

《数学中的小问题大定理》丛书（第四辑）

切比雪夫多项式

——从一道清华大学金秋营试题谈起

佩捷 吴雨宸 李舒畅 编著



◎ 代数插值余项的极小化

◎ 切比雪夫逼近定理

◎ 共轭斜量法

◎ 等分圆的理论

◎ 切比雪夫多项式与特殊函数

◎ 广义超几何函数与比勃巴赫猜想



哈尔滨工业大学
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

《数学中的小问题大定理》丛书（第四辑）

切比雪夫多项式

——从一道清华大学生金秋营试题谈起

佩捷 吴雨 李舒畅 编著



- ◎ 代数插值余项的极小化
- ◎ 切比雪夫逼近定理
- ◎ 共轭斜量法
- ◎ 等分圆的理论
- ◎ 切比雪夫多项式与特殊函数
- ◎ 广义超几何函数与比勃巴赫猜想



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书以递归方式定义了一系列正交多项式序列,主要介绍了第一类切比雪夫多项式、第二类切比雪夫多项式以及切比雪夫多项式在逼近理论中的重要应用.

本书适用于数学竞赛选手、教练员及广大数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

切比雪夫多项式:从一道清华大学金秋营试题谈起/
佩捷,吴雨宸,李舒畅编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学
出版社,2016.1

ISBN 978-7-5603-5632-7

I. ①切… II. ①佩… ②吴… ③李…

III. ①切比雪夫多项式—研究 IV. ①O174.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 235718 号

策划编辑	刘培杰	张永芹
责任编辑	张永芹	刘家琳
封面设计	孙茵艾	
出版发行	哈尔滨工业大学出版社	
社 址	哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006	
传 真	0451-86414749	
网 址	http://hitpress.hit.edu.cn	
印 刷	哈尔滨工业大学印刷厂	
开 本	787mm×960mm 1/16 印张 18 字数 192 千字	
版 次	2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷	
书 号	ISBN 978-7-5603-5632-7	
定 价	38.00 元	

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎
目

录

第 0 章 引言 // 1

第 1 章 两个竞赛问题 // 5

§ 1 一道普特南竞赛试题的简单解法 // 5

§ 2 单增教授提出的一个问题 // 6

第 2 章 中学教师眼中的函数的最大值和最小值问题 // 12

第 3 章 切比雪夫多项式在数值逼近中的应用 // 20

§ 1 几个简单性质 // 20

§ 2 代数插值余项的极小化 // 27

§ 3 利用切比雪夫多项式降低近似式项数 // 29

§ 4 线性模空间的逼近问题 // 31

§ 5 切比雪夫逼近定理 // 35

§ 6 里米兹(Ремез)算法 // 42

第 4 章	共轭斜量法 // 44
§ 1	斜量法 // 44
§ 2	多步斜量法 // 54
§ 3	共轭斜量法 // 64
§ 4	不完全分解、预处理共轭斜量法 // 73
第 5 章	研究综述 // 81
§ 1	引言 // 81
§ 2	切比雪夫递推方程(组) // 85
§ 3	切比雪夫型和式方程 // 87
§ 4	切比雪夫型方程组 // 89
§ 5	切比雪夫多项式的线性变换 // 92
§ 6	切比雪夫多项式构成的矩阵 // 95
§ 7	第一、二类广义切比雪夫多项式 // 95
§ 8	研究前景 // 97
第 6 章	等分圆的理论 // 100
§ 1	牛棚中的探索——欧阳维诚的作图法 // 100
§ 2	$f_n(x)$ 的定义及其与等分圆的关系 // 102
§ 3	$f_n(x)$ 的几个简单性质 // 105
§ 4	高斯定理的证明 // 113
§ 5	p 等分圆的作图——17 与 257 等分圆 // 118
第 7 章	切比雪夫多项式与特殊函数 // 135
§ 1	福克斯(Fuchs)型方程 // 135
§ 2	具有五个正则奇点的福克斯型方程 // 137
§ 3	具有三个正则奇点的福克斯型方程 // 140
§ 4	超几何级数和超几何函数 // 146
§ 5	邻次函数之间的关系 // 148
§ 6	超几何方程的其他解用超几何函数

