合论提供了数学研究的普遍工具，每一个数学概念都反映了具有特殊性质的对象的集合，每一个判断都反映了集合之间的某种关系，每一步数学推理都反映了集合之间的某种运算。集合可以表述概念，一个概念有它的内涵和外延。符合某概念的对象的全体构成此概念的外延，一个概念所包含的那些区别于其他概念的全体本质属性就是这一概念的内涵。如

“人”这个概念的外延就是世界上所有人的全体，而内涵就是区别于其他动物的那些本质属性的全体，如“会说话”、“会思维”、“会使用劳动工具”等。从集合论的观点来看，一个概念的外延就是一个集合。

1.2 模糊集合

1.2.1 模糊子集

经典集合确切地、数量化地描述了“非此即彼”的现象。由于经典集合的特征函数又可表示为映射的形式

$$\chi_A : U \to \{0,1\},$$
$$x \mapsto \chi_A(x) \in \{0,1\}。$$

其中 $x \in U$ 的像 $\chi_A(x)$ 就是 χ 对于集合 A 的特征函数值。当 $x \in A$ 时，$\chi_A(x) = 1$；当 $x \notin A$ 时，$\chi_A(x) = 0$。用特征函数表示集合，恰好体现了清晰概念“非此即彼”的特征。

但现实世界中的现象并非完全具有“非此即彼”的特点，而往往体现为“亦此亦彼”。比如，在生物学发展的历史上，曾把所有生物分为动物和植物两大类。但有一些生物如猪笼草、捕蝇草、茅膏菜等，一方面能捕食昆虫，分泌液体消化昆虫，像动物一样；另一方面又长有叶片，能进行光合作用，像植物一样。类似这样的生物并不完全是“非动物即植物”，因此，不能简单地一刀切。可见在动物和植物之间存在“中介状态”。为了描述这种“中介状态”，必须把元素对集合的绝对隶属关系(要么属于 A，要么不属于 A)扩展为一定程度上的隶属关系，这就需要将经典集合 A 的特征函数 $\chi_A(x)$ 的值域 $\{0,1\}$ 推广到闭区间 $[0,1]$ 上，从而将经典集合推广到模糊集合。美国控制论专家 Zadeh 教授 1965 年提出了如下模糊集的概念(模糊集常用 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \cdots$ 来表示，有时也用 $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}, \cdots$ 来表示，但在不引起混淆的前提下，以下仍用 $A, B, C \cdots$ 表示模糊集)：

定义 1-1 设 U 是论域，称映射

$$\mu_A : U \to [0,1],$$
$$x \mapsto \mu_A(x) \in [0,1]。$$

确定了一个 U 上的模糊子集 A。映射 μ_A 称为 A 的隶属函数，$\mu_A(x)$ 称为 x 对 A 的隶属程度。人们常将模糊集 A 的隶属函数 $\mu_A(x)$ 的图形画成如图 1-2 所示的曲线形状。当 μ_A 的值域为 $\{0,1\}$ 时，模糊子集 A 就变成了经典子集，而 μ_A 就是它的特征函数。可见，经典子集是模糊子集的特殊情形，而模糊子集则是经典子集概念的一般化。

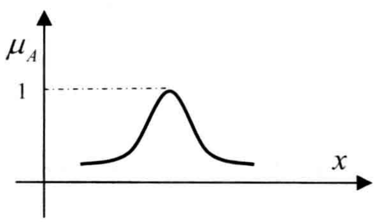

图 1-2 隶属函数

为简便起见，以下用 $A(x)$ 来代替 $\mu_A(x)$。模糊子集也简称为模糊集，隶属程度简称为隶

属度。

表示论域U上的一个模糊子集，原则上只需将每个元素$x \in U$赋予该元素对模糊子集A的隶属度$\mu_A(x)$，然后将它们用一定的形式构造在一起即可。模糊集的表示一般有三种形式：扎德表示法、序偶表示法、向量表示法。

(1)扎德表示法：设有限论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，其上的任一模糊集A可以表示为

$$A=\frac{A(x_1)}{x_1}+\frac{A(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{A(x_n)}{x_n},$$

这里“+”不表示求和，只是一种记号，分式$\dfrac{A(x_i)}{x_i}$也不表示分数，只表示点x_i对模糊集A的隶属度为$A(x_i)$；

(2)序偶表示法：$A=\{(x_1,A(x_1)),(x_2,A(x_2)),\cdots,(x_n,A(x_n)\}$；

(3)向量表示法：$A=(A(x_1),A(x_2),\cdots,A(x_n))$。

例 1-2 设

$$U=\{x_1(200\text{kg}),x_2(300\text{kg}),x_3(400\text{kg}),x_4(500\text{kg}),x_5(600\text{kg}),x_6(700\text{kg})\}$$

