西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

研究生创新教育系列教材

国家自然科学基金资助项目
教育部博士点基金资助项目

分数阶混沌电路理论及应用

刘崇新

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大學

研究生创新教育系列教材

国家自然科学基金资助项目（编号：51177117）
教育部博士点基金资助项目（编号：20100201110023

分数阶混沌电路理论及应用

刘崇新

西安交通大学出版社
·西　安·

内容简介

本书是为研究生编写的一本介绍分数阶混沌电路理论及其应用的基础教材。全书共分为6章,主要内容有:混沌理论简介与举例,分数阶微积分基本理论,分数阶微积分的运算与分数阶混沌系统分析,分数阶混沌电路的实现,分数阶超混沌系统的分析与其振荡器电路实现,分数阶混沌系统的同步与控制。

本书立足于我国研究生分数阶微积分应用和非线性电路理论及应用中的分数阶混沌电路理论教学实际,以及国外非线性科学中关于分数阶微积分应用研究的发展,为了增强我国研究生关于分数阶微积分理论应用和分数阶混沌电路理论素养,培养研究生的创新意识,培养研究生分析新的电子电气理论问题和解决电子电气实际工程中疑难问题的能力,介绍了本课题组多年的研究结论和国内外分数阶混沌电路的理论成果。

本书内容丰富,简明扼要,理论新颖,实验明确,便于研究生和有关科技人员自学。本书可供高等学校电子与电气信息类研究生作为非线性电路理论及应用学习的补充教材使用,也可供有关科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

分数阶混沌电路理论及应用/刘崇新编著. 一西安:西安交通大学出版社,2011.9

ISBN 978-7-5605-3886-0

Ⅰ.①分… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①混沌学-应用-电路理论 Ⅳ.①TM13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第047765号

书　　名 分数阶混沌电路理论及应用
编　　著 刘崇新
责任编辑 张　梁

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号　邮政编码710049)
网　　址 http://www.xjtupress.com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 陕西新世纪印刷厂

开　　本 727mm×960mm　1/16　**印张** 16.125　**字数** 296千字
版次印次 2011年9月第1版　2011年9月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5605-3886-0/TM・83
定　　价 35.00元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248　(029)82665249
投稿热线:(029)82664954
读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

《研究生创新教育》总序

创新是一个民族的灵魂，也是高层次人才水平的集中体现。因此，创新能力的培养应贯穿于研究生培养的各个环节，包括课程学习、文献阅读、课题研究等。文献阅读与课题研究无疑是培养研究生创新能力的重要手段，同样，课程学习也是培养研究生创新能力的重要环节。通过课程学习，使研究生在教师指导下，获取知识的同时理解知识创新过程与创新方法，对培养研究生创新能力具有极其重要的意义。

西安交通大学研究生院围绕研究生创新意识与创新能力改革研究生课程体系的同时，开设了一批研究型课程，支持编写了一批研究型课程的教材，目的是为了推动在课程教学环节加强研究生创新意识与创新能力的培养，进一步提高研究生培养质量。

研究型课程是指以激发研究生批判性思维、创新意识为主要目标，由具有高学术水平的教授作为任课教师参与指导，以本学科领域最新研究和前沿知识为内容，以探索式的教学方式为主导，适合于师生互动，使学生有更大的思维空间的课程。研究型教材应使学生在学习过程中可以掌握最新的科学知识，了解最新的前沿动态，激发研究生科学研究的兴趣，掌握基本的科学方法；把教师为中心的教学模式转变为以学生为中心教师为主导的教学模式；把学生被动接受知识转变为在探索研究与自主学习中掌握知识和培养能力。

出版研究型课程系列教材，是一项探索性的工作，也是一项艰苦的工作。虽然已出版的教材凝聚了作者的大量心血，但毕竟是一项在实践中不断完善的工作。我们深信，通过研究型系列教材的出版与完善，必定能够促进研究生创新能力的培养。

