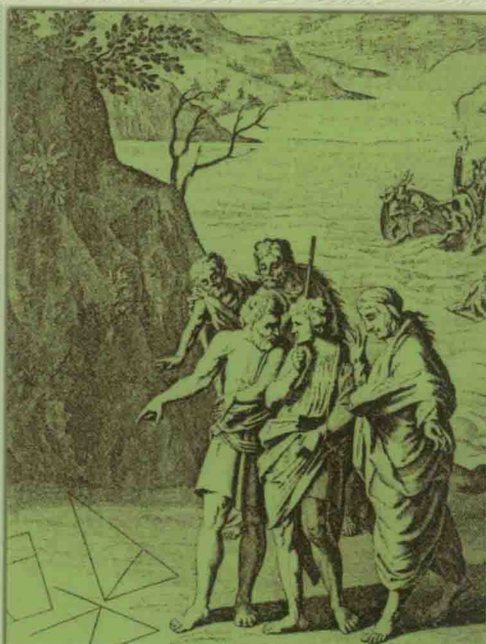
《数学中的小问题大定理》丛书（第四辑）

切比雪夫多项式

——从一道清华大学金秋营试题谈起

佩捷 吴雨宸 李舒畅 编著



◎代数插值余项的极小化

◎切比雪夫逼近定理

◎共轭斜量法

◎等分圆的理论

◎切比雪夫多项式与特殊函数

◎广义超几何函数与比勃巴赫猜想

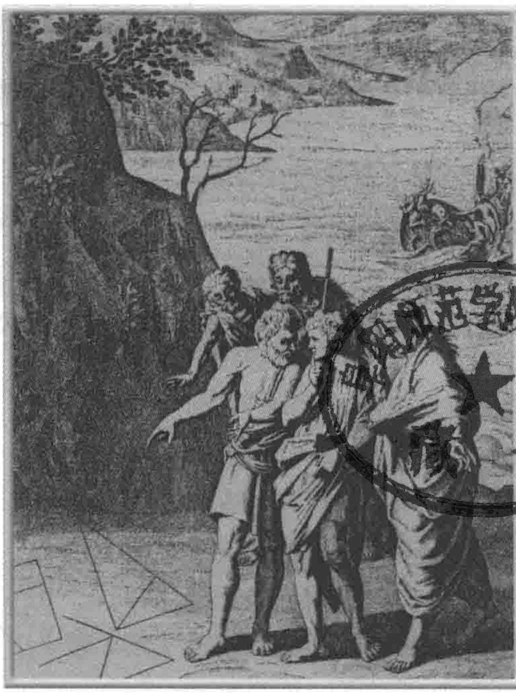
HITP
哈爾濱工業
HARBIN INSTITUTE OF

《数学中的小问题大定理》丛书（第四辑）

切比雪夫多项式

——从一道清华大学金秋营试题谈起

佩捷 吴雨宸 李舒畅 编著



- ◎代数插值余项的极小化
- ◎切比雪夫逼近定理
- ◎共轭斜量法
- ◎等分圆的理论
- ◎切比雪夫多项式与特殊函数
- ◎广义超几何函数与比勃巴赫猜想

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书以递归方式定义了一系列正交多项式序列，主要介绍了第一类切比雪夫多项式、第二类切比雪夫多项式以及切比雪夫多项式在逼近理论中的重要应用.

本书适用于数学竞赛选手、教练员及广大数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

切比雪夫多项式：从一道清华大学金秋营试题谈起/佩捷，吴雨宸，李舒畅编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016.1

ISBN 978－7－5603－5632－7

Ⅰ.①切… Ⅱ.①佩… ②吴… ③李… Ⅲ.①切比雪夫多项式－研究 Ⅳ.①O174.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 235718 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘家琳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451－86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 18 字数 192 千字
版　　次 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978－7－5603－5632－7
定　　价 38.00 元

目录

引 言

第 0 章

先看一道清华大学金秋营试题：

试题 A 求方程 $x^5+10x^3+20x-4=0$ 的所有根.

解法 1 设 $x=z-\frac{2}{z}$，则方程 $x^5+10x^3+20x-4=0$，可化为

$$z^5-\frac{32}{z^5}-4=0$$

于是 $z^5=-4$ 或 $z^5=8$，故 $z=\sqrt[5]{8}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}-\sqrt[5]{4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}=4$，其中 $k=0,1,2,3,4$.

