

1103
K96

1993435

ERGEBNISSE DER MATHEMATIK UND IHRER GRENZGEBIETE

UNTER MITWIRKUNG DER SCHRIFTFLEITUNG DES
„ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK“

HERAUSGEGEBEN VON

L.V. AHLFORS · R. BAER · F. L. BAUER · R. COURANT · A. DOLD
J. L. DOOB · S. EILENBERG · P. R. HALMOS · M. KNESER
T. NAKAYAMA · H. RADEMACHER · F. K. SCHMIDT
B. SEGRE · E. SPERNER

NEUE FOLGE · HEFT 26

QUASIKONFORME ABBILDUNGEN

VON

HANS P. KÜNZI



SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

1960

Bezieher des „Zentralblatt für Mathematik“ erhalten die „Ergebnisse der Mathematik“
zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis

1993435

0114.55
E701

1993435
1993435
外文书库

3011

QUASIKONFORME ABBILDUNGEN

VON

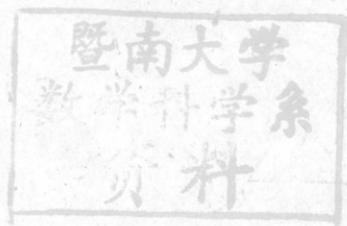
HANS P. KÜNZI

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZÜRICH
UND PRIVATDOZENT

AN DER EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH



MIT 35 ABBILDUNGEN



李治本收
1993 12A13



SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

1960

1993 12A13

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten
Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es auch nicht gestattet, dieses
Buch oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie)
zu vervielfältigen

© by Springer-Verlag OHG, Berlin · Göttingen · Heidelberg 1960

Printed in Germany

ERGEBNISSE DER MATHEMATIK UND IHRER GRENZGEBIETE

UNTER MITWIRKUNG DER SCHRIFTFÜHRUNG DES
„ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK“

HERAUSGEGEBEN VON

L.V. AHLFORS · R. BAER · F.L. BAUER · R. COURANT · A. DOLD
J.L. DOOB · S. EILENBERG · P.R. HALMOS · M. KNESER
T. NAKAYAMA · H. RADEMACHER · F.K. SCHMIDT
B. SEGRE · E. SPERNER

NEUE FOLGE · HEFT 26

REIHE:

MODERNE FUNKTIONENTHEORIE

BESORGT

VON

L.V. AHLFORS



SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

1960

Vorwort

Die Theorie der quasikonformen Abbildungen gehört gegenwärtig zu einem der modernsten Forschungszweige innerhalb der Analysis bzw. der Funktionentheorie. Aus diesem Grunde ist es sicher gegeben, über dieses Gebiet eine Zusammenfassung in Form eines Ergebnisbandes zu schreiben. Daß aber bei einer ersten derartigen Darstellung verschiedene Schwierigkeiten zu überwinden sind, nicht zuletzt auch in rein didaktischer Hinsicht, stellt sich während der Bearbeitung eines solchen Stoffes öfters heraus. So hat es sich unter anderem als recht heikel erwiesen, schon nur die verschiedenen Definitionen, welche über quasikonforme Abbildungen existieren, auf einen einigermaßen gleichen Nenner zu bringen.

Da neben einer russischen Darstellung (VOLKOVYSKIJ [2]) über das vorliegende Forschungsgebiet noch keinerlei Lehrbücher existieren, habe ich besonders Wert darauf gelegt, an einigen Stellen etwas tiefer in die Beweisverfahren einzudringen, als dies üblicherweise in der vorliegenden Reihe der Ergebnishefte der Fall ist.

In verdankenswerter Weise hat mir Herr A. TEBLING verschiedene russische Arbeiten ins Deutsche übersetzt, wodurch es mir ermöglicht wurde, auch die sonst nur schwer zugängliche russische Literatur zu berücksichtigen.

Neben dem hier dargestellten zweidimensionalen Fall beschäftigt sich die neueste Forschung auch schon mit dem Studium der quasikonformen Abbildungen in höherdimensionalen Räumen; doch befindet sich diese Untersuchung noch derart im Flusse, daß eine zusammenhängende Darstellung darüber heute noch nicht möglich ist; in einem Nachtrag wird lediglich auf einige der jüngsten Ergebnisse hingewiesen.