为六个地区的水稻亩产量，$A=$“高产”为U上的一个模糊集，如果

$$x_1 \mapsto A(x_1)=0; x_2 \mapsto A(x_2)=0.2; x_3 \mapsto A(x_3)=0.4;$$
$$x_4 \mapsto A(x_4)=0.5; x_5 \mapsto A(x_5)=0.8; x_6 \mapsto A(x_6)=1。$$

则模糊集A可表示为：

$$A=\frac{0}{x_1}+\frac{0.2}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.5}{x_4}+\frac{0.8}{x_5}+\frac{1}{x_6}=\frac{0.2}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.5}{x_4}+\frac{0.8}{x_5}+\frac{1}{x_6},$$

或者A也可表示为：

$$A=(0,0.2,0.4,0.5,0.8,1)。$$

例 1-3 $U=[0,200]$(单位：岁)表示人的年龄，扎德给出“年轻”(Y)与“年老”(Q)两个模糊集，其隶属函数分别为(函数图像见图 1-3)：

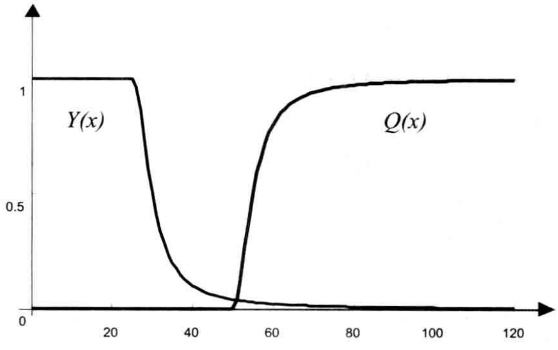

图 1-3 “年轻”与“年老”的隶属函数

$$Y(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 25,\\ [1+(\frac{x-25}{5})^2]^{-1}, & 25<x\leqslant 200,\end{cases}$$

$$Q(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ [1+(\frac{x-50}{5})^{-2}]^{-1}, & 50<x\leqslant 200。\end{cases}$$

可以算出：$Y(30)=0.5, Y(35)=0.2, Q(55)=0.5, Q(60)=0.8$。这表明，30 岁的年龄属于“年轻”的隶属度为 0.5，并称点 $x=30$ 是“年轻”的过渡点；55 岁的年龄属于“年老”的隶属度为 0.5，并称点 $x=55$ 是“年老”的过渡点。

例 1-4 设 $U=\{自然数\}$，则

$$A=\frac{0.1}{7}+\frac{0.5}{8}+\frac{0.8}{9}+\frac{1}{10}+\frac{0.8}{11}+\frac{0.5}{12}+\frac{0.1}{13}$$

表示 U 上的模糊集“近似于 10”。

注意 经典集合也可以用扎德表示法表示。例如，论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 可以表示为

$$U=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n},$$

这表明 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 绝对地属于 U，即 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 对 U 的隶属度为 1。

1.2.2 模糊集合的运算

由于模糊集合中没有点与集合之间的绝对属于关系，所以其运算只能以隶属函数间的关系来确定。两模糊集合间的运算，实际上就是逐点地对隶属度做相应的运算。目前，一般情况下仍采用如下扎德的定义：

定义 1-2 设 A 和 B 为论域 U 上的两个模糊集，则 A 和 B 之间的运算关系分别为

(1)**包含**：$A\subseteq B \Leftrightarrow A(x)\leqslant B(x), \forall x\in U$;

(2)**相等**：$A=B \Leftrightarrow A(x)=B(x), \forall x\in U$;

(3)**并**：$(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x), \forall x\in U$;

(4)**交**：$(A\cap B)(x)=A(x)\wedge B(x), \forall x\in U$;

(5)**余**：$A^c(x)=1-A(x), \forall x\in U$。

例 1-5 设论域 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，A 和 B 为 U 上的两个模糊集，而且

$$A=\frac{0.3}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0.7}{x_3}+\frac{0.4}{x_4},\quad B=\frac{0.5}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{0.8}{x_3},$$

则：

$$A^c=\frac{0.7}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0.3}{x_3}+\frac{0.6}{x_4},\quad B^c=\frac{0.5}{x_1}+\frac{0.2}{x_2}+\frac{1}{x_3},$$

$$A\cup B=\frac{0.5}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{0.8}{x_3}+\frac{0.4}{x_4},\quad A\cap B=\frac{0.3}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0.7}{x_3}+\frac{0}{x_4}。$$

例 1-6 设论域 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ (商品集)，在 U 上定义两个模糊集：$A=$“商品质量

