JIANMO FANGFALUN

SHUXUE

数学建模方法论

主 编 段克峰

蘭州大學出版社

陇东学院教材学术著作基金资助出版

JIANMO FANGFALUN

SHUXUE

数学建模方法论

主　编　段克峰
副主编　许万银
编　者　赵慧霞　杨大勇

兰州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学建模方法论 / 段克峰主编. —兰州:兰州大学出版社,2013.8

ISBN 978-7-311-04232-5

Ⅰ.①数… Ⅱ.①段… Ⅲ.①数学模型—研究 Ⅳ.①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 201278 号

策划编辑　梁建萍
责任编辑　郝可伟
封面设计　杨佩哲

书　　名　数学建模方法论
作　　者　段克峰　主编
出版发行　兰州大学出版社　(地址:兰州市天水南路 222 号　730000)
电　　话　0931-8912613(总编办公室)　0931-8617156(营销中心)
　　　　　0931-8914298(读者服务部)
网　　址　http://www.onbook.com.cn
电子信箱　press@lzu.edu.cn
印　　刷　兰州万易印务有限责任公司
开　　本　710 mm×1020 mm　1/16
印　　张　11.25
字　　数　197 千
版　　次　2013 年 8 月第 1 版
印　　次　2013 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-311-04232-5
定　　价　25.00 元

前　言

当今社会日趋数学化，正如数学家笛卡儿所言：“一切问题都可以化成数学问题。”高技术实则为一种数学技术。数学技术是指把现实的问题转述成一个相应的数学模型，且用计算机加以解决或用数学理论定性、定量地加以研究，得出那个现实问题的定量结论或重要性质。所谓数学模型，乃是现实世界当中某一类特殊的运动变化过程或关系或结构的一种模拟性的数学结构，是对现实模型的理想化，是一种科学的抽象。伟大的科学家约翰·冯·诺依曼(John von Neumann)云：“科学的目的不只是解释现象，科学的主要目的是建立数学模型。”但是，如何建立和解答纷纭复杂的实际问题的数学模型呢?

数学建模与其说是一门技术，不如说是一门艺术。与一门技术大致有章可循不同，艺术在某种意义下无法归纳出若干条普遍适用的准则或方法。尽管如此， 数学建模还是有一些比较常用的基本的技术手段和方法。

考虑到数学建模是一门内容活泼、信息量大、涉及数学多个分支的课程，在实际应用中，不但需要掌握相关数学分支的原理和方法，还要有实际问题的背景知识，无论是对从事数学建模教学的老师还是学生都是挑战。特别是培训参加数学建模竞赛学生的大学老师，由于教学科研任务繁重，希望能找到一本能在较少的课时内使学生掌握数学建模的主要内容和方法的教材；而参加数学建模竞赛的同学不但有正常的课程学习任务，还由于专业分布广泛，对有关的数学知识不可能也没必要钻得很深，也希望找到一本介绍数学知识适可而止，以实用为度的参考书。

鉴于以上原因，编者在多年从事 “数学模型”、“数学实验” 课程的教学和组织指导数学建模竞赛工作的基础上，阅读了大量的相关资料，总结了多年从事数学建模教学和研究工作的经验，编著了本书。

本书以众多典型的具体问题的分析解答，向读者介绍了建立数学模型的思路与方法、技巧。通过一些典型数学建模案例的分析，详细介绍了几种数学建模方法。

在建模过程中，不得不把那些对我们关心的问题影响甚微的因素忽略掉，不然，所建模型因为数学结构太复杂而失去数学上的可解性；但也不能把足够相关的因素忽略掉，不然所建模型因为不能足够准确地反映实际情况而失去可靠性。可解性与可靠性同时最佳是很罕见的，一般总是在可解性的前提下，力争有满意的可靠性。

同一个实际问题，可以建立不同的数学模型。事实上，被我们研究的现实问题好比一个“黑匣子”，要用各种方法从不同的角度去观察、探讨它的秘密。数学模型的建立需要有创造性、想象力甚至具有一定的艺术性，必须接受实践的检验，有时需要反复修正。