西安交通大学研究生院

前　言

分数阶混沌电路理论是应用分数阶微积分来研究混沌动力学系统及其混沌电路的拓扑结构与振荡机理，是非线性科学领域研究的一个重大的前沿课题。分数阶微积分与整数阶微积分不同，人们都知道整数阶微积分是研究整数阶次的微分、积分算子特性及其在整数阶工程系统应用的一个极其重要的高等数学工具，而且整数阶微积分已在实际工程和人们的日常生活中得到了广泛的应用，但是分数阶微积分则是研究任意阶次的微分、积分算子特性及其在各个工程领域应用的数学分支。近年来，人们发现分数阶微积分更能确切、真实地揭示和描绘自然界一些物理现象极其本质，分数阶微积分更是用来研究非线性混沌动力学系统和混沌电路的又一有力的数学工具。随着非线性科学研究的发展，分数阶混沌电路理论将会为非线性科学研究和计算增添新的内容、新的理论分析以及新的计算方法。

分数阶混沌电路理论是非线性电路理论分析的发展，是非线性科学领域研究的一个重要分支。本书是介绍分数阶混沌电路理论分析和应用的一本基本教材，全书共分为 6 章。

第 1 章为混沌理论简介与举例，主要介绍混沌理论的起源与发展，混沌的主要特征和数学定义，混沌振荡的几种判据与准则，具有 z^2 项的新的三维自治混沌动力学系统，具有 y^2 项的新的三维自治混沌动力学系统，具有 yz 和 xz 项的新的三维自治混沌动力学系统，四阶自治超混沌动力学系统，具有 z^2 项的新的四阶自治超混沌动力学系统，具有 yz 项的新的四阶自治超混沌动力学系统。

第 2 章为分数阶微积分基本理论，主要介绍分数阶微积分理论的产生与发展，分数阶微积分的基本理论，分数阶微积分的基本性质。

第 3 章为分数阶微积分的运算与分数阶混沌系统分析，主要介绍分数阶微积分的拉普拉斯(Laplace)变换，分数阶微积分的近似算法，分数阶系统数值仿真，具有三个二次项的三维 Liu 混沌系统基本分析，新型三维 Liu 混沌系统的分数阶描述，计算分数阶微积分的预估-校正法。

第 4 章为分数阶混沌电路的实现，主要介绍分数阶 Liu 混沌系统的 EWB 仿真及链型电路实验，分数阶 Liu 混沌系统的 EWB 仿真及树型电路实验，分数阶 Liu 混沌系统的 EWB 仿真及混合型电路实验，新型三维 Liu 混沌系统的分数阶电路设计与实验。

第 5 章为分数阶超混沌系统的分析与其振荡器电路实现，主要介绍一个新奇

的超混沌系统及其分数阶电路实验，由 Liu 系统演化的一种四维自治超混沌系统的分数阶电路实现，一个新的超混沌反结构 Liu 系统的分数阶电路实现，分数阶超混沌系统的数值计算。

第 6 章为分数阶混沌系统的同步与控制，主要介绍分数阶混沌系统的同步分析，利用驱动-响应控制法实现分数阶 Liu 系统的同步(控制)，分数阶 Liu 混沌系统同步的电路实验，分数阶 Liu 混沌系统的一种线性反馈控制，新型分数阶 Liu 混沌系统混合电路控制分析，基于分数阶混沌系统的广义同步理论分析，分数阶混沌系统完全状态投影同步。

本书的出版还得到了西安交通大学研究生院的资助和支持，谨在此表示感谢。西安交通大学韩崇昭教授和郑州大学高金峰教授在百忙中对本书进行了仔细审阅和修改，作者表示诚挚的感谢，并感谢课题组的研究生逯俊杰、陈向荣、王发强、刘凌、许喆、李铭、李莉等对本书的编写作出的贡献。本书是作者对课题组关于非线性科学研究与探索以及分数阶混沌电路理论分析和实验研究工作成果的有关归纳和综合，在此对本书所引用参考文献的作者以及所有从事非线性科学和分数阶研究的学者谨表谢意。限于作者的水平和经验，本书中不妥和错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