解法 2 设

$$x=\lambda\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

则原方程变为

$$\lambda^5\left(t-\frac{1}{t}\right)^5+10\lambda^3\left(t-\frac{1}{t}\right)^3+20\lambda\left(t-\frac{1}{t}\right)=4$$

即

$$\lambda^5\left(t^5-\frac{1}{t^5}\right)-5\lambda^2(\lambda^2-2)\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+$$
$$10(\lambda^2-1)(\lambda^2-2)\left(t-\frac{1}{t}\right)=\frac{4}{\lambda}$$

令 $\lambda=\sqrt{2}$,则

$$t^5-\frac{1}{t^5}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

由单调性可知

$$t^5=\sqrt{2}$$

从而

$$t=\sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}},k=0,1,2,3,4$$

因此

$$x=\sqrt{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)=\sqrt[5]{8}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}-\sqrt[5]{4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}},k=0,1,2,3,4$$

解法 3 首先介绍一类特殊的一元五次方程

$$x^5+px^3+\frac{p^2}{5}x+q=0$$

的解法.

令 $x=u+v$,则

$$(u+v)^5+p(u+v)^3+\frac{p^2}{5}(u+v)+q=0$$

而

$$\begin{aligned}&(u+v)^5\\=&u^5+v^5+5uv(u^3+v^3)+10u^2v^2(u+v)\\=&u^5+v^5+5uv(u+v)^3-5u^2v^2(u+v)\end{aligned}$$

故

$$u^5+v^5+(5uv+p)(u+v)^3-$$
$$\left(5u^2v^2-\frac{p^2}{5}\right)(u+v)+q=0$$

令 $uv=-\frac{p}{5}$,则

$$u^5+v^5+q=0$$

由

$$\begin{cases}uv=-\dfrac{p}{5}\\u^5+v^5=-q\end{cases}$$

可解得 u,v.

回到原题,$p=10,q=-4$,则

$$\begin{cases}uv=-2\\u^5+v^5=4\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}u_1=\sqrt[5]{4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}\\v_1=\sqrt[5]{8}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}\end{cases}$$
$$\begin{cases}u_2=\sqrt[5]{4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}\\v_2=\sqrt[5]{8}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\end{cases}$$
$$\begin{cases}u_3=\sqrt[5]{4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-\sqrt[5]{4}\\v_3=\sqrt[5]{8}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}=\sqrt[5]{8}\end{cases}$$
$$\begin{cases}u_4=\sqrt[5]{4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{5}}\\v_4=\sqrt[5]{8}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}\end{cases}$$
$$\begin{cases}u_5=\sqrt[5]{4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{5}}\\v_5=\sqrt[5]{8}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{5}}\end{cases}$$

因此原方程的五个根为

$$x_i=u_i+v_i$$

其中 $i=1,2,\cdots,5$.

解法 4 注意到满足 $f(2\sqrt{2}\sin ht)=8\sqrt{2}\cos h5t$ 的多项式是

$$f(x)=x^5+10x^3+20x$$

即

$$8\sqrt{2}\times\frac{e^{5t}-e^{-5t}}{2}=4$$

所以 $e^{5t}=\sqrt{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

于是 $e^t=\sqrt[10]{2}e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ 或 $-\frac{1}{\sqrt[10]{2}}e^{i\frac{2k\pi}{5}}$，其中 i=0,1,2,3,4.

故 $x=\sqrt{2}(e^t-e^{-t})=\sqrt[5]{8}e^{i\frac{2k\pi}{5}}-\sqrt[5]{4}e^{-i\frac{2k\pi}{5}}$，其中 $k=0,1,2,3,4$.

评注 本题的背景是切比雪夫(Tschebyscheff)多项式，若不熟悉切比雪夫多项式，要做出此题，难度异常之大.

第1章 两个竞赛问题

§1 一道普特南竞赛试题的简单解法

1978年12月2日举行的普特南数学竞赛中有一个涉及4次切比雪夫多项式的问题.

试题 求出一个最大的 A，对于 A 存在一个实系数多项式

$$p(x)=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

满足 $0\leqslant p(x)\leqslant 1$，这里 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

解 假如我们知道四次切比雪夫多项式 $T_4(x)=8x^4-8x^2+1=\cos(4\arccos x)$ 是对于 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 满足 $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ 的所有四次多项式 $f(x)$ 中具有最大首项系数的，就容易得到 $p(x)=\frac{1}{2}[T_4(x)+1]$，于是 $\max A=4$.

假如没有这个背景知识,也可以应用各种代换解决这一问题.

取 $Q(x)=\dfrac{p(x)+p(-x)}{2}$,此条件变为

$$0\leqslant Q(x)=Ax^4+Cx^2+E\leqslant 1, x\in[-1,1]$$

取 $x^2=y$,变为

$$0\leqslant R(y)=Ay^2+Cy+E\leqslant 1, y\in[0,1]$$

取 $y=\dfrac{z+1}{2}$ 和 $S(z)=R\left(\dfrac{z+1}{2}\right)$,我们有

$$0\leqslant S(z)=\left(\frac{A}{4}\right)z^2+Fz+G\leqslant 1, z\in[-1,1]$$

取 $T(z)=\dfrac{S(z)+S(-z)}{2}$,我们得到

$$0\leqslant\left(\frac{A}{4}\right)z^2+G\leqslant 1, z\in[-1,1]$$

最后再取 $z^2=w$ 就变成

$$0\leqslant\left(\frac{A}{4}\right)w+G\leqslant 1, w\in[0,1]$$

现在可看出 $\max A=4$,这个最大值是取 $G=0$ 得到的.