好”，$B=$“商品质量差”，而且

$$A=(0.80,0.55,0.00,0.30,1.00),$$
$$B=(0.10,0.21,0.86,0.60,0.00),$$

则“商品质量不好”的模糊集为

$$A^c=(0.20,0.45,1.00,0.70,0.00),$$

值得注意的是 $A^c \neq B$，即“商品质量不好”并不等同于“商品质量差”，也即模糊集不再具有“非此即彼”的特点，这正是模糊性带来的本质特征。

此外，容易算得

$$A \cup A^c=(0.80,0.55,1.00,0.70,1.00),$$

由此可知 $A \cup A^c \neq U$，同样 $A \cap A^c \neq \phi$。

注意 模糊集保留了经典集合的许多运算规律，但与经典集合相比又有一些根本性区别。例 1-6 说明，在模糊集里互补律不再成立。

类似于经典集合，模糊集的并、交、余运算具有如下性质：

定理 1-1　设 A,B,C 为论域 U 上的模糊集，则：

(1)**幂等律**　$A \cup A=A$，$A \cap A=A$；

(2)**交换律**　$A \cup B=B \cup A$，$A \cap B=B \cap A$；

(3)**结合律**　$(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$；

(4)**分配律**　$A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$，

$A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$；

(5)**吸收律**　$(A \cap B) \cup B=B$，$(A \cup B) \cap B=B$；

(6)**0-1 律**　$A \cup U=U$，$A \cap U=A$，$A \cup \phi=A$，$A \cap \phi=\phi$；

(7)**还原律**　$(A^c)^c=A$；

(8)**对偶律**　$(A \cup B)^c=A^c \cap B^c$，$(A \cap B)^c=A^c \cup B^c$。

证　仅以对偶律为例，对 $\forall x \in U$，有

$$\begin{aligned}(A \cup B)^c(x) &= 1-(A \cup B)(x)\\ &= 1-(A(x) \vee B(x))\\ &= (1-A(x)) \wedge (1-B(x))\\ &= A^c(x) \wedge B^c(x)\\ &= (A^c \cap B^c)(x),\end{aligned}$$

由定义 1-2 知 $(A \cup B)^c=A^c \cap B^c$；类似地，可以证明 $(A \cap B)^c=A^c \cup B^c$。

1.3　λ-截集

模糊集合能如实地反映客观存在的模糊概念，但当最后要做出判断或决策时，往往又需要将模糊集合变成各种不同的经典集合。如：有某一批产品(作为论域)，经过检验，每个产

品都有一个从 0 到 1 的质量等级标志，从而构成了论域上的一个模糊子集。如果想要从中将合格产品分离出来，就必须制定一个合格标准，也就是确定一个等级标志 $\lambda\in[0,1]$。规定凡质量等级标志不小于 λ 的认为是合格产品，并且赋予这部分产品的质量标志为 1，其他不合格产品的质量标志一律赋予 0，于是就从模糊集合中分离出所需要的一个经典集合。这就是 λ-截集的实际背景。

定义 1-3 设 A 为论域 U 上的模糊集，对 $\forall\lambda\in[0,1]$，

$$A_\lambda=\{x\,|\,A(x)\geqslant\lambda\}$$

称为 A 的 λ-截集，其中 λ 称为阈值或置信水平。

模糊集 A 的 λ-截集是一个经典集合，由论域中相对于模糊集 A 的隶属度不小于 λ 的元素所构成。λ-截集是模糊集与经典集合相互联系和转化的一种方法。根据不同的 λ 值，由原模糊集 A 可得若干个经典集合。λ 值越小，A_λ 包含的元素就越多；λ 值越大，A_λ 包含的元素则越少。这种按 λ 值筛选元素组成新集合的过程，实际上是一种分类过程，随着 λ 值的不同，可以得到一系列的分类。

例 1-7 设论域 $U=\{x_1,x_2,\ldots,x_6\}$，$x_i(i=1,2,\cdots,6)$ 表示学生，这 6 名学生某门功课的成绩分别为 60，70，80，85，90，95。考虑模糊集 A = “成绩好的学生”，则模糊集 A 可表示为：

$$A=\frac{0.6}{x_1}+\frac{0.7}{x_2}+\frac{0.8}{x_3}+\frac{0.85}{x_4}+\frac{0.9}{x_5}+\frac{0.95}{x_6},$$

要确定“成绩好的学生”实际上就是要将模糊集合转化为经典集合，即先确定一个阈值 λ，然后将隶属度大于等于 λ 的元素找出来。如取 $\lambda=0.8$，则 $A_\lambda=\{x_3,x_4,x_5,x_6\}$，它表示成绩高于 80 分的同学；如取 $\lambda=0.9$，则 $A_\lambda=\{x_5,x_6\}$，它表示成绩高于 90 分的同学。

例 1-8 对 5 座城市 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 的空气污染状况进行监测，监测数据显示，这 5 座城市的空气污染程度分别为 1,0.8,0.4,0.2,0.1，这样确定了如下一个模糊子集 A = “空气受污染”：

$$A=\frac{1}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.2}{x_4}+\frac{0.1}{x_5},$$