本书涉及的知识面较宽，除了线性代数、微积分、解析几何、图论、概率与数理统计、计算方法、运筹学外，还专门系统地介绍了微分方程和差分方程的理论知识与常用解法，这些内容不仅对数学建模起着重要作用，而且对相应课程的学习具有参考价值。

书中收录了作者近几年发表的一些学术论文。所有典型案例的主要计算和作图都使用了数学软件，使计算机软件的使用与数学模型的求解紧密结合起来。

本书由陇东学院数学与统计学院段克峰主编，陇东学院数学与统计学院许万银副主编，兰州文理学院赵慧霞以及陇东学院数学与统计学院杨大勇参加了编写工作。由于我们的水平有限，书中难免不妥之处，敬请批评指正。

编者

2013 年 3 月于陇东学院

目 录

第 1 章　建立数学模型

数学是研究现实世界数量关系和空间形式的科学。在它产生和发展的历史长河中，一直和人们生活的实际需要密切相关。作为用数学方法解决实际问题的第一步，数学建模自然有着与数学同样悠久的历史，两千多年以前创立的欧几里得几何，17 世纪发现的牛顿万有引力定律，都是科学发展史上数学建模的成功范例。20 世纪以来，随着数学以空前的广度和深度向一切领域渗透，以及电子计算机的出现与飞速发展，数学建模越来越受到人们的重视，并且许多高等学校都已开设数学建模这一门课程。目前，数学建模活动是实现大学数学教育改革目标的有效途径，它为大学的数学教学改革打开了一个突破口。

1.1　数学模型

1.1.1　原型与模型

原型与模型是一对对偶体，原型是指人们在现实世界里关心、研究或者从事生产、管理的实际对象。而模型是指为了某个特定目的将原型的某一部分信息简缩提炼而构造的原型替代物。模型不是原型，既简单于原型，又高于原型。例如，大家熟知的飞机模型，虽然在外观上比飞机原型简单，而且也不一定会飞，但是它很逼真，也足以让人想象飞机在飞行的过程中机翼的位置与形状的影响和作用；一座城市的交通图是该城市（原型）的模型，看模型比看原型清楚得多，此时城市的人口、道路、车辆、建筑物的形状等都不重要，但是，城市的街道、交通线路和各单位的位置等信息都一目了然，这比看原型清楚得多。模型可以分为形象模型和抽象模型，抽象模型最主要的就是数学模型。

1.1.2　数学模型

当一个数学结构作为某种形式语言（即包括常用符号、函数符号、谓词符号等

符号集合）解释时，这个数学结构就称为数学模型。换言之，数学模型可以描述为：对于现实世界的一个特定对象，为了一个特定的目标，根据特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构。也就是说，数学模型是针对某种事物系统，采用形式化的数学语言，概括地或近似地表达出来的用数学概念和符号刻画的一种数学结构。

数学模型并不是新的事物，自从有了数学，也就有了数学模型。即要用数学去解决实际问题，就一定要使用数学的语言、方法去近似地刻画这个实际问题，这就是数学模型。事实上，人所共知的欧几里得几何、微积分、柯西积分公式、万有引力定理、能量转换定理、广义相对论等都是非常好的数学模型。

一切数学概念、数学理论体系、公式与算法系统都可称为数学模型。

1.1.3 数学模型与数学

数学模型与数学是不完全相同的，主要体现在三个方面：

（1）研究内容

数学主要研究对象的共性和一般规律，而数学模型主要研究对象的个性（针对性）和特殊规律。

（2）研究方法

数学的主要研究方法是演绎推理，即按照一般原理考察特定的对象，导出结论。而数学模型的主要研究方法是归纳加演绎，归纳是依据个别现象推断一般规律。归纳是演绎的基础，演绎是归纳的指导。即数学模型是将现实对象的信息加以翻译、归纳的结果，经过求解、演绎，得到数学上的解答，再经过翻译回到现实对象，给出分析、预报、决策、控制的结果。

（3）研究结果

数学的研究结果被证明了就一定是正确的，而数学模型的研究结果被证明了未必一定正确，这是因为与模型的假设和简化有关，因此对数学模型的研究结果必须接受实际的检验。

然而，鉴于数学模型和数学的关系和区别，我们评价一个数学模型优劣的标准主要是：模型是否有一定的实际背景、假设是否合理、推理是否正确、方法是否简单、论述是否深刻等等。