目　录

第1章　混沌理论简介与举例

非线性动力学是研究非线性系统动态行为和基本机理的一门基础科学，而非线性动力学领域中的混沌学(Chaology)则是研究非线性系统中混沌动力学行为的一门基础科学。非线性动力学系统中的混沌学基本思想起源于20世纪初，20世纪60年代以后才真正引起了人们的广泛重视和深入研究，从而形成了一门正在蓬勃发展的非线性科学研究的新的理论体系。混沌理论被认为是在确定性的非线性动力学系统中，不需要附加任何的随机因素，而在一定的条件下呈现出类似随机但又遵循一定自然规律的复杂动力学振荡行为。混沌理论揭示了自然界有序与无序的统一、确定性与随机性的统一、整数维数与分数维数的统一，使人们对神奇的自然规律的认识有了新的升华，成为人们认识自然界的一种全新的宇宙观。但是人们对自然界的认识随着自身知识的增长而不断深化，以往人们认识自然界通常是从整数阶的观点来分析和研究问题，然而自然界并不是整数维的，而是分数维的，人们要认识自然界的本质，要进一步改造自然，要进一步推动科学的发展，就要从分数阶的观点来分析和研究问题，以期揭示自然界的本质和发展的基本规律。

1.1　混沌理论的起源与发展

所谓混沌，在古代人们通常理解为混乱、无序、未分化，如所谓“混沌者，言万物相混成而未相离”(《易经》)。混沌最初进入科学领域是与以精确著称的数理科学研究无缘的，它主要是天文学中一个与宇宙起源有关的概念，来源于神秘的神话传说与有趣的哲学思辨。随着人类文明的不断进步，科学技术的飞速发展，人类对自然界复杂而丰富的非线性现象有了新的认识。因此，在现代科学技术中，混沌一词才被赋予了新的涵义，被认为是指在确定性的非线性动力学系统中，不需要附加任何随机因素亦可出现的类似于随机行为的振荡现象。

1963年，美国麻省理工学院著名的气象学家 E. N. Lorenz 发表了著名的《确定性的非周期流》一文。文章指出，确定性的系统可以表现出随机行为，这一论点打破了拉普拉斯决定论的经典理论，以至于许多科学家都对于这一奇特现象无法解释。后来通过各国科学家持续不断的深入研究和探索，人们才认识到 Lorenz 所

提出的决定论非周期流现象其实就是自然界普遍存在的一种混沌现象，因此 Lorenz 本人也被誉为"混沌之父"。

1971 年，法国数学物理学家 D. Ruell 和荷兰数学家 F. Takens 一起发表了著名论文《论湍流的本质》，在学术界首次提出用混沌来描述湍流形成机理的新观点，并为耗散系统引入了"奇怪吸引子"这一概念。

1975 年，美籍华人学者李天岩和美国数学家约克(J. Yorke)在《美国数学月刊》上联合发表了著名论文《周期 3 意味着混沌》，深刻地揭示了从有序到混沌的演变过程，在文中首次提出 Chaos 这个新的科学名词，并首次给出了混沌(Chaos)的数学定义，该数学定义为后来的学者所广泛接受和认可。

1976 年，美国数学生态学家梅(R. May)在美国《自然》杂志上发表了题为《具有复杂动力学过程的简单数学模型》的综述文章，以单峰映射为对象，重点讨论了 Logistic 方程，向人们揭示了生态学中一些简单的确定性的数学模型也能产生倍周期分岔和复杂的混沌运动，从而促进了不同领域混沌研究的交流。

1977 年，第一次国际混沌会议在意大利召开，标志着混沌学研究在国际科学界正式起步。

1978—1979 年，费根鲍姆(Feigenbaum)等人在梅的基础上独立地发现了倍周期分岔中的标度性和普适常数，从而把动力学系统中的倍周期分岔行为演化为混沌的研究从定性分析推进到定量计算阶段，成为混沌研究的一个重要的里程碑。