Ich erachte es als eine besonders angenehme Pflicht, an verschiedene Adressen meinen herzlichsten Dank zu richten. An erster Stelle danke ich meinen Lehrern der Funktionentheorie, den Herren Professoren R. NEVANLINNA, A. PFLUGER und H. WITTICH, die durch zahlreiche, wertvolle Ratschläge dazu beigetragen haben, daß dieser Bericht in der vorliegenden Form zustande gekommen ist. Zudem verdanke ich Herrn Professor L. BERS verschiedene Anregungen bei der Gestaltung des 7. Kapitels. Weiteren Dank schulde ich meinen Freunden F. GEHRING, J. HERSCH, O. LEHTO, H. ROYDEN und K. STREBEL, mit denen ich in verschiedenen Diskussionen den zu gestaltenden Text besprochen habe.

Herrn Professor L. AHLFORS sowie dem Springer-Verlag danke ich ebenfalls für das Interesse, das sie dieser Arbeit entgegenbrachten.

Zürich, im Juni 1960

H. P. KÜNZI.

Inhaltsverzeichnis

1. Kapitel. Über konforme Abbildungen	1
1.1. Einleitung	1
1.2. Definition eines Ringgebietes	1
1.3. Modulabschätzungen.	1
1.4. Eine Beziehung zwischen dem Modul und dem logarithmischen Flächeninhalt	2
1.5. Monotonieeigenschaft des Moduls	3
1.6. Der reduzierte Modul	3
1.7. Reduzierter Modul und reduzierter logarithmischer Flächeninhalt	5
1.8. Weitere Sätze über den reduzierten Modul	5
1.9. Das Normalgebiet von GRÖTZSCH	6
1.10. Das Normalgebiet von TEICHMÜLLER	7
1.11. Das Normalgebiet von MORI	9
1.12. Die Funktion $\nu(r)$	11
1.13. Der Modul eines Vierecks.	11
1.14. Moduln und extreme Längen	12
1.15. DIRICHLET-Integral und Modul	13
1.16. Die beiden Teichmüllerschen Modulsätze	14
1.17. Anwendung der Modulsätze.	16
2. Kapitel. Quasikonforme Homöomorphismen nach der Definition von GRÖTZSCH	19
2.1. Stetige und stetig differenzierbare Abbildungen	19
2.2. Lokale Eigenschaften des Dilatationsquotienten	23
2.3. Definition der K -quasikonformen Abbildungen nach GRÖTZSCH	24
2.4. Funktionentheoretische Anwendungen	25
2.5. Einfache Beispiele für K -quasikonforme Homöomorphismen	25
2.6. Die Ungleichung von GRÖTZSCH	26
2.7. Der Teichmüller-Wittichsche Verzerrungssatz	30
2.8. Satz von BELINSKIJ	34
2.9. Satz von R. NEVANLINNA	46
2.10. Eine Verallgemeinerung der Ungleichung von GRÖTZSCH	48
2.11. Punktmengen der Kapazität Null	50
2.12. Die Robinsche Konstante	50
2.13. Durchmesser und Kapazität	52
2.14. Über die Koebesche Konstante	54
2.15. Der Ahlforssche Verzerrungssatz	56
2.16. Ein Teichmüllersches Extremalproblem	59
2.17. Grötzschsche Extremalprobleme	63
2.18. Ränderzuordnung	68
3. Kapitel. Anwendungen quasikonformer Abbildungen in der Funktionentheorie	68
3.1. Das Typenproblem	68
3.2. Wertverteilungsprobleme	68
3.3. Der Streckenkomplex	69
3.4. Die Uniformisierung	71

