



普通高等教育“十一五”规划教材
21世纪大学数学创新教材

丛书主编 陈 化

线 性 代 数

(第二版)

李书刚 编



科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材
21 世纪大学数学创新教材

丛书主编 陈 化

线 性 代 数

(第二版)

李书刚 编

科 学 出 版 社

北 京

版权所有，侵权必究

举报电话：010-64030229；010-64034315；13501151303

内 容 简 介

本书是根据作者多年来讲授线性代数课程的讲义整理编写而成的。全书共分六章，分别为行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值特征向量和方阵的对角化、二次型、线性空间与线性变换。各章均配有一定数量的习题，并选编了多年来数学(一)考研试题。

本书可作为高等学校教材，也可供考研复习使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李书刚编. —2版. —北京：科学出版社，2010.7

普通高等教育“十一五”规划教材. 21世纪大学数学创新教材

ISBN 978-7-03-028396-2

I. ①线… II. ①李… III. ①线性代数—高等学校—教材

IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 142475 号

责任编辑：高 嵘 / 责任校对：王望容

责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

京山德兴印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年8月第 一 版

2010年8月第 二 版 开本：B5 (720×1000)

2010年8月第二次印刷 印张：12 1/4

印数：5 001—8 000 字数：232 000

定价：19.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《21 世纪大学数学创新教材》丛书编委会

主 编 陈 化

常务副主编 樊启斌

副 主 编 吴传生 何 穗 刘安平

编 委 (按姓氏笔画为序)

王卫华 王展青 严国政 李 星

杨瑞琰 肖海军 罗文强 赵东方

黄樟灿 梅全雄 彭 放 彭斯俊

曾祥金 谢民育

丛 书 序

《21 世纪大学数学创新教材》为大学本科数学系列教材,大致划分为公共数学类、专业数学类两大块,创新是其主要特色和要求.经组编委员会审定,列选科学出版社普通高等教育“十一五”规划教材.

一、组编机构

《21 世纪大学数学创新教材》丛书由多所 985 和 211 大学联合组编:

丛书主编 陈 化

常务副主编 樊启斌

副 主 编 吴传生 何 穗 刘安平

丛书编委 (按姓氏笔画为序)

王卫华 王展青 严国政 李 星 杨瑞琰

肖海军 罗文强 赵东方 黄樟灿 梅全雄

彭 放 彭斯俊 曾祥金 谢民育

二、教材特色

创新是本套教材的主要特色和要求,创造双重品牌:

先进.把握教改、课改动态和学科发展前沿,学科、课程的先进理念、知识和方法原则上都要写进教材或体现在教材结构及内容中.

知识与方法创新.重点教材、高层次教材,应体现知识、方法、结构、内容等方面的创新,有所建树,有所创造,有所贡献.

教学实践创新.教材适用,教师好教,学生好学,是教材的基本标准.应紧跟和引领教学实践,在教学方法、教材结构、知识组织、详略把握、内容安排上有独到之处.

继承与创新.创新须与继承相结合,是继承基础上的创新;创新需转变为参编者、授课者的思想和行为,避免文化冲突.

三、指导思想

遵循国家教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会关于课程教学的基本要求,力求教材体系完整,结构严谨,层次分明,深入浅出,循序渐进,阐述精炼,富有启发性,让学生打下坚实的理论基础.除上述一般性要求外,还应具备下列特点:

(1) 恰当融入现代数学的新思想、新观点、新结果,使学生有较新的学术视野.

(2) 体现现代数学创新思维,着力培养学生运用现代数学软件的能力,使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到具体教学内容中的现代精

品教材.

(3) 在内容取舍、材料组织、叙述方式等方面具有较高水准和自身特色.

(4) 数学专业教材要求同步给出重要概念的英文词汇,章末列出中文小结,布置若干道(少量)英文习题,并要求学生用英文解答.章末列出习题和思考题,并列出可进一步深入阅读的文献.书末给出中英文对照名词索引.

(5) 公共数学教材具有概括性和简易性,注重强化学生的实验训练和实际动手能力,加强内容的实用性,注重案例分析,提高学生应用数学知识和数学方法解决实际问题的能力.

