中等专业学校试用教材

财经类专业通用

数　学

上　册

高等教育出版社

中等专业学校试用教材

财经类专业通用

数　　学

上　　册

高等教育出版社

中等专业学校试用教材
财经类专业通用
数　学
上　册
*
高等教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
崇明红卫印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/32　印张 7　字数 168,000
1981 年 12 月第 1 版　1987 年 3 月第 9 次印刷
印数 613,001—673,000
书号 13010·0699　定价 0.84 元

前　言

本书是根据教育部制订的《中等专业学校财经类专业通用数学教学大纲(试行草案)》编写的. 此书为上册. 主要内容为：极限，连续，导数与微分，不定积分，定积分，微分方程等.

本书可供具有高中毕业程度的，二年制财经中专学生用作教材.

序　言

本教材是在东北、华北地区中等财政(经济、金融、贸易)学校内部试用教材的基础上，根据教育部制定的《中等专业学校财经类专业通用数学教学大纲(试行草案)》编写的，由沈阳市财经学校主编. 参加教材初稿编写的有沈阳市财经学校赵长骥、周作光、吴素文、辽宁省阜新财经学校刘大明、山西省财贸学校郭太昌同志.

本教材分上、下两册. 上册包括微积分与微分方程初步；下册一分册包括概率、数理统计，二分册包括线性代数和线性规划初步.

本教材可供招收高中毕业生的二年制财经类中等专业学校使用. 带※号的内容系供选学之用.

由于编者水平所限，加之时间仓促，因此，教材在内容配合上、联系专业实际上、系统性和逻辑性上都难免出现各种问题，甚至是错误，诚恳希望大家批评指正，以便今后修改.

编　者

一九八一年十月廿七日

目　　录

第一章　函数、极限与连续

§1　函数 ……1
§2　数列的极限 ……10
§3　函数的极限 ……15
§4　无穷小与无穷大 ……21
§5　极限运算法则 ……26
§6　极限存在的准则，两个重要极限 ……31
§7　函数的连续性 ……36
习题一 ……46

第二章　导数与微分

§1　导数概念 ……51
§2　几个初等函数的导数 ……54
§3　函数的和、积、商的导数 ……58
§4　反函数的导数 ……61
§5　复合函数的导数 ……63
§6　由参数方程确定的函数的导数 ……65
§7　隐函数及其导数 ……66
§8　高阶导数 ……67
§9　微分及其与导数的关系 ……69
§10　微分形式的不变性 ……71
§11　微分在近似计算上的应用 ……73
习题二 ……74

第三章　中值定理　导数的应用

§1　中值定理 ……79
§2　罗比达(L'Hospital)法则 ……82
§3　泰勒(Taylor)公式 ……85
§4　函数单调性判定 ……87

§5 函数的极值……89
习题三……93
第四章 不定积分
§1 原函数与不定积分概念……97
§2 基本积分表 不定积分性质……101
§3 换元积分法……105
§4 分部积分法……115
§5 有理分式的积分……118
§6 积分表的使用……122
习题四……124
第五章 定积分
§1 定积分的概念……127
§2 定积分的基本性质……134
§3 定积分与不定积分的关系……136
§4 定积分的计算……138
§5 广义积分……142
§6 定积分应用举例……145
※§7 定积分的近似计算……154
习题五……160
※第六章 微分方程
§1 微分方程的一般概念……164
§2 一阶微分方程……169
§3 高阶微分方程……181
习题六……186
附录 基本积分表……189
习题答案……202

第一章　函数、极限与连续

§1 函　　数

函数是反映变量间依从关系的一个重要数学概念．在函数概念中涉及到两个集合，即函数的定义域和值域，以及这两个集合的元素之间的对应关系．我们所研究的函数的定义域和值域都属于实数的集合，因此，函数可定义如下：

定义　设 E 和 M 是两个实数的集合，如果按照某种对应关系 f，E 的每一个元素 x，在 M 中都有唯一确定的元素 y 和它对应，则说在集合 E 上定义了一个**函数**，记作 $y=f(x)$．