3.5.	Über den Maximalbetrag einiger ganzen transzendenten Funktionen	74
3.6.	Die Lage der a -Stellen	75
3.7.	Beispiele	76
4.	<i>Kapitel. Allgemeine K-quasikonforme Homöomorphismen</i>	78
4.1.	Neue Definitionen	78
4.2.	K -quasikonforme Homöomorphismen gemäß einer analytischen Definition	78
4.3.	K -quasikonforme Homöomorphismen gemäß einer geometrischen Definition	79
4.4.	Äquivalenzsatz	80
4.5.	Satz von MORI	80
4.6.	Beweis des Satzes von MORI	83
4.7.	Satz von BERS	86
4.8.	Nachweis für $A - G$	87
4.9.	Satz von PFLUGER	88
4.10.	Die quasikonformen Homöomorphismen nach JENKINS	93
4.11.	Satz von GEHRING	97
4.12.	Sätze über K -quasikonforme Homöomorphismen	97
5.	<i>Kapitel. K-quasikonforme Abbildungen</i>	113
5.1.	Die innere Abbildung	113
5.2.	Definition der K -quasikonformen Abbildungen	114
5.3.	Beltramische Differentialgleichung	114
5.4.	Einige Sätze über allgemeine K -quasikonforme Abbildungen	115
5.5.	Normale Familien von K -quasikonformen Abbildungen	117
5.6.	Das Maximumprinzip und das Spiegelungsprinzip	118
5.7.	Die Picard-Liouvillesche Satzgruppe	119
5.8.	Ringeigenschaften der quasikonformen Abbildungen	120
5.9.	Übertragung eines Satzes von BEURLING	121
5.10.	Invariante Klassen Riemannscher Flächen bei quasikonformen Abbildungen	122
5.11.	Die Nevanlinnaschen Hauptsätze für quasimeromorphe Funktionen	126
6.	<i>Kapitel. Quadratische Differentiale und extremale quasikonforme Abbildungen</i> 126	
6.1.	Die Teichmüllersche Formulierung	126
6.2.	Problemstellung	129
6.3.	Problem A	131
6.4.	Problem B	131
6.5.	Die formale Lösung	132
6.6.	Theorem 1	132
6.7.	Die Extremaleigenschaft	135
6.8.	Die quasikonformen Abbildungen im Mittel	140
6.9.	Infinitesimale Deformationen	143
6.10.	Ein Variationsproblem	144
6.11.	Existenzbeweis nach AHLFORS	146
6.12.	Der Existenzbeweis nach BERS	150
6.13.	Vollständige Lösung einer Extremalaufgabe der quasikonformen Abbildung	153
6.14.	Teichmüller-Räume	154

7. Kapitel. Quasikonforme Abbildungen, Differentialgleichungen und pseudoanalytische Funktionen	155
7.1. Überblick	155
7.2. Das Darstellungstheorem	157
7.3. Nullstellen	158
7.4. Das DIRICHLET-Problem	158
7.5. Verallgemeinerter Riemannscher Abbildungssatz	159
7.6. Die pseudoanalytischen Funktionen	159
7.7. Eigenschaften pseudoanalytischer Funktionen	162
7.8. LAVRENTIEFF'S Fundamentaltheorem für quasikonforme Abbildungen	167
7.9. Lavrentieffscher Abbildungssatz	169
Nachtrag	171
Literaturverzeichnis	172
Namen- und Sachverzeichnis	179

1. Kapitel

Über konforme Abbildungen

1.1. Einleitung. Als Vorbereitung zu den folgenden Kapiteln werden zuerst verschiedene Eigenschaften der konformen Abbildungen zusammengestellt, ohne auf Einzelheiten der Beweise einzugehen. Vor allem sollen einige Kenntnisse über den Modul von Ringgebieten und Vierecken erworben werden; für spezielle Untersuchungen in dieser Richtung wird auf die Arbeiten von GRÖTZSCH [1, 3], TEICHMÜLLER [2] und WIRTICH [2] verwiesen.

1.2. Definition eines Ringgebietes. Unter einem Ringgebiet G versteht man ein zweifach zusammenhängendes Gebiet der z -Ebene¹. Sein Rand zerfällt in zwei Komponenten R_1 und R_2 , die in je einen Punkt ausarten können.

Die beiden nicht zu G gehörenden Mengen nennt man die Komplementärmengen K_1 und K_2 bezüglich des Ringes G . Das Ringgebiet G trennt die Punkte P_1 und P_2 , wenn P_1 auf K_1 und P_2 auf K_2 liegen.

Sind K_1 und K_2 Kontinuen, so spricht man von einem Ringgebiet schlechthin oder auch von einem eigentlichen Ringgebiet. In den anderen Fällen handelt es sich um ausgeartete Ringgebiete.

Für eigentliche Ringgebiete gilt der fundamentale Satz, wonach sich jedes Ringgebiet G konform auf einen konzentrischen Kreisring $r < |w| < R$ abbilden läßt, dessen Radienverhältnis R/r eindeutig durch das Gebiet bestimmt ist.

Die Größe

$$M = \log R - \log r \quad (1,1)$$

ist eine konforme Invariante und heißt Modul des Ringgebietes.

1.3. Modulabschätzungen. Für die weiteren Untersuchungen ist es zweckmäßig, eine logarithmische Metrik einzuführen durch

$$ds = \frac{|dz|}{|z|} \quad \left(ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{x^2 + y^2} \right).$$

Für die logarithmische Länge L einer Kurve C , die nicht durch den Nullpunkt geht, erhält man

$$L = \int_C |d \log z| = \int_C \frac{|dz|}{|z|}$$

¹ Ist nichts Besonderes vermerkt, so meint man unter der z -Ebene die abgeschlossene Ebene, welche sich konform äquivalent zur Riemannschen Zahlenkugel verhält.

und für den logarithmischen Flächeninhalt F eines Gebietes G , das den Nullpunkt nicht enthält

$$F = \iint_G d\sigma_{\log z} = \iint_G \frac{d\sigma_z}{|z|^2}.$$

In diesen Formeln bedeutet $d\sigma_z$ bzw. $d\sigma_{\log z}$ das Flächenelement in der z - bzw. in der $\log z$ -Ebene ($d\sigma_z = dx dy$). Die logarithmische Länge eines Kreises $|z| = r$ ist dann 2π , der logarithmische Flächeninhalt von $r < |z| < R$ entsprechend $2\pi (\log R - \log r)$.