试问这 5 座城市中，哪些属于重污染？

要判断哪些城市属于重污染，实际上就是要先确定一个重污染的标准，如果取 $\lambda=0.8$，则 $A_\lambda=\{x_1,x_2\}$，此时认为 x_1,x_2 属于重污染，因为这两座城市的污染程度大于等于 0.8。

例 1-9 自然界是由生物和非生物组成的，一切具有生命、能表现出各种生命现象如新陈代谢、生长发育和繁殖、感应性和适应性、遗传变异等的都是生物。自古以来，人类把生物划分为动物和植物两大类，记 A = “动物”，B = “植物”，在自然界中取一些生物构成论域 U ={ x_1 (牛), x_2 (羊), x_3 (水稻), x_4 (小麦), x_5 (海绵), x_6 (海葵), x_7 (粘菌), x_8 (衣藻), x_9 (眼虫藻), x_{10} (小麦杆病菌), x_{11} (稻瘟病菌), x_{12} (蘑菇), x_{13} (木耳)}，则

$$A=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{0}{x_3}+\frac{0}{x_4}+\frac{0.9}{x_5}+\frac{0.9}{x_6}+\frac{0.5}{x_7}+\frac{0.5}{x_8}+\frac{0.5}{x_9}+\frac{0.2}{x_{10}}+\frac{0.2}{x_{11}}+\frac{0.1}{x_{12}}+\frac{0.1}{x_{13}},$$

$$B=\frac{0}{x_1}+\frac{0}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{0.1}{x_5}+\frac{0.1}{x_6}+\frac{0.5}{x_7}+\frac{0.5}{x_8}+\frac{0.5}{x_9}+\frac{0.7}{x_{10}}+\frac{0.7}{x_{11}}+\frac{0.8}{x_{12}}+\frac{0.8}{x_{13}}。$$

上述两式的意义是：x_1(牛)、x_2(羊)绝对地属于A，x_3(水稻)、x_4(小麦) 绝对地属于B，x_7(粘菌)、x_8(衣藻)、x_9(眼虫藻)属于A(或B)的程度为0.5,这表明x_7，x_8，x_9最具模糊性，它们既不能划归动物也不能划归植物，其实它们就是微生物。

如令$\lambda=0.8$，则

$$A_{0.8}=\{x_1,x_2,x_5,x_6\},$$
$$B_{0.8}=\{x_3,x_4,x_{12},x_{13}\},$$

$A_{0.8}$表示在水平$\lambda=0.8$之下的一类动物,它们的性状是比较接近的(其性状是八分像的);$B_{0.8}$表示在水平$\lambda=0.8$之下的一类植物，它们的性状也是比较接近的(或也称其性状是八分像的)。

定理 1-2　(分解定理)设论域U上的全体模糊子集组成的集合记为$F(U)$，称为模糊幂集。对任意的$A\in F(U)$，有$A=\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda$。

证明　(略，详细证明过程可参见文献[1,2])

分解定理表明，一个模糊集可以分解为无数个模糊子集λA_λ的并集，而每一个模糊子集λA_λ又可以通过A_λ得到，因此λ-截集和分解定理是联系模糊子集与普通子集之间的桥梁。通过分解定理，任何模糊集的问题，都可以通过经典集合的方法来处理。反过来，也可以将经典集合的方法扩张到模糊集中，这就是如下扎德给出的扩张原理：

定义 1-4　(扩张原理)设映射$f:U\to V$，称映射

$$f:F(U)\to F(V),$$
$$A\mapsto f(A),$$

为由映射f扩张的模糊变换，其隶属函数为$f(A)(v)=\bigvee\limits_{f(u)=v}A(u)$，称映射

$$f^{-1}:F(V)\to F(U),$$
$$B\mapsto f^{-1}(B),$$

为由映射f扩张的反向模糊变换，其隶属函数为$f^{-1}(B)(u)=B(f(u))$，并称$f(A)$为A的像，称$f^{-1}(B)$为B的原像。

1.4　隶属函数的确定

论域U上的模糊子集A实质上是$U\to[0,1]$的函数，所以实际中处理模糊现象的首要任务是确定隶属函数$A(x)$。模糊数学的一切运算及具体应用，都是在隶属函数的基础上展开的。模糊集合论和概率论处理的都是不确定性现象，但是这两种不确定性却有本质的区别。在概率论中，事件是明确的，只是由于条件不充分，使得在一定的条件下，事件的出现与否表现出不确定性，这种不确定性体现为随机性，概率论正是从随机性中去把握和寻求概率规律，说明大量的偶然性背后隐藏着必然性。而模糊集合研究和处理的是模糊现象，它是由于概念外延的模糊而难以确定，一个对象是否符合这个概念而呈现出不确定性即模糊性，模糊