集合 E 称为函数的**定义域**，与 x 相对应的 y 值称为**函数值**，函数值的集合称为函数的**值域**．

例如，$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ 的定义域是使 $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ 有意义的所有实数 x 的集合．因使 $\sqrt{x+1}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x;\ x\geqslant -1\}$，使 $x-1\neq 0$ 的实数 x 的集合是 $\{x;\ x\neq 1\}$，所以函数 $f(x)$ 的定义域是

$$\{x;\ x\geqslant -1\}\cap\{x;\ x\neq 1\}=\{x;\ x\geqslant -1,\ x\neq 1\},$$

即区间 $[-1,\ 1)$ 和 $(1,\ +\infty)$．

知道了函数的定义域和对应关系，则对于函数定义域中的每一个 x 值都能求得所对应的函数值．函数 $f(x)$ 当 $x=a$ 时的函数值用 $f(a)$ 表示．例如 $y=f(x)=\sin x$，则 $f(\pi)=\sin\pi=0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$．

又如，$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}$ 则

$$f(0)=0,\ f(-1)=0,\ f(-\pi)=0,$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5},\ f(5)=5,\ f(\pi)=\pi,$$

等等.

在研究函数时，一般总是假定函数定义在某个区间上. 以后我们将经常用到邻域这一概念.

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，满足不等式

$$|x-a|<\delta$$

的所有实数 x 的集合叫做点 a 的 δ 邻域，点 a 叫做这个邻域的中心，δ 叫做这个邻域的半径. 上述不等式与不等式

$$-\delta<x-a<\delta \quad 或 \quad a-\delta<x<a+\delta$$

等价，因此满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的所有实数 x 集合就是开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$. 所以点 a 的 δ 邻域也就是以点 a 为中心长度为 2δ 的开区间.

在生产实践和科学实验中，由实际问题概括、抽象出来的函数关系是多种多样的，其中能用公式表示而且应用最广泛的是以下五种：

幂函数 $y=x^n$ （n 为任意实数）；

指数函数 $y=a^x$ （$a>0,\ a\neq 1$）；

对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0,\ a\neq 1$）；

三角函数 $y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\operatorname{tg} x,\ y=\operatorname{ctg} x$；

反三角函数 $y=\arcsin x,\ y=\arccos x,$

$y=\operatorname{arc\,tg} x,\ y=\operatorname{arc\,ctg} x.$

这五种函数又能以一定方式构成各种函数，因此，这五种函

数统称为基本初等函数.

基本初等函数是研究更复杂的函数的基础，因此掌握基本初等函数的性质是很必要的.

在中学，我们已经学习了函数的单调性、奇偶性、周期性等性质. 在以后学习中，还将用到函数的有界性.

定义 设 $f(x)$ 是定义在集合 E 上的函数. 如果存在一个正数 m，使得对于任意的 $x\in E$，都有 $|f(x)|\leqslant m$，则称函数 $f(x)$ 为有界函数. 否则称 $f(x)$ 为无界函数. 如果存在一个数 l，使得对任意的 $x\in E$，都有 $f(x)\geqslant l$，则称函数 $f(x)$ 为有下界；如果存在一个数 l，使得对任意的 $x\in E$，都有 $f(x)\leqslant l$，则称函数 $f(x)$ 为有上界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的，因为 $|\sin x|\leqslant 1$ 对于任意的实数 x 都成立；函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有下界，在区间 $(-\infty, 0)$ 内有上界.

为了以后学习上的方便，现将五种基本初等函数的主要性质概述如下：

1. 幂函数

函数 $y=x^n$ (n 为实数) 叫做幂函数，它的定义域随 n 的不同而异，但在区间 $(0, +\infty)$ 内无论 n 为何值，函数总是有定义的. 幂函数的性质在 $n>0$ 时与 $n<0$ 时是很不相同的.

例如图 1-1 和图 1-2 分别是 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 和 $y=x^{-\frac{3}{2}}$ 的图象.

当 $n>0$ 时，$y=x^n$ 有下列共同性质.

(1) 图象通过点 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$；

(2) 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数.

当 $n<0$ 时，$y=x^n$ 有下列共同性质：

(1) 图象通过点 $(1, 1)$；

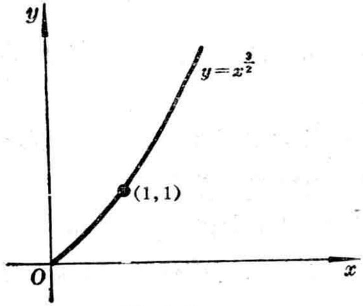

图 1-1

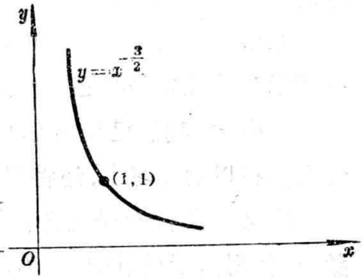

图 1-2

(2) 在区间$(0, +\infty)$上是减函数且有下界.