1.4. Eine Beziehung zwischen dem Modul und dem logarithmischen Flächeninhalt. Ein Ringgebiet G trenne 0 und ∞ , F sei sein logarithmischer Flächeninhalt, M sein Modul, dann gilt die Ungleichung

$$2\pi M \leq F. \quad (1,2)$$

Gleichheit gilt nur für einen Kreisring $r < |z| < R$.

Dieser Satz wird bewiesen, indem man G konform auf $r < |w| < R$ abbildet ($z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$). $|w| = \rho$ entspricht in G eine einfach geschlossene Kurve γ , die die beiden Randkomponenten voneinander trennt und deren logarithmische Länge nicht kleiner als 2π ist. Es gilt

$$2\pi \leq \int_{\gamma} |d \log z| = \int_0^{2\pi} \left| \frac{d \log z}{dw} \right| \rho d\theta.$$

Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$4\pi^2 \leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \left| \frac{d \log z}{dw} \right|^2 \rho^2 d\theta$$

und weiter

$$\frac{2\pi}{\rho} \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{d \log z}{dw} \right|^2 \rho d\theta.$$

Integration über ρ von r bis R liefert

$$2\pi \int_r^R \frac{d\rho}{\rho} \leq \int_r^R \int_0^{2\pi} \left| \frac{d \log z}{dw} \right|^2 \rho d\rho d\theta = \iint_G d\sigma_{\log z},$$

mit anderen Worten

$$2\pi M = 2\pi (\log R - \log r) \leq F.$$

Falls G mit einem Kreisring zusammenfällt, so ist

$$2\pi M = F.$$

Es gilt auch das Umgekehrte, denn im Falle $2\pi M = F$ muß in der obigen Entwicklung überall das Gleichheitszeichen stehen, was nur möglich ist,

wenn $d \log z / d \log w = \pm 1$ ist und somit

$$z = kw \quad \text{oder} \quad z = \frac{k}{w}.$$

1.5. Monotonieeigenschaft des Moduls. Aus der soeben hergeleiteten Abschätzung des Moduls durch den logarithmischen Flächeninhalt ergeben sich die beiden Folgerungen:

a) Wenn ein Ringgebiet G' mit dem Modul M' Teil eines Ringgebietes G mit dem Modul M ist und dessen Komplementärkontinuen voneinander trennt, so ist

$$M' \leq M. \quad (1,3)$$

Gleichheit gilt nur im Falle von $G' = G$ (Fig. 1a).

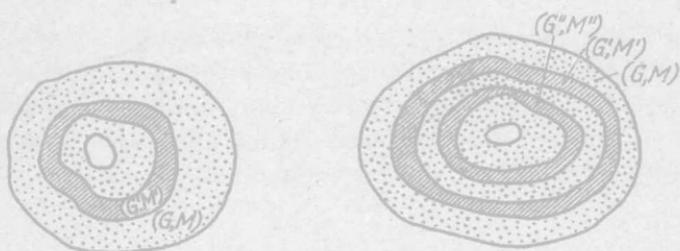


Fig. 1 a

Fig. 1 b

Zum Beweise bildet man G konform auf $r < |w| < R$ ab. G' geht dann in einen Teil dieses Kreisringgebietes über mit dem logarithmischen Flächeninhalt F' , und es ist,

$$2\pi M' \leq F' \leq 2\pi (\log R - \log r) = 2\pi M.$$

b) Wenn ein Ringgebiet G mit dem Modul M zwei punktfremde Ringgebiete G' und G'' mit den Moduln M' und M'' enthält, von denen jedes die beiden Komplementärkontinuen von G trennt (Fig. 1b), so folgt:

$$M' + M'' \leq M. \quad (1,4)$$

Dieser von GRÖTZSCH stammende Satz wird bewiesen, indem man wie üblich für G vom Kreisring $r < |z| < R$ ausgeht. Sind dann F' und F'' die logarithmischen Flächeninhalte von G' und G'' , so ist

$$2\pi(M' + M'') \leq F' + F'' \leq 2\pi (\log R - \log r) = 2\pi M.$$

Im vorliegenden Falle, wo G ein Kreisringgebiet $r < |z| < R$ ist, kann sicher nur dann das Gleichheitszeichen stehen, wenn $G' : r < |z| < \varrho$ und $G'' : \varrho < |z| < R$ ist oder umgekehrt.