1.2 数学模型的例子

目前，数学的应用已渗透到各个领域，或者说各行各业日益依赖于数学，在人们日常生活的各种活动中，数学无处不在。即在数学发展的进程中，无时无刻无不

留下数学模型的烙印，在数学应用的各个领域无处没有数学模型的身影。基于数学模型的广泛应用，我们现在可以说："数学模型无处不在。"人人都会接触到它。例如：生活中的养老保险问题、住房公积金问题、新技术的传播问题、传染病的流行问题、人口增长问题、减肥与增重问题等等。下面给出几个例子。

1.2.1　椅子放稳问题

1.问题的提出

在不十分平坦的地面上，一把四条腿的椅子能否放稳当？即椅子的四条腿能否同时着地？

2.问题假设

（1）地面连续（无台阶）；

（2）四条腿视为四个点（即看成四点着地）且一样长，可以连成正方形；

（3）任何时候三点着地（三点确定一个平面）。

3.模型建立

设四条腿 A、B、C、D 连成正方形 $ABCD$，O 为正方形中心；此正方形绕 O 旋转，转角为 θ（图 1-1）。我们的目标是要求 A、B、C、D 距离地面均为零。

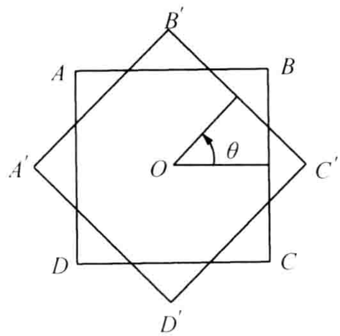

图 1-1

设 $f(\theta)$ 表示 A'、C'到地面距离之和，$g(\theta)$ 表示 B'、D'到地面距离之和，则当且仅当 $f(\theta)=g(\theta)=0$ 时，四条腿着地。

由假设（1），$f(\theta)$、$g(\theta)$ 连续，因此，可利用连续函数的性质。

由假设（3），$f(\theta)g(\theta)=0$，对任意 θ 成立。

若 $f(0)=g(0)=0$，取 $\theta=0$ 即可，否则应证明，存在 $\theta_0\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。不妨设 $f(0)>0, g(0)=0$，则 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0, g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0$（将正方形

绕中心逆时针方向旋转$\frac{\pi}{2}$），现证明：$\exists\theta_0\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，使$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

用连续函数的中值定理：

令$h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，由假设（1），$h(\theta)$在$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上连续，且$h(0)>0$，$h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，于是，由连续函数的介值定理，$\exists\theta_0\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$使$h(\theta_0)=0$，即$f(\theta_0)=g(\theta_0)$。由$f(\theta_0)\cdot g(\theta_0)=0$，从而$f(\theta_0)=0$或$g(\theta_0)=0$，于是$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

4.讨论

此问题中，用一元变量θ表示椅子的位置是巧妙的，也是解决本问题的关键（θ未求出，但仍有意义）。利用正方形的对称性及旋转90°不是关键，例如，若将椅子的四条腿改为矩形该如何做？利用介值定理还可以考虑其他问题。

1.2.2 价格竞争问题

1.问题的提出

两个加油站位于同一条公路旁，为在公路上行驶的汽车提供同样的汽油，彼此竞相降价，竞争日趋激烈。现在甲加油站开始降价，试站在乙加油站立场上组建模型，为乙加油站提供决策依据（降价幅度）使乙加油站获利最高。

2.符号定义

P：汽油的正常销售价（元/升）；

L：降价前乙加油站的销售量（升/日）；

W：汽油成本（元/升）；

x：乙加油站的销售价（元/升）；

y：甲加油站的销售价（元/升）；

$P-y$：甲加油站降价幅度；

$P-x$：乙加油站降价幅度；

$y-x$：两个加油站价格之差。

3.模型建立

假设乙加油站销量与$p-y$、$p-x$、$y-x$三者为线性关系，即$Q=L-a(P-y)+b(P-x)+c(y-x)$，则乙加油站的利润函数为$R(x,y)=(x-W)Q$，固定y，求最大值点：

$$\frac{\partial R}{\partial x}=L-a(P-y)+b(P-x)+c(y-x)-(x-W)(b+c)=0,$$

解得 $x^* = \dfrac{L + y(a+c) + P(b-a) + W(b+c)}{2(b+c)}$，即甲加油站确定价格为 y 时，乙加油站价格定为 x^*，能获得最大利润。