1984 年 美国加州大学伯克利分校华裔学者蔡少棠(L. O. Chua)提出了著名的"蔡氏电路"，随后通过计算机仿真和电子电路实验研究，证实了"蔡氏电路"是一种自激振荡电路，在一定的参数条件下，能够产生各种分岔、单涡卷和双涡卷奇怪吸引子等极其丰富和复杂的非线性现象和混沌动力学行为，从而进一步证实了电学中的混沌现象，为人们研究电学中的非线性现象以及分岔和混沌动力学行为提供了一个成功的范例。

20 世纪 80 年代以来，混沌理论进入了一个全新的迅速发展时期。1980 年，法国数学家曼德布罗特(Mandelbort)用计算机绘出了世界上第一张 Mandelbort 集的混沌图像。Takens、Packard、Farmer 等人根据拓扑嵌入定理首次提出重构动力学轨道相空间的延迟法，可以通过混沌时间序列，选择合适的嵌入维数和延迟时间，重构出混沌系统的相图，从而从另一方面更深入地认识混沌。1985 年，Wolf 提出了著名的计算混沌时间序列李雅普诺夫指数的算法，成为判定一个离散序列是否为一个混沌序列的重要依据。1987 年，Grassberger 和 Procaccia 首次运用这种相空间重构法，从实验数据时间序列计算出非线性系统奇怪吸引子的统计特征，如分数维数、李雅普诺夫指数和 Kolmogorov 熵等混沌特征量，从而使得混沌理论研究进入了工程实际应用阶段。1989 年 Hubler 发表了关于控制混沌的文章，

1990 年 Ott、Grebogi 和 Yorke 提出了 OGY 控制混沌的方法，同年，Pecora 和 Carroll 提出了混沌同步的思想，从而促进了混沌控制与混沌同步研究的蓬勃发展，使混沌控制与混沌同步研究成为一个全新的科学研究新方向。研究者相继提出了多种混沌控制与混沌同步的新方法，如变量反馈法、自适应法、采样反馈法、延迟反馈法、脉冲控制法、Backstepping 方法、投影同步法、等等。

进入 20 世纪 90 年代以来，混沌学更是与其他学科相互渗透、相互促进，无论是在生物学、生理学、心理学、数学、物理学、电子学、信息科学、振动力学、控制科学，还是天文学、气象学、经济学，甚至在音乐、艺术等领域，混沌都得到了广泛的研究和应用。1999 年陈关荣在混沌系统反馈控制中发现了一个与著名的 Lorenz 系统相似但不拓扑等价的新混沌吸引子，即 Chen 系统，继而又出现了 LÜ 混沌系统和 Liu 混沌系统等一系列新的混沌吸引子，为人们深入认识和研究混沌动力学现象提供了许多新的范例。如今，混沌与分形理论被认为是 20 世纪人类在认识世界和改造世界的过程中最富有创造性的第三次大革命，正如著名物理学家 J. Ford 所说："相对论排除了关于绝对空间和时间的牛顿幻觉；量子论排除了对可控测量过程的牛顿迷梦；而混沌理论则排除了拉普拉斯关于决定论式的可预测性的狂想。"著名科学家钱学森认为：混沌是宏观无序、微观有序的现象。混沌学就是专门研究这种复杂非线性动力学现象自身规律的一门科学。

1.2　混沌的主要特征和数学定义

1. 混沌的主要特征

一般来说，一个确定性的动力系统有三种定常状态，即平衡状态、周期振荡和准周期振荡。而混沌振荡则与这三种状态截然不同，它是一种不稳定的有限定常运动，局限在有限区域但轨道永不重复而且是具有遍历性的动力学振荡行为。

对于任一个 n 维非线性连续时间动力学系统，若用状态方程式来描述，通常有两种数学形式：

(1) 非自治系统：系统中含有随时间变化的外施激励，在状态方程式右边自变量 t 以显函数形式出现时，称为非自治系统(Non-autonomous System)，用状态方程来描述，则有