1.6. Der reduzierte Modul. Ist ein Gebiet einfach zusammenhängend und von der punktierten Ebene verschieden, so kann man den reduzierten

Modul einführen. Ein solches Gebiet G enthalte den Punkt $z = 0$, nicht aber $z = \infty$. Für ein hinreichend kleines ϱ verläuft dann der Kreis $|z| = \varrho$ ganz in G (Fig. 2).

Der Durchschnitt von G mit $|z| > \varrho$ heiße G_ϱ und bilde ein Ringgebiet mit dem Modul M_ϱ ; für $\varrho \rightarrow 0$ gilt $M_\varrho \rightarrow \infty$.

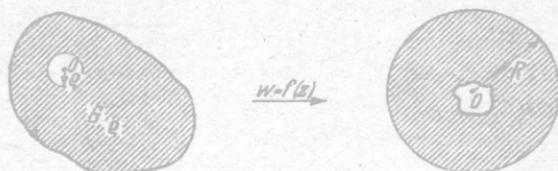


Fig. 2

Um das Verhalten von M_ϱ näher zu untersuchen, bildet man das Gebiet G mittels $w = f(z)$ konform so auf einen Kreis $|w| < R$ ab, daß sich die Nullpunkte entsprechen und dort die Normierung $|f'(0)| = 1$ besteht. R ist dann bekanntlich der Abbildungsradius von G . Durch diese konforme Abbildung geht der Kreis $|z| = \varrho$ in eine einfach geschlossene Kurve über, und es ist

$$\log \frac{R}{\varrho} + o(1) = M_\varrho$$

oder

$$M_\varrho = \log \frac{1}{\varrho} + \log R + o(1) \quad \text{für } \varrho \rightarrow 0.$$

Wegen $M_\varrho + \log \varrho \uparrow \log R$ bezeichnet man

$$\log R = \lim_{\varrho \rightarrow 0} (M_\varrho + \log \varrho) \quad (1,5)$$

als den reduzierten Modul \tilde{M} des Gebietes G .

Dieser reduzierte Modul verhält sich natürlich gegenüber konformen Abbildungen nicht mehr invariant.

Enthält das von der punktierten Ebene verschiedene, einfach zusammenhängende Gebiet G den Punkt $z = \infty$, so ist für genügend großes ϱ der Durchschnitt von $|z| < \varrho$ und G ein Ringgebiet G_ϱ , mit dem Modul $M_\varrho \rightarrow \infty$ für $\varrho \rightarrow \infty$. Gleich wie oben nennt man den entsprechenden Grenzwert $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} (M_\varrho - \log \varrho) = \tilde{M}$ den reduzierten Modul von G . Betrachtet man die Greensche Funktion $g(z, \infty, G)$ des Gebietes G mit dem Pol in $z = \infty$, so ist in

$$g(z, \infty, G) = \log |z| + u(z)$$

der endliche Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u(z) = \gamma \quad (1,6)$$

die Robinsche Konstante von G . Somit ist also der reduzierte Modul von G gleich der Robinschen Konstanten γ des Gebietes G .

1.7. Reduzierter Modul und reduzierter logarithmischer Flächeninhalt. G enthalte wieder den Punkt $z = 0$, nicht aber $z = \infty$ und sei von der in $z = \infty$ punktierten Ebene verschieden. Entsprechend dem reduzierten Modul (1,5) führt man jetzt den reduzierten logarithmischen Flächeninhalt von G ein. Ist ϱ so klein, daß $|z| = \varrho$ ganz in G verläuft, und ist G_ϱ der Teil von G mit $|z| > \varrho$ und F_ϱ der logarithmische Flächeninhalt von G_ϱ , dann ist die Größe $F_\varrho + 2\pi \log \varrho$ von ϱ unabhängig, denn für $\varrho' < \varrho$ ist

$$F_{\varrho'} = 2\pi (\log \varrho - \log \varrho') + F_\varrho.$$

Man bezeichnet diese von ϱ unabhängige Größe

$$\tilde{F} = F_\varrho + 2\pi \log \varrho \quad (1,7)$$

als den reduzierten logarithmischen Flächeninhalt von G .