四、主编职责

丛书组编委员会和出版社确定全套丛书的编写原则、指导思想和编写规范,在这一框架下,每本教材的主编对本书具有明确的责权利:

1. 拟定指导思想

按照丛书的指导思想和特色要求,拟出编写本书的指导思想和编写说明.

2. 明确创新点

教改、课改动态,学科发展前沿,先进理念、知识和方法,如何引入教材;知识和内容创新闪光点及其编写方法;教学实践创新的具体操作;创新与继承的关系把握及其主客体融合.

3. 把握教材质量

质量是图书的生命,保持和发扬科学出版社“三高”、“三严”的传统特色,创出品牌;适用性是教材的生命力所在,应明确读者对象,篇幅要结合大部分学校对课程学时数的要求.

4. 掌握教材编写环节

(1) 把握教材编写人员水平,原则上要求博士、副教授以上,有多年课程教学经历,熟悉课程和学科领域的发展状况,有教材编写经验,有扎实的文字功底.

(2) 充分注意著作权问题,不侵犯他人著作权.

(3) 讨论、拟定教材提纲,并负责编写组的编写分工、协调与组织.

(4) 拟就内容简介、前言、目录、样章,统稿、定稿,确定交稿时间.

(5) 负责出版事宜,敦促编写组成员使用本教材,并优先选用本系列教材.

《21 世纪大学数学创新教材》组编委员会

2009 年 6 月

前 言

线性代数是一门应用十分广泛的数学学科,也是大学本科段许多专业的一门重要基础理论课程.线性代数为研究和处理涉及许多变元的线性问题提供了有力的数学工具,这一工具在工程技术、经济科学和管理科学中都有广泛的应用.学习本课程可掌握线性代数的基本概念、基本理论和基本方法,培养应用线性代数的基本思想和基本方法,分析和解决问题的能力.

本书包括行列式,矩阵,线性方程组,矩阵的特征值、特征向量和方阵的对角化,二次型,线性空间与线性变换等六章.各章习题均分为 A 类、B 类. A 类为基础题,对巩固所学的内容十分有益. B 类汇编了自 1987 年以来数学(一)考研试题中的线性代数方面的大部分题目,学有余力的同学可以选做部分题目提高自己的解题能力.

本书第一版经过了两年多的使用,教学效果良好,可以满足目前的教学需要.根据师生使用本书后所提的意见和建议,这次修订改写了一些内容,使之更方便教学.

由于编者水平有限,书中疏漏之处在所难免,恳请广大读者批评指正,以期不断完善.

编 者

2010 年 3 月

目 录

前言

第一章 行列式	1
第一节 二阶、三阶行列式	1
第二节 排列与逆序	6
第三节 n 阶行列式	8
第四节 行列式的性质	13
第五节 行列式的计算	18
第六节 行列式按一行(列)展开	23
第七节 克莱姆(Cramer)法则	30
习题一	35
第二章 矩阵	39
第一节 矩阵的概念	39
第二节 矩阵的运算	41
一、矩阵的加法和数与矩阵的乘法	42
二、矩阵的乘法	43
三、矩阵的转置	48
四、方阵的幂与方阵的多项式	49
第三节 分块矩阵	50
第四节 逆矩阵	55
第五节 初等矩阵	61
第六节 矩阵的秩	68
习题二	71
第三章 线性方程组	79
第一节 线性方程组的消元法	79
第二节 n 维向量空间	87
第三节 线性相关性	89
一、线性组合与线性表示	89
二、线性相关与线性无关	91
三、关于线性组合与线性相关的定理	96
四、向量组的秩	100

