



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中 外 物 理 学 精 品 书 系

前 沿 系 列 · 2 6

电磁场计算中的 时域有限差分法

(第二版)

王长清 祝西里 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中 外 物 理 学 精 品 书 系

前 沿 系 列 · 2 6

电磁场计算中的 时域有限差分法

(第二版)

王长清 祝西里 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

电磁场计算中的时域有限差分法/王长清,祝西里编著. —2 版. —北京: 北京大学出版社, 2014. 2

(中外物理学精品书系·前沿系列)

ISBN 978-7-301-23722-9

I. ①电… II. ①王…②祝… III. ①电磁计算—有限差分法 IV. ①TM15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 006721 号

书 名: 电磁场计算中的时域有限差分法(第二版)

著作责任者: 王长清 祝西里 编著

责任编辑: 王剑飞

标准书号: ISBN 978-7-301-23722-9/O·0962

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 新浪官方微博: @北京大学出版社

电 子 信 箱: zpup@pup.pku.edu.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62765014

出版部 62754962

印 刷 者: 北京中科印刷有限公司

经 销 者: 新华书店

730 毫米×980 毫米 16 开本 25.25 印张 478 千字

1994 年 12 月第 1 版

2014 年 2 月第 2 版 2014 年 2 月第 1 次印刷

定 价: 68.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话: (010)62752024 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn

“中外物理学精品书系”

编委会

主任：王恩哥

副主任：夏建白

编委：（按姓氏笔画排序，标*号者为执行编委）

王力军	王孝群	王牧	王鼎盛	石兢
田光善	冯世平	邢定钰	朱邦芬	朱星
向涛	刘川*	许宁生	许京军	张酣*
张富春	陈志坚*	林海青	欧阳钟灿	周月梅*
郑春开*	赵光达	聂玉昕	徐仁新*	郭卫*
资剑	龚旗煌	崔田	阎守胜	谢心澄
解士杰	解思深	潘建伟		

秘书：陈小红

序 言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础,同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天,物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴,而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到,改革开放三十多年来,随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展,我国物理学取得了跨越式的进步,做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下,近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势,在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看,尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书,但系统总结物理学各门类知识和发展,深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源,并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考,仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展,特别是展现近年来中国物理学者的研究水平和成果,北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了“中外物理学精品书系”,试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家,确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富,涵盖面广,可读性强,其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结,也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示;既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态,也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说,“中外物理学精品书系”力图完整呈现近现代世界和中国物理科学发展的全貌,是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

“中外物理学精品书系”另一个突出特点是,在把西方物理的精华要义“请进来”的同时,也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻,引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态,可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面,改革开放几十年来,我国的物理学研究取得了长足发展,一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域,使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解,不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”,也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”,对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是,“中外物理学精品书系”还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20世纪以来,中国物理界诞生了很多经典作品,但当时大都分散出版,如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中,读者们对这些论著也都是“只闻其声,未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫,对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值,不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献,充分发挥其应有的传世育人的作用,更能使广大物理学人和青年学子亲身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统,真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在2006年中国科学技术大会上指出,“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径,是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新,而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信,这套“中外物理学精品书系”的出版,不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣,也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展,为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

“中外物理学精品书系”编委会 主任

中国科学院院士,北京大学教授

王恩哥

2010年5月于燕园

内 容 简 介

本书全面系统地论述了时域有限差分(FDTD)法的基本原理及其在广泛领域的应用方法,并反映了最新发展成果。前三章介绍了时域有限差分法的基本原理,包括差分格式的建立、数值色散和稳定性以及网格的剖分方法。第四章系统地介绍了应用于开域问题的各种吸收边界条件。第五至七章讨论了时域有限差分法在散射、辐射、微波和光波线路分析中的应用。第八章专门讨论了电磁波对人体作用的计算。第九章论述了时域多分辨分析法,这是时域有限差分法的一种扩展。第十章简要地介绍了时域有限差分法的并行化问题。本书可帮助读者迅速地掌握时域有限差分法的原理和应用技巧,以便尽快地用于解决实际问题。

本书可用作无线电电子学、无线电物理、电磁场工程、天线和微波技术等专业高年级学生和研究生的教学参考书,也可供在电磁散射、瞬变电磁场、电磁兼容、微波技术与天线、生物电磁学和电磁波在生物医学中应用等领域从事教学和研究工作的科技工作者阅读。