Zwischen dem reduzierten Modul \tilde{M} und dem reduzierten logarithmischen Flächeninhalt \tilde{F} besteht die Ungleichung

$$2\pi \tilde{M} \leq \tilde{F}. \quad (1,2')$$

Der Beweis ergibt sich aus der entsprechenden Beziehung (1,2), nach welcher $2\pi M_\varrho \leq F_\varrho$ gilt und somit ist

$$2\pi (M_\varrho + \log \varrho) \leq F_\varrho + 2\pi \log \varrho.$$

Durch den Grenzübergang $\varrho \rightarrow 0$ wird der Beweis geliefert. Gleichheit ist nur dann erfüllt, wenn G ein Kreis mit $|z| < R$ ist.

1.8. Weitere Sätze über den reduzierten Modul. Für den reduzierten Modul gelten analoge Sätze wie für den gewöhnlichen Modul:

a) G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der z -Ebene, welches den Punkt $z = 0$, nicht aber $z = \infty$ enthalte, mit dem reduzierten Modul \tilde{M} . Für ein $z = 0$ enthaltendes einfach zusammenhängendes Teilgebiet G' von G ist $\tilde{M}' \leq \tilde{M}$, da $M'_\varrho \leq M_\varrho$ gilt. Ist weiter G'' noch ein zu G' punktfremdes Ringgebiet, das G' vom Rande von G trennt, dann besteht zwischen den Moduln \tilde{M}' , M'' und \tilde{M} die Relation

$$\tilde{M}' + M'' \leq \tilde{M}. \quad (1,4')$$

Zum Beweise nimmt man an, G sei der Kreis $\log |z| < \tilde{M}$ mit dem reduzierten logarithmischen Flächeninhalt $2\pi \tilde{M}$. Mit \tilde{F}' bzw. F'' wird der logarithmische Flächeninhalt von G' , bzw. von G'' bezeichnet, dann ist

$$2\pi (\tilde{M}' + M'') \leq \tilde{F}' + F'' \leq 2\pi \tilde{M}.$$

Unter der gemachten Voraussetzung, daß G den Kreis $|z| < e^{\tilde{M}}$ darstellt, kann das Gleichheitszeichen nur dann stehen, wenn G' der Kreis $\log|z| < \tilde{M}'$ und G'' der Kreisring $\tilde{M}' < \log|z| < \tilde{M}$ ist.

b) Sind G' und G'' punktfremde, einfach zusammenhängende Gebiete, wobei G' den Punkt $z = 0$ und G'' den Punkt $z = \infty$ enthält, mit den reduzierten Moduln \tilde{M}' und \tilde{M}'' , dann gilt

$$\tilde{M}' + \tilde{M}'' \leq 0. \quad (1,8)$$

Gleichheit besteht nur, wenn $G' : |z| < R$ und $G'' : |z| > R$ sind.

Beweis: Liegt $|z| = \varrho$ ganz in G' und $|z| = P$ ganz in G'' , so ist

$$\tilde{M}' \leq F'_\varrho + 2\pi \log \varrho \quad (1,9)$$

$$\tilde{M}'' \leq F''_P - 2\pi \log P. \quad (1,9')$$

Addition auf beiden Seiten der Ungleichungen ergibt

$$\tilde{M}' + \tilde{M}'' \leq F'_\varrho + F''_P - 2\pi (\log P - \log \varrho) \leq 0,$$

weil F'_ϱ und F''_P die logarithmischen Flächeninhalte von fremden Teilen des Kreisringes $\varrho < |z| < P$ sind.

Soll in der Relation (1,8) das Gleichheitszeichen auftreten, dann muß es auch in (1,9) stehen, d. h. G' ist ein Kreis $|z| < R'$, weiter muß es auch in (1,9') gelten, d. h. G'' ist ein Kreis $|z| > R''$ und drittens muß das Gleichheitszeichen in $F'_\varrho + F''_P \leq 2\pi (\log P - \log \varrho)$ stehen, woraus folgt, daß $R' = R''$ ist.

1.9. Das Normalgebiet von GRÖTZSCH. Im folgenden wird auf einige Verzerrungssätze hingewiesen, die den Zusammenhang zwischen der Modulgröße und der geometrischen Gestalt des Gebietes weiter beleuchten.



Fig. 3

G sei ein eigentliches Ringgebiet mit den Randkomponenten $R_1: |z| = 1$ und R_2 , wobei R_2 die Randkomponente R_1 von $z = \infty$ trennt. Der Punkt $z = P > 1$ sei nicht in G enthalten. G_P bezeichne das Normalgebiet von GRÖTZSCH, bei dem R_2 mit dem geradlinigen Schlitz $P > 1$ bis ∞ zusammenfällt (Fig. 3). Dann gilt, wenn M der Modul von G und $\log \Phi(P)$ derjenige von G_P ist

$$M \leq \log \Phi(P). \quad (1,10)$$

Das Gleichheitszeichen steht nur dann, wenn G und G_P zusammenfallen.