2. 指数函数

函数 $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ 叫做指数函数，它的定义域是全体实数，图 1-3 为 $y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象. 指数函数有下列性质：

(1) 恒有 $y>0$，所以图象在 x 轴上方；

(2) 不论 a 为任何正数，$x=0$ 时，$y=1$，所以图象通过点 $(0, 1)$；

(3) $a>1$ 时，$y=a^x$ 是增函数；$a<1$ 时，$y=a^x$ 是减函数.

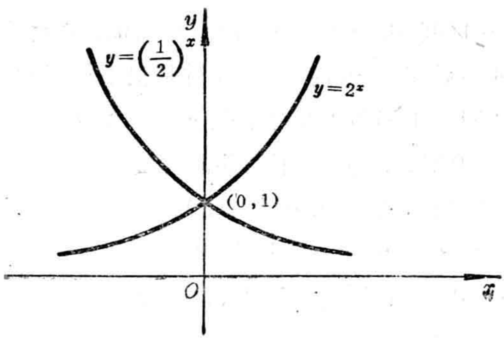

图 1-3

3. 对数函数

函数 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$ 叫做对数函数，对数函数的定义域是区间 $(0,\ +\infty)$，图 1-4 是 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象.

对数函数有下列性质：

(1) 函数的值域是 $(-\infty,\ +\infty)$，$y=\log_a x$ 是无界函数；

(2) 图象在 y 轴右方且通过点 $(1,\ 0)$；

(3) $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 是增函数；$a<1$ 时，$y=\log_a x$ 是减函数.

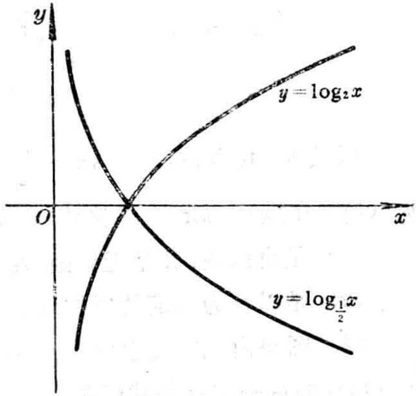

图 1-4

4. 三角函数

函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\mathrm{tg}\, x$，$y=\mathrm{ctg}\, x$ 是四个基本的三角函数.

函数 $y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 的定义域都是 $(-\infty,\ +\infty)$，它们具有下列性质：

(1) 值域都是 $[-1,\ 1]$，是有界函数，有最大值和最小值；

(2) 它们都是以 2π 为周期的周期函数；

(3) $y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数.

$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图象如图 1-5 和图 1-6.

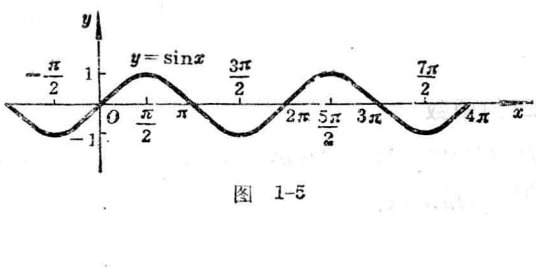

图 1-5

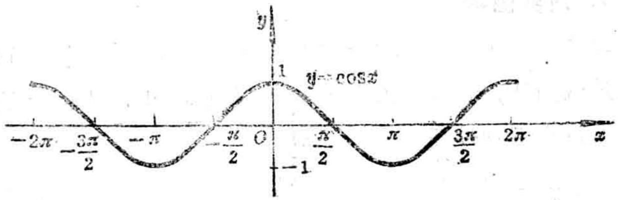

图 1-6

函数 $y=\operatorname{tg} x$ 在点 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ (k 是整数) 处无定义. 函数 $y=\operatorname{ctg} x$ 在点 $x=k\pi$ (k 是整数)处无定义. 它们具有以下性质:

(1) 是奇函数,又是无界函数;

(2) 是以 π 为周期的周期函数;

(3) 图象由无穷支组成, $y=\operatorname{tg} x$ 的每一支都是增函数; $y=\operatorname{ctg} x$ 的每一支都是减函数.