第四节 线性方程组解的结构	104
一、齐次线性方程组解的结构	104
二、非齐次线性方程组解的结构	108
习题三	112
第四章 矩阵的特征值、特征向量与方阵的对角化	120
第一节 向量的内积与正交向量组	120
第二节 矩阵的特征值与特征向量	125
第三节 相似矩阵与方阵的对角化	129
一、相似矩阵及其性质	129
二、 n 阶矩阵与对角矩阵相似的条件	130
三、实对称矩阵的对角化	132
习题四	137
第五章 二次型	141
第一节 二次型及其标准形	141
第二节 正定二次型	152
习题五	157
第六章 线性空间与线性变换	159
第一节 线性空间的概念与性质	159
第二节 线性空间的基与维数	161
第三节 线性变换	167
习题六	171
习题参考答案	173

第一章 行 列 式

第一节 二阶、三阶行列式

解方程是代数中一个基本的问题,为了研究一般的线性方程组的解,首先回忆一下中学里学过的解二元一次方程组与三元一次方程组的方法,由此引出二阶、三阶行列式的相关知识.先看下面的例子.

例 1 求解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$$

解 用代入消去法,在第二个方程中解出 y ,即 $y = 3x - 5$,代入第一个方程得到

$$2x + 3(3x - 5) = 7,$$

整理得 $11x = 22$,于是 $x = 2$.再将 $x = 2$ 代入 $y = 3x - 5$,求得 $y = 1$.于是上述方程组有唯一一组解

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

大家不难想象这种代入消去法也可以用来求解一般的三元一次线性方程组.这个方法虽然简单有效,但也有很大的局限性.局限之一,当未知数个数比较多时,运算会变得十分复杂,运算量也很大.比如,要求解一个有 100 个未知数的线性方程组,得先利用其中一个方程式将第一个未知数用其他 99 个未知数表示出来,再分别代入其余的方程式,使原方程组化成只有 99 个未知数的方程组,再用同样的办法得到一个只含有 98 个未知数的方程组.如此重复,一直做到只含有一个未知数的情形,这时求出这个一元一次方程的解,再返回去依次求出所有未知数来.局限之二是不能给出一个规范化的公式,这对于从理论上分析线性方程组带来极大的不便.

为了克服上述局限,我们来分析下列二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的解法. 用 a_{22} 乘第一式两边, 用 $-a_{12}$ 乘第二式两边, 再将两式相加, 得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 则

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

用类似办法消去 x_1 , 解得

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

我们注意到, 上面的解的分母由方程组的未知数的系数构成, 若把这 4 个系数按它们在方程组中的位置, 排成两行两列(横排称行, 竖排称列)的数表, 即用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为二阶行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

式中 a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} 称为二阶行列式的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标, 表明该元素位于第 i 行, 第二个下标 j 称为列标, 表明该元素位于第 j 列. 行列式中从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线, 从右上角到左下角的对角线称为行列式的副对角线. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为二阶行列式的值. 于是二阶行列式的值便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上的两元素之积所得的差.

利用二阶行列式的概念, 上述解中的分子也可以写成二阶行列式的形式, 即

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则上述二元一次方程组的解 x_1 , x_2 可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

上式即为二元一次线性方程组的求解公式. 值得注意的是分母 D 是由方程组的系数所确定的二阶行列式(称为**系数行列式**); x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 所得的二阶行列式; x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 所得的二阶行列式.

例 2 求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -3, \\ 2x_1 + x_2 = -2. \end{cases}$$

解 由于

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0,$$

所以该方程组有解, 且有

$$D_1 = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 - (-6) = 0.$$

因此, 方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-7}{7} = -1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{7} = 0.$$

类似地, 对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

表示的代数和式

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

称为三阶行列式的值.

上述定义表明三阶行列式的值可按图 1.1 的“对角线法则”计算. 其遵循的规律为三条实线看做是平行于主对角线的连线, 实线上连接的三个元素的乘积取正号; 三条虚线看做是平行于副对角线的连线, 虚线上连接的三个元素的乘积取负号. 然后取这六项之和即为三阶行列式的值.