Für eine Beweisskizze bildet man das Extremalgebiet G_P konform auf $1 < |w| < R = \Phi(P)$ ab. Durch Spiegelung am Schlitz $z = P$ bis ∞ und an dem entsprechenden Kreis $|w| = R$ erhält man eine konforme Abbildung desselben G_P auf den Kreisring $R < |w| < R^2$. Durch kreuzweises Verheften zweier Exemplare von G_P ergibt sich eine konforme Abbildung dieser Riemannschen Fläche auf $1 < |w| < R^2$. Nach dem Monodromiesatz erkennt man, daß die beiden Zweige von $w = f(z)$ in G eindeutig sind; sie bilden G auf zwei punktfremde Ringgebiete im Kreisring $1 < |w| < R^2$ ab, von denen jedes einen der Kreise $|w| = 1$, $|w| = R^2$ als Randkontinuen hat. Beide Gebiete besitzen den Modul M , also gilt nach (1,4), daß die Summe $2M$ höchstens gleich dem Modul $2 \log \Phi(P)$ des Kreisringes $1 < |w| < R^2$ ist und nur dann Gleichheit besteht, wenn die w -Bilder von G Kreisringe mit dem Modul $\log \Phi(P)$ sind, also $G = G_P$ ist.

Bildet man G_P auf den oben erwähnten Kreisring $1 < |w| < \Phi(P)$ konform ab, so erhält man unter Zuhilfenahme von elliptischen Integralen

$$\log \Phi(P) = 2\pi \frac{K(k)}{K'(k)} \quad (1,11)$$

mit

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}; \quad K'(k) = K(\sqrt{1-k^2}) \quad \text{und} \quad k = \left(\frac{\sqrt{P}-1}{\sqrt{P}+1} \right)^2.$$

Aus

$$\lim_{k \rightarrow 1} K'(k) = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\lim_{k \rightarrow 1} \sqrt{1-k^2} e^{K(k)} = 4$$

folgt dann die wichtige Relation

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{\Phi(P)}{P} = 4, \quad (1,12)$$

dabei strebt $\Phi(P)/P$ monoton wachsend gegen 4. Eine weitere Rechnung zeigt, daß

$$\frac{4P}{1 + \frac{1}{2(P-1)}} < \Phi(P) < 4P \quad (1,13)$$

gilt.

1.10. Das Normalgebiet von TEICHMÜLLER. Enthält von den beiden Komplementärkontinuen eines Ringgebietes G das eine 0 und $\varrho e^{i\vartheta}$, das andere ∞ und $P e^{i\vartheta}$, so ist der Modul höchstens gleich $\log \Psi \left(\frac{P}{\varrho} \right)$, also

$$M \leq \log \Psi \left(\frac{P}{\varrho} \right). \quad (1,14)$$

Hier ist $\log \Psi\left(\frac{P}{\varrho}\right)$ der Modul der von $-\varrho$ bis 0 und von P bis ∞ längs der reellen Achse aufgeschlitzten Ebene. Diese aufgeschlitzte Ebene bezeichnet man als Teichmüllersches Normalgebiet. Gleichheit gilt in (1,14) nur für solche Gebiete, für die $e^{i\varphi} = -e^{i\theta}$, d. h. G ist längs einer Geraden aufgeschlitzt von $\varrho e^{i\varphi}$ bis 0 und von $P e^{i\theta}$ bis ∞ .

Man kann diesen Satz ähnlich beweisen wie den vorhergehenden spezielleren, indem man vorübergehend das ∞ enthaltende Komplementärkontinuum zu G hinzunimmt. Das neue, einfach zusammenhängende Gebiet wird konform auf $|s| > 1$ so abgebildet, daß ∞ in ∞ übergeht. Bei dieser Abbildung entspricht G einem Bildgebiet, das seine eine Randkomponente $|s| = 1$ von ∞ trennt. Nachher bildet man dieses Ringgebiet noch konform auf $0 < \log |w| < M$ ab, daraus aber folgt die Behauptung.