第二版前言

本书自第一版出版以来,将近 18 年过去了。在这 18 年中时域有限差分法不仅大大扩展了应用范围,而且在理论和技术方面也有了很大发展。在这一时期,时域有限差分法在我国的应用和研究,也取得了很多成果。在本书第一版出版时,我国从事时域有限差分法研究的科学工作者还寥寥无几。现在已经有了众多参与者,甚至可以说得到了一定的普及。在第一版前言中曾说:本书定位在介绍基本原理和可能应用的主要方面及初步成果上,旨在推进时域有限差分法在我国的推广应用。时至今日,显然这一目的已经达到。为了适应新形势的需要,出版新版本的时机已经成熟了。

本书修订版基本保留了原来的风格,主要是根据近 18 年国内外的研究成果增加了一些新的内容,并在结构上进行了调整,使得在内容的相互照应上更加合理。本书把原来九章的内容调整为八章,在章节的名称上也作了相应的改变,同时还增加了两章新的内容,即第九章和第十章。第九章的内容是时域多分辨分析法,之所以加入这部分内容是因为时域多分辨分析法可以被看作时域有限差分法的更普遍的形式,或者说时域有限差分法只是时域多分辨分析法的一种特殊形式;而且时域多分辨分析法在计算电磁学的发展上具有特殊的意义,有很多可期待的发展前途,而在我国又没有受到足够的重视。第十章讨论了时域有限差分法的并行化问题。并行化的问题反映了时域有限差分法研究的新趋势,可充分利用计算机技术发展的最新成果,来提高时域有限差分法的应用成效。除此之外,在不同的章节还增加了有关新发展的相应内容,如 § 2.4, § 2.5, § 2.6 和 § 2.7 中关于各向异性和色散媒质中的时域有限差分法、高阶时域有限差分法和 ADI 时域有限差分法等内容;以及 § 4.8 中的 Berenger 完全匹配层法, § 7.6 中集总参数元器件的模拟和 § 8.9 中手机与人体的相互作用等内容。其他新增内容和修改之处还有很多,不再一一列举。

本书第一版出版以来,受到不少同行专家的关注和鼓励,也引起了许多青年学者和学生对本书所述内容的兴趣,有很多读者与笔者联系,讨论问题。所有这些对笔者从事修订工作起到了激励作用,在此对这些专家和学生表示深深谢意。

本书的修订工作是笔者在近几年于中国和美国两地交替生活期间逐渐完成

的。在此期间我们的儿女王海波和王海云、儿媳鹿军在美国为我们创造了良好的工作环境,并在收集资料方面给予了不少帮助。我们可爱的孙女 Anne 和 Claire、外孙女 Grace 的优秀表现,不仅使我们享受到了天伦之乐,而且在精神上也受到了鼓舞,让我们能更愉快地完成各项繁重工作。

尽管我们作了努力,但由于相关资料非常丰富,又不断有新的发展,这次修订仍会存在不少缺点,望读者批评指正。

编著者

2012 年 10 月于北京大学承泽园

第一版前言

由于需要解决的电磁场问题越来越复杂,电磁场的数值解法就更显得重要。电子计算机技术的飞速发展,又为数值计算提供了日新月异的有利条件。在这种情况下,电磁场的数值计算方法得到了迅速发展。在各种数值计算方法中,时域有限差分法近年来已引起了人们的高度重视。

在1986年本书作者应Om P. Gandhi教授的盛情邀请到美国犹他大学从事研究工作,第一次接触到时域有限差分法,从此对这一方法产生了浓厚的兴趣。在那时,时域有限差分法正处于走向成熟和扩大应用范围的阶段,在以后的几年又得到了迅猛的发展。回国后,由于深感这一方法对解决很多复杂的电磁场问题具有巨大意义,除了继续进行研究 and 应用外,还利用一切机会向国内同行们推荐介绍这一方法,希望尽快在国内得到推广应用。从那时起就萌发了一个想法,在时机成熟时写一本书详细介绍时域有限差分法的基本原理,对其应用进行系统的总结,并开始了积累和整理资料的工作。由于时域有限差分法正处于蓬勃发展的阶段,几乎每月都有新的成果出现,不仅应用范围不断扩大,而且方法本身也在不断发展。这种情况使写作遇到了矛盾:若很快成书,势必不能对这一方法进行完整的介绍;若等待它发展到一个适当的阶段,又不能满足尽快介绍推广的需要。本书定位在介绍基本原理和可能应用的主要方面及初步成果上,旨在推进时域有限差分法在我国的推广应用并发挥作用。