即用

$$T(z)=z^2, R(y)=(2y-1)^2$$
$$Q(x)=4x^4-4x^2+1$$

得到的.

§2　单墫教授提出的一个问题

单墫教授在一本叫《我怎样解题》的书中提出了一个貌似简单的问题:

设自然数 $k \geqslant 3, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \theta \neq \frac{\pi}{6}$. 证明：若 $\cos(k-1)\theta, \cos k\theta$ 都是有理数，则 $\cos\theta$ 也是有理数.

解 $\cos\frac{\pi}{3}$ 是有理数，以下设 $\theta \neq \frac{\pi}{3}$.

还是先看最简单的情况：已知 $\cos 2\theta, \cos 3\theta$ 都是有理数. 这时由三倍角公式

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos\theta(4\cos^2\theta - 3)\\ &= \cos\theta(2\cos 2\theta - 1)\end{aligned} \tag{1}$$

当 $\theta \neq \frac{\pi}{6}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$2\cos 2\theta - 1 \neq 0$，所以

$$\cos\theta = \frac{\cos 3\theta}{2\cos 2\theta - 1} \in \mathbf{Q} \tag{2}$$

一般情况比较复杂. 我们慢慢地说，顺便通过这道题介绍一点多项式，特别是三角多项式的知识.

定理1 对任意正整数 n，存在 n 次多项式 $T_n(x)$ 与 $U_n(x)$，满足

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta \tag{3}$$

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \tag{4}$$

并且 $T_n(x), U_n(x)$ 都是整数系数多项式，首项系数分别为 2^{n-1} 与 2^n.

证明 采用归纳法，当 $n=1$ 时，显然. 设当 n 换为 $n-1$ 时结论成立，则

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \cos(n-1)\theta\cos\theta - \sin(n-1)\theta\sin\theta\\ &= T_{n-1}(\cos\theta)\cos\theta - U_{n-2}(\cos\theta)(1-\cos^2\theta)\end{aligned}$$

其中 $\cos^n\theta$ 的系数是

$$2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1}$$

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\cos\theta + \cos n\theta$$

$$=U_{n-1}(\cos\theta)\cos\theta+T_n(\cos\theta)$$

其中 $\cos^n\theta$ 的系数是

$$2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$$

因此 $T_n(x)$，$U_n(x)$ 都是 n 次整系数多项式，首项系数分别为 2^{n-1} 与 2^n.

同样用上面的归纳法，不难得出 $T_n(x)$，$U_n(x)$ 中的项 x^k 的次数 k 都与 n 同奇偶.

$T_n(x)$，$U_n(x)$ 称为切比雪夫多项式.

定理 2　$T_n(x)$ 满足递推关系

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \tag{5}$$

而且

$$T_n(x)=\sum{}' a_{k,n}\cdot 2^{k-1}x^k, a_{k,n}\in\mathbf{Z} \tag{6}$$

其中 $\sum{}'$ 表示对 $k=n,n-2,n-4,\cdots$，求和.

证明　由题意，得

$$\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta \tag{7}$$

即式(5)成立.

假定式(6)对 $T_n(x)$ 及 $T_{n-1}(x)$ 成立，则由式(5)

$$\begin{aligned}T_{n+1}(x)&=\sum{}' a_{k,n}\cdot 2^k x^{k+1}-\sum{}' a_{k,n-1}\cdot 2^{k-1}x^k\\&=\sum{}'(a_{k,n}-a_{k+1,n-1})\cdot 2^k x^{k+1}\end{aligned} \tag{8}$$

于是

$$a_{k+1,n+1}=a_{k,n}-a_{k+1,n-1}\in\mathbf{Z}$$

定理 3　设多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高公因式为 $d(x)$，则有多项式 $A(x)$，$B(x)$，使得

$$A(x)f(x)+B(x)g(x)=d(x) \tag{9}$$

$A(x)$，$B(x)$ 可通过 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的辗转相除得到. 因此，如果 $f(x)$，$g(x)$ 都是有理系数的多项式，那么 $A(x)$，$B(x)$，$d(x)$ 也都是有理系数的多项式.

定理 3 是熟知的,这时不再证明.