Mit Hilfe der Zwischenabbildung auf die s -Ebene läßt sich $\Psi\left(\frac{P}{\varrho}\right)$ näher abschätzen. Die von $-\varrho$ bis 0 geradlinig aufgeschlitzte z -Ebene wird auf $|s| > 1$ durch

$$z = \frac{\varrho(s-1)^2}{4s} \quad s = 1 + \frac{2z}{\varrho} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\varrho}{z}}\right)$$

so konform abgebildet, daß ∞ in ∞ übergeht. Dem Punkt $z = P$ entspricht dabei

$$s = 1 + \frac{2P}{\varrho} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\varrho}{P}}\right)$$

und G geht dann in das von dort bis ∞ längs der reellen Achse aufgeschlitzte Äußere des Einheitskreises über, und es ist somit

$$\Psi\left(\frac{P}{\varrho}\right) = \Phi\left(1 + \frac{2P}{\varrho} \left\{1 + \sqrt{1 + \frac{\varrho}{P}}\right\}\right). \quad (1,15)$$

Eine andere Berechnung führt auf

$$\Psi\left(\frac{P}{\varrho}\right) = \left[\Phi\left(\sqrt{1 + \frac{\varrho}{P}}\right)\right]^2. \quad (1,15')$$

Nach (1,12) schließt man aus (1,15) und (1,15') auf

$$\lim_{P/\varrho \rightarrow \infty} \frac{\Psi\left(\frac{P}{\varrho}\right)}{\frac{P}{\varrho}} = 16. \quad (1,15'')$$

Für eine obere Abschätzung von Ψ gilt weiter

$$\Psi\left(\frac{P}{\varrho}\right) < 4 + \frac{8P}{\varrho} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\varrho}{P}}\right) < 16 \frac{P}{\varrho} + 8. \quad (1,15''')$$

Eine Berechnung für den Fall $\varrho = P$ führt auf $\Psi(1) = \pi$. Setzt man voraus, daß $\frac{P}{\varrho} \leq 1$, d. h. daß kein Kreis $|z| = c$ existiert, der ganz in G

verläuft, so folgt aus diesen Voraussetzungen

$$M \leq \log \Psi \left(\frac{p}{\varrho} \right) \leq \log \Psi(1) = \pi. \quad (1,16)$$

Das heißt umgekehrt, daß im Innern eines schlichten konformen Bildes eines konzentrischen Kreisringes mit einem Radienquotienten $> e^\pi$, das 0 und ∞ trennt, stets eine Kreisperipherie mit dem Zentrum 0 verläuft.

Für weitere Abschätzungen des Moduls durch geometrische Größen des Gebietes G sei auf SARIO [1] verwiesen.

1.11. Das Normalgebiet von MORI. Bei vorgegebenem λ ($0 < \lambda \leq 2$) bezeichnet man mit A_λ den Ring, dessen zwei Komplementärkontinuen aus

$$\left\{ z; |z| = 1, |\arg z| \leq \sin^{-1} \frac{\lambda}{2} \right\}$$

und

$$\{z; -\infty \leq \Re z \leq 0, \Im z = 0\}$$

bestehen und schreibt

$$\text{mod } A_\lambda = \log X(\lambda). \quad (1,17)$$

Dann gilt nach MORI [2] der

Satz: Es sei A ein Ring in der z -Ebene und Γ, Γ' seine beiden Komplementärkontinuen. Unter der Voraussetzung

$$\text{diam} [\Gamma \cap \{|z| \leq 1\}] \geq \lambda > 0,$$

$$\Gamma' \ni z = 0, \quad z = \infty$$

wird

$$\text{mod } A \leq \text{mod } A_\lambda. \quad (1,18)$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} X(\lambda) &= \Phi \left\{ \frac{2}{\lambda} \sqrt{2 + \sqrt{4 - \lambda^2}} \right\} \\ &= \Phi \left\{ \frac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{4 - \lambda^2}}} \right\} \end{aligned} \quad (1,19)$$

und

$$\lambda X(\lambda) \uparrow 16 \quad \text{wenn } \lambda \rightarrow +0. \quad (1,20)$$

Beweis: Es bedeutet keine Einschränkung anzunehmen, daß $z = 1$ und ein Punkt z_0 ($|z_0| \leq 1, |z_0 - 1| \geq \lambda$) in Γ enthalten seien. Dann wird die Riemannsche Fläche F der analytischen Funktion $\zeta = \sqrt{z}$ über der z -Ebene gebildet. B bezeichne den Ring, der durch Elimination der beiden Bilder von Γ auf F erhalten wird. Da B diese beiden Bilder von A enthält, wobei jedes die Randkontinuen von B trennt, so gilt nach TEICHMÜLLER [2]

$$\text{mod } A \leq \frac{1}{2} \text{mod } B. \quad (1,21)$$