基于以上考虑,本书尽量详细地介绍了时域有限差分法的基本原理和应用的基本方法,希望使读者通过阅读本书就能很快地在实践中加以应用。本书的第一章介绍时域有限差分法产生和发展的背景,以及所具有的特点和应用的前景。第二章介绍时域有限差分格式的导出及其各种形式,还讨论了数值色散和稳定性等问题。第三章介绍了各种吸收边界条件和在计算中的应用。第四章叙述了平面波问题中网格空间总场区和散射场区的划分,讨论了平面波源的建立问题。第五章以散射问题为例介绍时域有限差分法的应用。第六章介绍时域有限差分法的最新发展。第七章到第九章分别介绍时域有限差分法在电磁剂量学、微波与光路的时域分析和天线辐射特性计算中应用的成果。

由于时域有限差分法可被用于解决广泛的电磁场问题,因此涉及电磁场工程

的诸多方面,本书不仅可供从事电磁场理论和数值计算的科技工作者参考,对从事天线、微波、电磁兼容、电磁散射、生物电磁学和电磁场生物医学应用的广大科技工作者及对上述问题有兴趣的研究生和高年级本科生也有一定的参考价值。

本书是介绍时域有限差分法的初步尝试,加上作者水平有限,不当之处和错误在所难免,希望读者批评指正。

编著者

1993 年 10 月

目 录

第一章	绪论	(1)
§ 1.1	现代电磁场问题的特点	(1)
§ 1.2	电磁场计算方法概述	(3)
§ 1.3	时域有限差分法的发展	(6)
§ 1.4	时域有限差分法的特点	(9)
§ 1.5	时域有限差分法的应用	(10)
第二章	时域有限差分法基本原理	(14)
§ 2.1	Yee 氏算法	(14)
§ 2.2	数值稳定性分析	(25)
§ 2.3	数值色散问题	(30)
§ 2.4	各向异性媒质中的差分格式	(34)
§ 2.5	适用于色散媒质的时域有限差分格式	(37)
§ 2.6	高阶时域有限差分法	(43)
§ 2.7	ADI-FDTD 法	(47)
第三章	网格剖分法的改进	(52)
§ 3.1	曲线坐标系中的时域有限差分法	(52)
§ 3.2	环路法和曲面模拟	(63)
§ 3.3	亚网格技术	(70)
§ 3.4	多重网格细化技术	(76)
§ 3.5	表面阻抗边界条件(SIBC)法	(80)
§ 3.6	介质薄层的模拟	(83)
第四章	开域问题中的吸收边界条件	(92)
§ 4.1	开放问题中吸收边界条件的必要性	(92)
§ 4.2	单向波方程和吸收边界条件	(93)
§ 4.3	几种近似吸收边界条件的性能	(98)
§ 4.4	吸收边界条件的差分格式	(100)
§ 4.5	Mur 吸收边界条件的数值验证	(105)
§ 4.6	超吸收边界条件	(112)
§ 4.7	几种可用于时域计算的吸收边界条件	(124)

§ 4.8	Berenger 完全匹配层	(130)
§ 4.9	各向异性完全匹配层	(138)
第五章	电磁波散射问题	(147)
§ 5.1	电磁波散射问题概述	(147)
§ 5.2	网格空间中散射体的 FDTD 模型	(149)
§ 5.3	总场、散射场和入射平面波	(152)
§ 5.4	稳态电磁波入射问题	(168)
§ 5.5	瞬态电磁波入射问题	(176)
§ 5.6	二维导体的散射问题	(178)
§ 5.7	三维导体的散射问题	(184)
§ 5.8	散射体对电磁脉冲的响应	(191)
§ 5.9	散射体内腔的电磁波透入问题	(196)
§ 5.10	介质体散射内场的计算	(199)
第六章	天线辐射问题	(204)
§ 6.1	时域有限差分法用于天线辐射问题	(204)
§ 6.2	圆柱和圆锥形单极天线	(205)
§ 6.3	喇叭天线	(212)
§ 6.4	微带天线	(217)
§ 6.5	天线特性参数的计算	(221)
第七章	微波和光波线路的时域分析	(226)
§ 7.1	时域有限差分法在微波线路分析中的特点	(226)
§ 7.2	均匀传输系统的色散特性	(227)
§ 7.3	微波电路分析中的色散吸收边界条件	(240)
§ 7.4	微带线非均匀性的时域分析	(244)
§ 7.5	本征值问题的时域分析	(251)
§ 7.6	集总参数元器件的模拟	(254)
§ 7.7	在光路分析中的应用	(256)
第八章	电磁波对人体作用的计算问题	(262)
§ 8.1	概述	(262)
§ 8.2	人体非均匀块状电磁模型	(265)
§ 8.3	稳态平面电磁波对人体的作用	(270)
§ 8.4	人体吸收电磁能量与平面波入射、极化方向及 人体姿态的关系	(277)
§ 8.5	工频电磁场对人体作用的计算问题	(281)