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n, t), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

(2)自治系统：系统中不含有随时间变化的外施激励，在状态方程式右边自变量 t 不以任何显函数形式出现，称为自治系统(Autonomous System)，用状态方程来描述，则有

$$\frac{dx_i}{dt} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

任意一个非线性连续时间动力系统的动力学行为如果出现混沌振荡，它将具有如下的几个特征：

(1)混沌运动对初始值的极端敏感性，表现为对于任一混沌动力学系统从任意两个靠近的初始值出发的相轨道在一定的时间区间内将会以指数形式分离。系统初始值极其微小的改变，能够使系统的振荡输出产生本质的差异。这是非线性混动动力学系统的固有特性。

(2)周期或拟周期振荡信号的频谱是离散谱(注意：拟周期振荡信号是具有不同频率的周期振荡信号之和，这些周期振荡信号频率的相互比值是非有理数)，而混沌振荡输出信号则是一定频率范围内的连续谱。

(3)周期或拟周期振荡的庞加莱映射是点或无限填充的封闭的椭圆线，但混沌振荡对应的庞加莱映射在庞加莱截面上的表现，则是杂乱无章的相点集合。

(4)奇怪吸引子局限于有限的区域里，就大范围而言，表现为稳定的吸引子，它有自己的吸引域。若以吸引域内任一点为初值，则可得到几乎完全相同的奇怪吸引子，这表现了奇怪吸引子的稳定性。

(5)奇怪吸引子的空间结构十分复杂，这来自轨道在有限的空间无穷伸展，压缩折叠；奇怪吸引子具有无穷层次的自相似结构。

(6)混沌运动具有一切混沌的通有性质(例如倍周期化中的 Feigenbanum 普适常数)、统计特征(分数维数，正的李雅普诺夫指数)。

当一个非线性连续时间动力系统的动力学行为呈显出以上特征时，系统的振荡行为就表现为混沌振荡。

2. 混沌的几种数学定义

所谓混沌，是指在确定性系统中出现的一种貌似无规则的、类似随机的现象。然而，究竟什么是混沌，至今学术界还没有一致的、严格的数学定义。这里仅介绍几种常见的混沌定义。

1) Li-Yorke 意义的混沌

1975 年，李天岩和约克在《美国数学月刊》上发表的论文《周期 3 意味着混沌》，第一次引入“混沌”的概念，并给出了一种混沌的数学定义，这里称为 Li-Yorke 定义。

Li-Yorke(1975)关于非线性动力学系统的混沌定义：对于一个把闭区间$[a,b]$映为自身的、连续的、单参数映射

$$f:[a,b]\times R \to [a,b], (x,\lambda) \mapsto f(x,\lambda), \lambda \in R \tag{1.2.1}$$

上式也可写成离散点的映射形式：

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda), x_n \in [a, b] \tag{1.2.2}$$

(1)该映射被称为是混沌的，若：

$f(x_n, \lambda), x_n \in [a, b]$ 存在一切周期的周期点；

(2)存在不可数子集 $S \subset [a, b]$，S 不含周期点，使得

$\liminf |f^n(x, \lambda) - f^n(y, \lambda)| = 0$，　$x, y \in S$，　$x \neq y$

$\limsup |f^n(x, \lambda) - f^n(y, \lambda)| > 0$，　$x, y \in S$，　$x \neq y$

$\limsup |f^n(x, \lambda) - f^n(p, \lambda)| > 0$，　$x \in S$，　p 为周期点

此定义中第一个极限说明子集中的点 $x \in S$ 相当集中；第二个极限说明子集的点 $x \in S$ 相当分散；第三个极限说明子集的点 $x \in S$，但子集不会趋近于任意周期点。