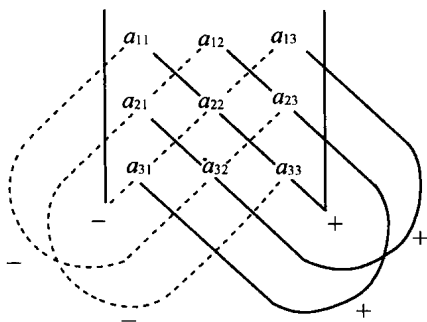


图 1.1

若令

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

可用对角线法则计算出 D_1, D_2, D_3 的值, 当系数行列式 $D \neq 0$ 时, 上述三元一次线性方程组的求解公式为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例 3 计算三阶行列式

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 按照对角线法则, 得

$$A = 1 \times 0 \times 1 + (-1) \times 4 \times 2 + 2 \times 3 \times 1$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \times 0 \times 2 - (-1) \times 3 \times 1 - 1 \times 4 \times 1 \\
 & = -3.
 \end{aligned}$$

例 4 解下列方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

解 按照对角线法则,得

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \times 4 \times 4 + (-1) \times (-2) \times 3 + (-1) \times 3 \times (-2) \\
 &\quad - (-1) \times 4 \times 3 - (-1) \times 3 \times 4 - 2 \times (-2) \times (-2) \\
 &= 60 \neq 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} \\
 &= 4 \times 4 \times 4 + (-1) \times (-2) \times 11 + (-1) \times 11 \times (-2) \\
 &\quad - (-1) \times 4 \times 11 - (-1) \times 11 \times 4 - 4 \times (-2) \times (-2) \\
 &= 180,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \times 11 \times 4 + (-1) \times 3 \times 11 + 4 \times (-2) \times 3 \\
 &\quad - (-1) \times 11 \times 3 - 4 \times 3 \times 4 - 2 \times (-2) \times 11 \\
 &= 60,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_3 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \times 4 \times 11 + 4 \times 3 \times (-2) + (-1) \times 11 \times 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -4 \times 4 \times 3 - (-1) \times 3 \times 11 - 2 \times 11 \times (-2) \\
 & = 60.
 \end{aligned}$$

因此,原方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{180}{60} = 3, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{60}{60} = 1, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{60}{60} = 1.$$

用行列式来表示二元一次方程组和三元一次方程组的解具有简单明了的优点,我们希望也能用它来将更一般的线性方程组的解表示出来,为此先介绍有关全排列的知识,然后引出 n 阶行列式的概念.

第二节 排列与逆序

作为定义 n 阶行列式的准备,我们先来讨论一下排列的性质.

定义 1 由 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

例如,1234 及 2341 都是 4 级排列,45321 是一个 5 级排列.

定义 2 在一个 n 级排列中,如果一对数的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,那么它们就称为一个逆序,一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数.

例如,4 级排列 2431 中,21, 31, 43, 41 是逆序,2431 的逆序数就是 4. 而排列 15321 的逆序数是 9.

排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数记为

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n),$$

如果排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 是奇数则称为奇排列,是偶数或 0 则称为偶排列.

前面提到的 4 级排列 2431 是偶排列,5 级排列 45321 是奇排列. 排列 $123 \cdots n$ 是一个 n 级排列,这个排列具有自然顺序,称为自然排列. 由于它的逆序数是 0,因此是偶排列. 其他的排列或多或少地会破坏自然顺序,逆序数是对这种破坏程度的一种刻画.

在一个排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中,如果仅将它的两个数码 i_s 与 i_t 对调,其他数码位置不变,得到另一个排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$,这样的变换,称为一个对换,记为对换 (i_s, i_t) .

例如,对排列 23451 施以对换 $(1, 4)$ 后得到排列 23154.

定理 1.1 任意一个排列经过一个对换后奇偶性改变.

证 先看一个特殊的情形,即对换的两个数在排列中是相邻的情形. 排列

$$\cdots \cdots jk \cdots \cdots \quad (1)$$

经过对换 (j, k) 变成

$$\cdots \cdots kj \cdots \cdots \quad (2)$$

这里“ $\cdots \cdots$ ”表示那些不动的数. 显然, 在排列(1)中如 j, k 与其他的数构成逆序, 则在排列(2)中仍然构成逆序, 如不构成逆序则在(2)中也不构成逆序, 不同的只是 j, k 的次序, 如果原来 j, k 组成逆序, 那么经过对换, 逆序数就减少一个; 如果原来 j, k 不组成逆序, 那么经过对换, 逆序数就增加一个. 不论增加 1 还是减少 1, 排列的逆序数的奇偶性总是变了. 因此, 在这个特殊的情形, 定理是对的. 再看一般的情形. 设排列为