$y=\operatorname{tg} x$ 和 $y=\operatorname{ctg} x$ 的图象如图 1-7 和图 1-8.

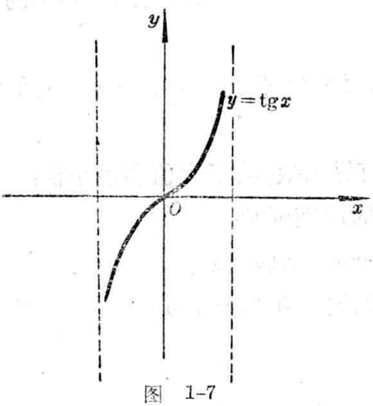

图 1-7

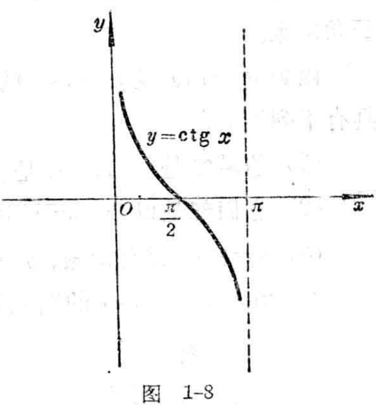

图 1-8

5. 反三角函数

函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arc\,tg} x$, $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ 是四个基本的反三角函数.

函数 $y=\arcsin x$ 和 $y=\arccos x$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$. 它们具有如下性质:

(1) 都是有界函数. $y=\arcsin x$ 的值域是 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y=\arccos x$ 的值域是 $[0, \pi]$;

(2) 都是单调函数. $y=\arcsin x$ 是 $[-1, 1]$ 上的增函数, $y=\arccos x$ 是 $[-1, 1]$ 上的减函数.

$y=\arcsin x$ 和 $y=\arccos x$ 的图象如图 1-9 和图 1-10.

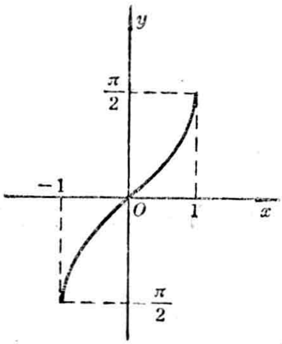

图 1-9

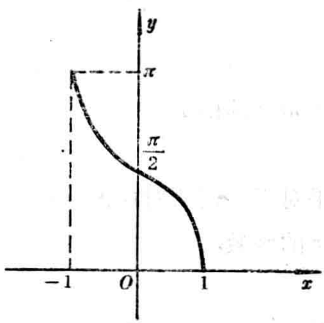

图 1-10

函数 $y=\operatorname{arc\,tg} x$ 和 $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$. 它们具有下列性质:

(1) 都是有界函数. $y=\operatorname{arc\,tg} x$ 的值域是 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ 的值域是 $(0, \pi)$;

(2) 都是单调函数. $y=\operatorname{arc\,tg} x$ 是增函数, $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ 是减函数.

$y=\operatorname{arc\,tg} x$ 和 $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ 的图象如图 1-11 和 1-12.

定义

设 y 是 z 的函数:

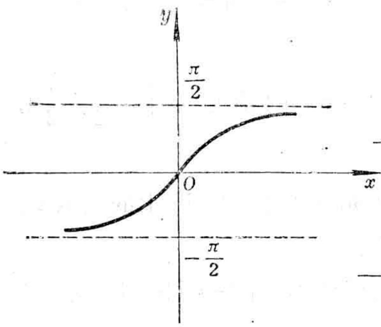

图 1-11

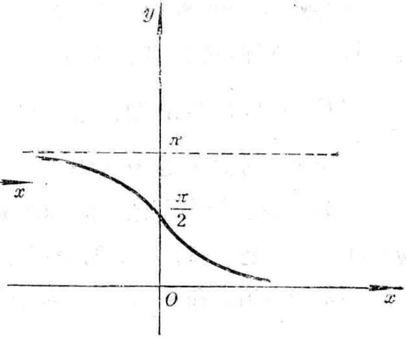

图 1-12

$$y=f(z),$$

而 z 是 x 的函数:

$$z=\varphi(x),$$

如果对于 x 值所对应的 z 值, 函数 $y=f(z)$ 是有定义的, 则 y 成为 x 的函数:

$$y=f[\varphi(x)],$$

此时称 y 是 x 的复合函数, z 称为中间变量.