2) Devaney 意义的混沌

1989 年，Devaney 给出了一种更为直观且更便于理解的混沌定义：设 X 是一度量空间，一个连续映射 $f: X \to X$ 称为 X 上的混沌，即 f 是一个将区间 $X = [\alpha, \beta]$ 映到自身的映射，如果 f 满足下列条件：

(1)f 对其初始值具有敏感依赖性，即存在敏感常数 $\beta > 0$，使得对于任意的 $x_0 \in X$ 以及关于 x_0 的任意开区间 U，均存在某一 $y_0 \in U$ 和 $n > 0$ 使得

$$|f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \beta$$

(2)f 是拓扑传递的，即对于 X 的任意两个子区间 U_1 和 U_2 来说，均存在 $x_0 \in U_1$ 和一个 $n > 0$，使得 $f^n(x_0) \in U_2$；

(3)f 的周期点在 X 中稠密。

3) Smale 马蹄映射意义的混沌

在平面 R^2 内取正方形 $S = [0,1] \times [0,1]$，按下面的放大几何式取映射 $f: S \to R^2$ 如下：

将 S 沿铅直方向拉长，拉伸的倍数为 $\mu > 2$，同时沿水平方向压缩，压缩的倍数为 $\lambda < 0.5$，使其成为一个长方条，然后弯曲成马蹄形，再置放于 S 上，使弯曲的部分落在 S 之外。此弯曲的马蹄形就是 S 在映射 f 作用之下的像，映射 f 被称为 Smale 马蹄映射，即 $f: S \to R^2$，它是从 S 到其映射的像集 $f(S)$ 的微分同胚，记为 $V = S \cap f(S)$，表示马蹄中不相交的竖条的并集。这样反复拉伸折叠 n 次竖向置放于 S 上，当 $n \to \infty$，形成了一个康托集，即有 $S_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(S)$。其原像 $H = f^{-1}(V) = S \cap f^{-1}(S)$，表示马蹄中不相交的横条的并集。这样反复折叠 n 次横向置放于 S 上，当 $n \to -\infty$，也形成了一个康托集，即有 $S_\infty = \bigcap_{n=0}^{-\infty} f^n(S)$。这两组线条的交点的集合，记作 Λ

$$\Lambda = S_{-\infty} \cap S_\infty$$

Λ 是 Smale 马蹄映射 f 的不变集合。

应用符号动力系统能够证明 Smale 马蹄映射 f 在不变集合 Λ 上具有以下一些性质：

(1)不变集合 Λ 含有可数的无穷多条任意周期的周期轨道；

(2)不变集合 Λ 含有不可数无穷多条有界非周期轨道；

(3)存在一条稠密的轨道(或一条不稳定的非周期轨道)。

因而，f 在不变集合 Λ 上具有混沌属性，且 Λ 还是结构稳定的不变集合。

以上几种混沌的数学定义都是针对离散时间动力学系统 $x_{n-1} = f(x_n)$ 而言的。

对于连续时间动力学系统 $\frac{dx}{dt} = f(x)$ 来说，其混沌的数学定义如下。

4)非线性连续时间动力学系统的混沌定义

对于任一非线性连续时间动力学系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

设 Λ 是系统的一个非空不变集合，如果有：

(1) Λ 是孤立的结构稳定的非空不变集合；

(2) Λ 是拓扑传递的(Λ 是不可裂解的)；

(3)系统限制在非空不变集合 Λ 上的流 $\varphi(t,x)$ 对系统的初始值即为敏感。

当上述条件成立时，则称非线性连续时间动力学系统 $\frac{dx}{dt} = f(x)$ 的动力学行为是混沌的。

对于混沌，至今还没有一种公认的确切的定义，人们还在对混沌这一自然界普遍产生的物理现象不断地更新认识，对混沌理论进行不断的研究、探索和完善。

1.3 混沌振荡的几种判据与准则

几十年来，经过人们连续不断的探索和深入的研究，从各种数学分析、计算机仿真、几何研究、物理实验证实等几个方面给出了非线性动力学系统混沌振荡的几个研究的判据与准则。

1. 直接观察法

根据动力学系统的数值计算结果，画出系统或电路相空间中相轨迹随时间变化的相图以及状态变量随时间变化的波形图，通过对比和分析以确定系统的分岔和混沌现象。在相空间中，动力学的系统或电路稳定状态对应于相空间中的一点，周期状态对应于相空间中的封闭曲线，混沌运动则对应于动力学系统或电路相空