注意：（1）经济学中价格与销量关系通常认为是线性关系；

（2）在经济学中称 $\dfrac{\partial R}{\partial x}$ 为边际利润。

4.讨论

假设 $L = 2000$, $P = 4$, $W = 3$，取 $y = 3.9$，则

$$R(x, y) = (x-3)(21500 - 5000x)\text{，}\quad \frac{\partial R}{\partial x} = 36500 - 10000x$$

因为 $\dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{R(x+\Delta x) - R(x)}{\Delta x}$，故其意义是当 x 增加一个单位（$\Delta x = 1$）时，R 的增加值。

特别地，当 $x = 3.65$ 时，$\dfrac{\partial R}{\partial x} = 0$，表明价格不能再降。参数 a, b, c 的值较难估计。

一般地，可在 y 取不同值时（固定），对 x 取不同值，得到销量值，然后用回归分析的方法得到。但这是不现实的，因为要频繁调价。

常用的办法是，按给定数据给出 a、b、c 的数量级，从而得到估计值（或称虚拟参数），如：

$$a = b = 1000, c = 4000$$

表　1-1

y	x	R
3.9	3.65	2112.5
3.8	3.6	1800
3.7	3.55	1512.5

也可用线性回归方法：

根据经验，选定 y=3.8 及一组 $\{x, Q\}$，如：

$\{3.78, 2050\}$,$\{3.75, 2100\}$,$\{3.9, 1900\}$,$\{3.6, 2300\}$,$\{3.55, 2400\}$,$\{4, 2000\}$,

用线性回归，得 $Q = -1410.38x + 7390.99$，解得 $a = 1252.65 - c$，$b = 1410.28 - c$，取 $c = 252$ 得 $a = 1000.65$，$b = 1158$。

1.2.3　借贷买房（或购物）问题

1.问题的提出

曾有一家报纸刊登一则广告称：“对大多数工薪阶层人士来说，想买房，简直是

天方夜谭。现在有这样一栋住宅楼，每套只需自备款 7 万元，其余由公司贷款，可分期付款，每月只需付 800 元，10 年还清。那么这对您还有什么问题呢？”

现在的问题是：这房子究竟值多少钱，即若一次性付款要付多钱？若无能力一次性付款，实际上相当于借了多少钱？为什么每月要付 800 元？

试根据广告所提供的信息和银行的贷款利率，对上述问题进行研究，供购房者参考。

2.符号定义

M：房子的总价，单位为元；

A_0：买者要借的钱数，单位为元；

R：月利率；

N：借期，单位为月；

x：每月付的钱数；

A_n：第 n 个月所欠的款，单位为元。

3.模型建立

因为第 $n+1$ 个月欠款（含利息）

$$A_{n+1}=(1+R)A_n-x, n=0,1,2,\cdots$$

所以

$$\begin{aligned}A_n&=A_0(1+R)^n-x\left[(1+R)^{n-1}+(1+R)^{n-2}+\cdots+(1+R)+1\right]\\&=A_0(1+R)^n-x\frac{(1+R)^n-1}{R}, n=0,1,2,\cdots\end{aligned}\tag{1.1}$$

即得 A_n, A_0, x, R, N 之间的关系。

4.问题的解答

已知 N=10 年=120 个月，$x=800$ 元，$A_0=M-70000$ 元，则要求 10 年还清，即 $A_{120}=0$，从而得

$$0=A_0(1+R)^{120}-800\frac{(1+R)^{120}-1}{R},$$

于是

$$A_0=800\cdot\frac{(1+R)^{120}-1}{R(1+R)^{120}}\tag{1.2}$$

不妨设月利率 $R=0.01$，则由（1.2）式可算出 $A_0\approx 55760$ 元，于是房子总价为

$$M\approx 70000+55760=125760\text{ 元}$$

由此可知，一次性付款额不应大于 M，否则应自己去银行贷款，不要借该公