§ 8.6	脉冲电磁波对人体的作用	(284)
§ 8.7	辐射近场对人体的作用	(291)
§ 8.8	热疗系统的计算机模拟和辅助设计	(297)
§ 8.9	手机与人体的相互作用	(303)
第九章	时域多分辨分析法	(307)
§ 9.1	多分辨分析和小波正交基	(307)
§ 9.2	常用的小波正交基	(314)
§ 9.3	基于 Haar 小波基的时域多分辨分析法	(322)
§ 9.4	基于 Battle-Lemarie 小波基的时域多分辨分析法	(329)
§ 9.5	数值稳定性和数值色散分析	(336)
§ 9.6	时域多分辨分析法的应用	(339)
§ 9.7	基于双正交基的 MRTD	(341)
第十章	时域有限差分的并行化	(349)
§ 10.1	电磁场计算并行化研究的必要性和可行性	(349)
§ 10.2	并行算法设计和并行程序设计	(351)
§ 10.3	时域有限差分法的并行算法	(356)
§ 10.4	并行计算效率的验证	(360)
参考文献		(364)

第一章 绪 论

§ 1.1 现代电磁场问题的特点

现代技术的许多方面都与电磁场,尤其是高频电磁场有关,复杂的高频电磁系统的分析与综合,以及高频电磁场与复杂目标相互作用的分析和计算,都成为现代技术发展的重要课题.在通信、雷达、物探、电磁防护、电磁兼容、医疗诊断、战略防御以及工农业生产和日常生活的各个领域,高频电磁场的传输、辐射、散射和透入等问题,都起着非常重要的作用,有大量的课题需要深入研究.所有电磁场问题解决的最终要求是,求得满足实际条件的 Maxwell 方程的精确解答.获得封闭形式的解析解并给予正确的物理解释一向是人们所向往的解决问题的最佳结果.然而,只有一些典型几何形状和结构相对简单的问题才有可能求得严格的解析解.当代电磁场工程中高频电磁场问题的主要特点是电磁系统的高度复杂性.虽然对很多典型问题的解析分析仍然能帮助人们加深对电磁规律的认识,但作为工程问题的解决,解析方法往往无能为力.为了加深对现代电磁场问题特点的认识,我们以电磁散射问题为例加以说明.

现代的电磁系统大多是在一个非常复杂的环境中工作,电磁波与之作用的也往往是形状和结构上都极为复杂的系统.例如,很多电磁系统是在飞机、火箭或舰船上使用,而它们自身又作为电磁波与之作用的对象构成复杂的电磁散射系统.首先这些系统往往是电大的,亦即它们的线度往往要延伸数个波长或更多,其次其外形常常很不规则,包含多种形态的构件.它们的复杂性不仅表现在外形上,而且可能包括多种材料成分,并包括孔、缝、内腔和负载等各种内部结构.一个复杂的电磁系统中往往同时存在数种复杂的电磁物理过程,系统的结构对它的电磁特性有强烈的影响.下面就系统的形状、结构及入射电磁波本身的特性等方面略述高频电磁场散射问题的一些特点.

1. 与形态有关的电磁场运动的复杂性

电磁场理论所积累的丰富知识告诉我们,在不同形状的导电结构中会产生各种不同的电磁物理过程.下面是一些典型的物理现象:

- (1) 导电平面上的镜面效应;
- (2) 棱角处的奇异表面电流和衍射现象;
- (3) 弯曲表面的镜面效应及表面导(爬行)波;

- (4) 再入表面的边廊模;
- (5) 由长度、绕体或内腔引起的谐振现象.