$$\cdots \cdots ji_1i_2\cdots i_s k \cdots \cdots \quad (3)$$

经过对换 (j, k) , 排列(3)变成

$$\cdots \cdots ki_1i_2\cdots i_s j \cdots \cdots \quad (4)$$

不难看出, 这样一个对换可以通过一系列的相邻数的对换来实现. 从(3)出发, 把 k 与 i_s 对换, 再与 i_{s-1} 对换 $\cdots \cdots$ 也就是说, 把 k 一位一位地向左移动, 经过 $s+1$ 次相邻位置的对换, 排列(3)就变成

$$\cdots \cdots kji_1i_2\cdots i_s \cdots \cdots \quad (5)$$

从(5)出发, 再把 j 一位一位地向右移动, 经过 s 次相邻位置的对换, 排列(5)就变成了(4). 因此 j, k 对换可以通过 $2s+1$ 次相邻位置的对换来实现. $2s+1$ 是奇数, 相邻位置的对换改变排列的奇偶性. 因此排列(3)(4)的奇偶性相反. $\square$

定理 1.2 由 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个自然数组成的 n 级排列一共有 $n!$ 个, 其中奇偶排列各占一半. 任意一个 n 级排列都可以经过一系列对换变为自然排列, 并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

证 n 级排列总数为 $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!$, 设其中奇排列为 p 个, 偶排列为 q 个. 设想将每一个奇排列都施以同一的对换, 例如都作对换 $(1, 2)$, 则由定理 1 可知 p 个奇排列全部变为偶排列, 于是 $p \leq q$; 同理, 如将全部偶排列也都施以同一对换, 则 q 个偶排列全部变为奇排列, 于是又有 $q \leq p$, 所以得出 $p = q$, 即奇偶排列数相等, 各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

我们通过对排列的级数作数学归纳法, 来证明任意一个 n 级排列都可以经过一系列对换变成 $12 \cdots n$.

1 级排列只有一个, 结论显然成立.

假设结论对 $n-1$ 级排列已经成立, 现在来证对 n 级排列的情形结论也成立.

设 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 级排列, 如果 $j_n = n$, 那么根据归纳法假设, $n-1$ 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_{n-1}$ 可以经过一系列对换变成 $12 \cdots (n-1)$, 于是这一系列对换也就把 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 变成 $12 \cdots n$. 如果 $j_n \neq n$, 那么对 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 作对换 (j_n, n) , 它就变成 $j'_1 j'_2 \cdots j'_{n-1} n$, 这就归结成上面的情形, 因此结论普遍成立. $\square$

例 1 求排列 45312 的逆序数.

解 在排列 45312 中, 4 排在首位, 逆序数为 0; 5 前面没有比它本身更大的数, 故逆序数为 0; 3 前面比 3 大的数有两个即 4 和 5, 故逆序数为 2; 1 前面的数都比 1 大, 故逆序数为 3; 2 前面比 2 大的数为 4, 5 和 3, 故逆序数为 3. 于是这个排列的逆序数为

$$N(45312) = 0 + 0 + 2 + 3 + 3 = 8.$$

例 2 如果排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数为 s , 排列 $i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$ 的逆序数是多少?

解 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中任意两个不同的数码 i_j 和 i_k 必在且仅在 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 或 $i_n i_{n-1} \cdots i_1$ 中之一构成一个逆序, 同时这两个排列的逆序总数为

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2},$$

因此, $i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$ 的逆序数为

$$N(i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1) = \frac{n(n-1)}{2} - s.$$

第三节 n 阶行列式

为了给出 n 阶行列式的定义, 先来研究二阶、三阶行列式的结构. 由于

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

所以不难看出:

(1) 二阶行列式表示所有不同的行不同的列的两个元素乘积的代数和. 两个元素的乘积可以表示为