例如 $y=1+z^2$, $z=\sin x$, 则 $y=1+\sin^2 x$ 就是 x 的复合函数.

又如 $y=\log_a\sqrt{x}$ 是由函数 $y=\log_a z$, 函数 $z=\sqrt{x}$ 所构成的复合函数.

在复合函数定义中, "如果对于 x 值所对应的 z 值, 函数 $y=f(z)$ 是有定义的" 这句话是很重要的, 如果对于 x 值所对应的 z 值, 函数 $y=f(z)$ 没有定义, 那么 $y=f[\varphi(x)]$ 就没有意义.

例如 $y=\arcsin z$, $z=2+x^2$, 则 $y=\arcsin(2+x^2)$ 就没有意义. 因为反正弦函数的定义域是 $[-1, +1]$, 而 $2+x^2$ 的值大于 1.

复合函数的中间变量，可以不止一个．例如设 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$，则 $y=f(u)=f[\varphi(v)]=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 是由两个中间变量 u，v 所成的 x 的复合函数．

必须注意“复合函数”这个名称只是表明函数的一种表达方式，而不是一类新的函数．

例 1 分别指出下列函数是由那几个函数复合而成的．

(1) $y=\sin 3x$; (2) $y=5^{\ln\sin x}$;

(3) $y=\operatorname{tg}^5\sqrt[3]{\ln\arcsin x}$.

解：(1) 设 $y=\sin u$，$u=3x$，则 $y=\sin 3x$ 是由 $y=\sin u$，$u=3x$ 复合而成的；

(2) 设 $y=5^u$，$u=\ln v$，$v=\sin x$，则 $y=5^{\ln\sin x}$ 是由 $y=5^u$，$u=\ln v$，$v=\sin x$ 三个函数复合而成的；

(3) 设 $y=u^5$，$u=\operatorname{tg} v$，$v=\sqrt[3]{w}$，$w=\ln z$，$z=\arcsin x$，则 $y=\operatorname{tg}^5\sqrt[3]{\ln\arcsin x}$ 是由上面五个函数复合而成的．

例 2 求下列复合函数的定义域．

(1) $y=\arcsin 2x$; (2) $y=\sqrt{\ln x}$.

解：(1) 因 $y=\arcsin 2x$ 是由 $y=\arcsin z$，$z=2x$ 复合而成的，而 $y=\arcsin z$ 的定义域是 $-1\leqslant z\leqslant 1$，所以 $y=\arcsin 2x$ 的定义域是 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，即 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

(2) 因 $y=\sqrt{\ln x}$ 是由 $y=\sqrt{z}$，$z=\ln x$ 复合而成的，而 $y=\sqrt{z}$ 的定义域是 $z\geqslant 0$，所以 $y=\sqrt{\ln x}$ 的定义域是 $[1,+\infty)$.

凡是由常数和基本初等函数经过有限次算术运算，以及有限次复合而构成，并能用一个数学式子表示的函数，都属于初等函数．

多项式 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

(其中 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 都是实常数)是最简单的初等函数，它的定义域是实数集 R. 多项式又叫做有理整函数.

由有理分式

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

(其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式) 所表示的函数叫做有理函数. 例如: $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{x^2+1}{x-1}$, $y=\frac{2x-1}{x}$ 都是有理函数. 显然多项式也是有理函数.

有理函数的形式比较简单，一般不再把它们分解开来研究，可以和五种基本初等函数一起作为分析其它复杂的初等函数的基础.

§2 数列的极限

定义 以自然数集合为定义域的函数，将函数值按自变量增大顺序排列起来的一列数，叫做数列，表为

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots. \tag{1}$$

(1)中的每一个数 x_n, 叫做数列的项. x_n 是表示当自变量是自然数 n 时所对应的函数值，可写为

$$x_n=f(n) \quad (n=1, 2, 3, \cdots),$$

第 n 项 x_n 也叫做数列的通项.

数列(1)可以简单的表为$\{x_n\}$.

例如: (i) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$; 即 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$;

(ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$; 即 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$;

(iii) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{(-1)^n}{n}, \cdots$; 即 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$;