间中一定区域内随机分离的永不封闭的轨迹；而在时域，它的波形曲线是永不重复的非周期（或周期为无穷大）的波形曲线。

2. 庞加莱截面法

对于含有多个状态变量的非线性自治动力学系统或电路，可采用庞加莱截面法进行分析。其基本思想是在系统或电路的多维相空间中适当选取一截面（要有利于观察系统的运动特征和变化），然后考虑连续动力学系统轨道与此截面相交的若干交点的变化规律。

若 $\varphi_t, t \in T$ 是一个连续动力学系统，Σ 是 φ_t 通过的一个截面，且 $x \in \Sigma$，定义

$$q(x) = \varphi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma, \tau(x) = \min_{t>0}\{\varphi_t(x) \in \Sigma\}$$

称为截面 Σ 上的首次回归映射，也称为庞加莱（Poincaré）映射。这个截面 Σ 就称为庞加莱截面。

若非线性自治动力学系统的庞加莱映射在庞加莱截面上仅有有限个离散的点，则为周期运动；若截面上有一条封闭曲线，则为准周期运动；若截面上是成片的混乱密集相点且具有自相似的分形结构，则系统的动力学行为就呈现为混沌运动。

3. 相空间重构法

1980 年，Packard 等人提出了由一维可观察量重构一个“等价的”相空间，来重现系统的动态特性。F. Takens 则从数学上为其奠定了可靠的基础，其基本观点是：相空间重构法虽然是用一个变量在不同时刻的值构成相空间，但动力系统的一个变量的变化自然跟此变量与系统的其他变量的相互作用有关，即此变量随时间的变化隐含着整个系统的动力学规律。因此，重构的相空间的轨线也反映了原动力学系统动态行为的演化规律。其原理如下：

由系统中某一时间序列 $\{x_i \mid i = 1,2,K,\cdots,N\}$ 重构 m 维空间，得到一组相空间矢量

$$X_i = \{x_i, x_{i-1}, x_{i-\tau}, \cdots, x_{i-(m-1)\tau}\} \; (i = 1,2,K,\cdots,M, X_i \in R^m) \qquad (1.3.1)$$

其中 τ 是时间延迟；$m \geqslant 2d+1$，d 为系统自变量个数；$M < N$，并与 N 有相同的数量级。相空间重构是分析一个时间序列是否为混沌振荡的关键。

4. 功率谱分析法

根据傅里叶分析可知，任意周期为 T 的信号 $x(t)$，都可以展开成傅里叶级数，其物理意义是任意周期运动可以看成是基波频率 $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ 和一系列泛谐振 $n\omega_0$ 的叠加，即

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{-\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t} \qquad (1.3.2)$$

而任一动力学系统或电路的准周期运动也可以分解为一系列频率不可约的正弦振荡之叠加。因此,两者频谱都是离散谱。而对于任意的非周期信号 $x(t)$,若满足绝对可积条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \mathrm{d}t < \infty \tag{1.3.3}$$

则可将其展开为傅里叶积分

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1.3.4}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{1.3.5}$$

而非周期运动信号的频谱与周期运动信号的频谱则完全不同,非周期运动信号的频谱是连续谱。

对于混沌信号,先求混沌序列的自相关函数 $R_{xx}(\tau)$,然后进行傅里叶变换,再根据所得的自功率谱密度函数 $S_{xx}(f)$ 来分析混沌频域的特征。

$$S_{xx}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau \tag{1.3.6}$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f\tau}\mathrm{d}f \tag{1.3.7}$$