2. 与构成材料有关的复杂因素

现代的电磁系统出于各种不同的需要而使用各种材料,如作为电磁窗口的雷达罩和作为隐身用的涂层就是由不同的材料构成.影响电磁特性的主要因素为:

- (1) 块状材料构件
 - 介电材料的介电常数和电导率;
 - 磁性材料的磁导率和磁损耗;
 - 复合材料的表面阻抗.
- (2) 影响表面电特性的材料
 - 层状或叠片性涂敷吸收性材料;
 - 各种原因造成的表面电特性的变化;
 - 表面弯曲或工程连接对材料特性的影响.

3. 表面孔、缝等形成的复杂电磁现象

电磁系统表面存在的孔或缝等均构成电磁波的耦合通道,这些因素不仅造成电磁波对系统内部的透入,同时也影响系统的外部特性.电磁波的透入渠道主要包括:

- (1) 特意设置的电磁窗口;
- (2) 座舱窗;
- (3) 引擎入口;
- (4) 组件搭接;
- (5) 随机造成的缝隙.

这些因素除了引起一般的耦合效应,还可能与邻近结构造成综合效应.由谐振效应引起的场的增强可能形成孔或缝隙中的击穿或打火现象,从而出现非线性效应.打火现象的出现可能减少电磁波的透入,也可能增加电磁波的耦合.

4. 内腔结构造成的复杂影响

现代电磁系统常常具有复杂的内腔结构,它们又可能通过孔或缝与外部相通.其内部可能存在各种复杂结构的负载,因而形成极为复杂的电磁现象.影响电磁特性的主要因素包括:

- (1) 作为谐振腔被激发,形成复杂的电磁振荡模式;
- (2) 腔的截止特性及其品质因数;
- (3) 沿腔内的导线或电缆激发起准 TEM 模,而把电磁能量输送到距入口较远的区域;
- (4) 多导体或电缆间的耦合现象;

(5) 各种负载的影响。

5. 入射波的复杂特性

现代电磁场工程中不仅关心稳态简谐电磁波的作用,还要关心核电磁脉冲(NEMP)、雷电和高能微波(HMP)的影响。后者属于瞬态电磁场。在研究瞬态电磁场与物体的作用时,不仅要考虑它的宽频带特性,而且物体的局域特性将起重要作用。此外,在一些问题中入射电磁波不仅有远场(平面波),有时还可能是辐射近场,在这种情况下必须了解近场的特性,而且还要考虑辐射源与物体之间的相互作用,使问题更加复杂。

电磁场工程涉及非常广泛的领域,包含着各种电磁场问题,上面仅就散射问题已经看到了现代电磁场工程中所需解决的电磁场问题的高度复杂性。简单的电磁模型已经远远不能满足现代电磁场工程的要求,必须考虑各种实际的复杂因素,这是一项非常困难的任务。为了满足解决电磁场工程中不断提出的各种复杂问题的需要,求解电磁场问题的方法也在不断地发展,并不断地出现更强有力的新方法。

§ 1.2 电磁场计算方法概述

在现代电磁场工程中,由于问题的复杂性,要求得封闭形式的解析解已经不可能,就是半解析的近似方法也只能在个别问题中得到有限的应用。能够较广泛发挥作用的,唯有各种数值方法。20世纪60年代以来随着电子计算机技术的发展,一些电磁场的数值计算方法发展了起来,并得到广泛的应用,其中主要有:属于频域技术的有限元法、矩量法和单矩法等;属于时域技术的时域有限差分法、传输线矩阵法和时域积分方程法等;属于高频技术的几何衍射理论和衍射物理理论等。各种方法都具有自己的特点和局限性,在实践中又经常把它们相互配合而形成各种混合方法。下面对以上计算方法进行简短的分类评述,以便更好地了解时域有限差分法的特点。

1. 直接频域法

直接频域法可以分为积分方程形式和微分方程形式。积分方程形式是把电磁场的作用作为边值问题来对待,对电场或磁场根据边界条件导出积分方程或积分-微分方程。但这些方程不具有一般性,不得不对具体的几何边界和材料特性进行再推导。矩量法是运用最广泛的解这类积分方程的近似方法,首先把积分方程转换为等效的矩阵方程,而后对矩阵方程进行求逆计算。这种方法适用于任意形状和非均匀性问题,但可能导致非常大的矩阵而且可能是病态的,使其应用范围受到了限制。近期采用快速 Fourier 变换(FFT)和共轭梯度法(CGM)等迭代技术,使得矩量法的应用范围得到了扩展。快速多极子方法(FMM)以及多层