回到原来的命题,设 $\cos(k-1)\theta=r_1$,$\cos k\theta=r_2$,r_1,r_2 都是有理数. 由定理 1,有理数系数的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$(即 $T_{k-1}(x)$ 与 $T_k(x)$),次数分别为 $k-1$ 与 k,满足

$$f(\cos(\theta))=\cos(k-1)\theta=r_1 \tag{10}$$

$$g(\cos\theta)=\cos k\theta=r_2 \tag{11}$$

$f(x)-r_1$ 与 $g(x)-r_2$ 在 $x=\cos\theta$ 时,值均为 0,所以 $x-\cos\theta$ 是 $f(x)-r_1$ 与 $g(x)-r_2$ 的公因式. 如果 $x-\cos\theta$ 是它们的最高公因式,那么由定理 3,有

$$x-\cos\theta=A(x)(f(x)-r_1)+B(x)(g(x)-r_2) \tag{12}$$

其中 $A(x)$,$B(x)$ 都是有理系数的多项式,$x-\cos\theta$ 也是有理系数的多项式. 特别地,$\cos\theta$ 是有理数.

因此,只要证明 $f(x)-r_1$ 与 $g(x)-r_2$ 的公因式只有 $x-\cos\theta$.

我们还需要一个定理,即:

定理 4　自然数 $n>3$,m 与 n 互质,则 $\cos\frac{m}{n}\pi$ 不是有理数.

证明　由题意,得

$$T_n\left(\cos\frac{m}{n}\pi\right)=\cos m\pi=(-1)^m \tag{13}$$

因此 $\cos\frac{m}{n}\pi$ 是方程

$$T_n(x)=(-1)^m \tag{14}$$

的根,由于 $T_n(x)=\sum' a_{k,n}\cdot 2^{k-1}x^k$,所以令

$$h(x)=\sum' a_{k,n}x^k \tag{15}$$

则 $2\cos\frac{m}{n}\pi$ 是

$$h(x)=2\times(-1)^m \tag{16}$$

的有理根. $h(x)-2\times(-1)^m$ 是首项系数为 1 的整系数多项式,它的有理根一定是整根,即 $2\cos\frac{m}{n}\pi$ 是整数. 因为

$$\left|2\cos\frac{m}{n}\pi\right|\leqslant 2 \tag{17}$$

所以

$$\cos\frac{m}{n}\pi=\pm 1,\pm\frac{1}{2},0 \tag{18}$$

但在 $n>3$ 时,式(18)不成立,所以 $\cos\frac{m}{n}\pi$ 不是有理数.

上面的结果也可说成:

若 $\frac{\theta}{\pi}$ 与 $\cos\theta$ 同为有理数,则 $\cos\theta$ 必为 $0,\pm\frac{1}{2}$, ± 1 这 5 个值.

以下设 $k\geqslant 3$

$$\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{k}j\right),j=0,1,\cdots,k-1$$

都是 $g(x)=r_2$ 的根. 这 k 个根中没有相同的,因为由

$$\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{k}j\right)=\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{k}j'\right),0\leqslant j<j'\leqslant k-1$$

得

$$\theta+\frac{2\pi}{k}j+\theta+\frac{2\pi}{k}j'=2\pi \text{ 或 } 4\pi$$

所以 $\theta=r\pi,r\in\mathbf{Q}$,而且 r 的分母是 k 的约数. 但 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\theta\neq\frac{\pi}{3}$,所以 r 的分母大于 4. $k-1$ 与 k 互质,

也与 r 的分母互质，所以 $(k-1)\theta=r'\pi, r\in\mathbf{Q}, r'$ 的分母大于或等于4.但由定理4，$\cos(k-1)\theta$ 不是有理数.

因此，上述 k 个根就是 $g(x)=r_2$ 的全部的根.

同理，$\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{k-1}t\right), t=0,1,\cdots,k-2$，是 $f(x)=r_1$ 的全部的根，如果有

$$\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{k-1}t\right)=\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{k}j\right) \tag{19}$$

那么

$$\theta+\frac{2\pi}{k-1}t=\theta+\frac{2\pi}{k}j \tag{20}$$

或

$$\theta+\frac{2\pi}{k-1}t+\theta+\frac{2\pi}{k}j\equiv 0(\bmod 2\pi) \tag{21}$$

式(20)导致 $k\mid j, (k-1)\mid t$，即 $j=t=0$.

式(21)导致 $\theta=r\pi, r\in\mathbf{Q}$，所以 $kr,(k-1)r$ 的分母小于或等于3.

$r=kr-(k-1)r$ 的分母只可能为6，3，2，1.但 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), \theta\neq\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}$，所以式(21)不会发生.

因此，$f(x)-r_1$ 与 $q(x)-r_2$ 只有一个公共根，即 $\cos\theta$.

根据上面的证明，$\cos\theta$ 为有理数.

评注　运用代数数论的知识，可以简单地导出定理4.