对于任一周期运动,其功率谱只是在基波频率及其倍频处呈现明显的尖峰;准周期运动对应的功率谱在几个不可约的基频以及它们叠加所在的频率处也呈现明显的尖峰;混沌运动则是在功率谱中呈现出具有噪声背景宽峰的连续频谱,且其中含有与周期运动对应的尖峰,这表示混沌运动轨道“访问”各个混沌带的平均周期。因此能够根据功率谱的特点,确定该系统的运动是周期的、准周期的,还是混沌振荡的。

5. 李雅普诺夫(Lyapunov)指数判定法

混沌振荡的基本特征之一是振荡行为对动力学系统或电路的初始值极为敏感,在混沌振荡中两个差值极小的初始值所产生的混沌轨道,随着时间的推移在一定条件下按指数方式相互靠近或分离。李雅普诺夫指数是定量描述这一物理现象的量。

给定一个 r 维的高维离散动力学系统

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

假定将系统的初始条件取为一个无穷小的 r 维圆球,由于系统动力学行为不断演化,在演变过程中这个无穷小的 r 维圆球的自然变形使圆球变为椭球。如果在 $t=$

0 时刻，球的中心在系统的吸引子上，将椭球的所有主轴按最快到最慢增加速度的顺序排列，那么第 i 个李雅普诺夫指数就根据第 i 个主轴的增加速率 $p_i(n)$ 定义，则有

$$\sigma_i = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left[\frac{p_i(n)}{p_0(n)}\right],\qquad i=1,2,3,\cdots,r \tag{1.3.8}$$

将各 σ_i 按其大小顺序排列，则有 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n$，依次称为最大李雅普诺夫指数、次大李雅普诺夫指数。这样一直排列到最小李雅普诺夫指数。利用李雅普诺夫指数的正负性质可判定一个动力学系统出现混沌振荡的存在与否。李雅普诺夫指数小于零，表示相临轨道收缩靠拢，系统动力学行为趋于稳定；李雅普诺夫指数大于零，表示相临轨道迅速分离，系统动力学行为对初值敏感。所以，李雅普诺夫指数表示了动力学系统中相空间相临轨道之间的距离随时间 t 的变化按指数速率相互收缩靠拢或分离扩张的性质。因此，在动力学分析中将李雅普诺夫指数 $\sigma>0$ 通常作为判断系统产生混沌行为的一个重要判据。

对于一个耗散系统来说，其相体积一般是要收缩的，但对于一个耗散系统的混沌运动来说，它存在两个相反的运动过程：一方面是耗能元件的存在，在耗散器件作用下，由于能量的消耗，要使系统运动的轨道收缩；另一方面，轨道又要相互分离。对于一个自治动力学系统，由于收缩是由方程本身决定的，对于相空间整体来说，它的作用是使远处的轨道收缩至有限的范围内。而发散则是局部性质的，它使靠近的轨道互相排斥分开。因此，即使是系统微小的初始值差别，也会使相近的两条轨道最终变得迥然不同。李雅普诺夫从动力学特性上用指数刻画了混沌系统相邻两点相互分离得快慢的速率。

对于耗散系统，李雅普诺夫指数谱不仅描述了各条轨道的性态，而且还描述了从一个吸引子的吸引域出发的所有轨道的稳定性性态，其结论如下：

(1)对于一维系统，吸引子只能是不动点，此时李雅普诺夫指数 $\sigma<0$。

(2)对于二维系统，吸引子为不动点、极限环或混沌吸引子：

①若系统的李雅普诺夫指数为 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)=(-,-)$，则吸引子为不动点；

②若系统的李雅普诺夫指数为 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)=(0,-)$，则吸引子为极限环；

③若系统的李雅普诺夫指数为 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)=(+,-)$，则吸引子为混沌吸引子。

(3)对于三维系统，吸引子有四种性态：

①若系统的李雅普诺夫指数为 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(-,-,-)$，则吸引子为不动点；

②若系统的李雅普诺夫指数为 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(0,-,-)$，则吸引子为周期吸引子；