	表示 // 151
§ 7	指标差为整数时超几何方程的第二解 // 156
§ 8	超几何函数的积分表示 // 162
§ 9	超几何函数的巴恩斯(Barnes)积分 表示 // 166
§ 10	$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ 之值 // 169
§ 11	在奇点 $0, 1, \infty$ 附近的基本解之间的关系. 解析开拓 // 173
§ 12	$\gamma - \alpha - \beta, \alpha - \beta$ 是整数的情形 // 176
§ 13	雅可比(Jacobi)多项式 // 185
§ 14	切比雪夫多项式 // 189
§ 15	二次变换 // 194
§ 16	库默(Kummer)公式以及由它导出的求和 公式 // 204
§ 17	参数大时的渐近展开 // 207
§ 18	广义超几何级数 // 212
§ 19	两个变数的超几何级数 // 214
§ 20	F_1 和 F_2 的变换公式 // 219
§ 21	可约化的情形 // 220
第 8 章	广义超几何函数与比勃巴赫猜想 // 233
附 录	Some Identities Related To Tschebyscheff Polynomials And Their Applications // 255
§ 1	Introduction // 255
§ 2	Several Lemmas // 259

引言

第

0

章

先看一道清华大学金秋营试题：

试题 A 求方程 $x^5 + 10x^3 + 20x - 4 = 0$ 的所有根.

解法 1 设 $x = z - \frac{2}{z}$, 则方程 $x^5 + 10x^3 + 20x - 4 = 0$, 可化为

$$z^5 - \frac{32}{z^5} - 4 = 0$$

于是 $z^5 = -4$ 或 $z^5 = 8$, 故 $z = \sqrt[5]{8} e^{i\frac{2k\pi}{5}} - \sqrt[5]{4} e^{-i\frac{2k\pi}{5}} = 4$, 其中 $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

解法 2 设

$$x = \lambda \left(t - \frac{1}{t} \right)$$

切比雪夫多项式

则原方程变为

$$\lambda^5 \left(t - \frac{1}{t}\right)^5 + 10\lambda^3 \left(t - \frac{1}{t}\right)^3 + 20\lambda \left(t - \frac{1}{t}\right) = 4$$

即

$$\begin{aligned} \lambda^5 \left(t^5 - \frac{1}{t^5}\right) - 5\lambda^2 (\lambda^2 - 2) \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) + \\ 10(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 2) \left(t - \frac{1}{t}\right) = \frac{4}{\lambda} \end{aligned}$$

令 $\lambda = \sqrt{2}$, 则

$$t^5 - \frac{1}{t^5} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

由单调性可知

$$t^5 = \sqrt{2}$$

从而

$$t = \sqrt[10]{2} e^{i\frac{2k\pi}{5}}, k=0,1,2,3,4$$

因此

$$x = \sqrt{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) = \sqrt[5]{8} e^{i\frac{2k\pi}{5}} - \sqrt[5]{4} e^{-i\frac{2k\pi}{5}}, k=0,1,2,3,4$$

解法 3 首先介绍一类特殊的一元五次方程

$$x^5 + px^3 + \frac{p^2}{5}x + q = 0$$

的解法.

令 $x = u + v$, 则

$$(u+v)^5 + p(u+v)^3 + \frac{p^2}{5}(u+v) + q = 0$$

而

$$\begin{aligned} (u+v)^5 &= u^5 + v^5 + 5uv(u^3 + v^3) + 10u^2v^2(u+v) \\ &= u^5 + v^5 + 5uv(u+v)^3 - 5u^2v^2(u+v) \end{aligned}$$

故

$$u^5 + v^5 + (5uv + p)(u + v)^3 - \left(5u^2v^2 - \frac{p^2}{5}\right)(u + v) + q = 0$$

令 $uv = -\frac{p}{5}$, 则

$$u^5 + v^5 + q = 0$$

由

$$\begin{cases} uv = -\frac{p}{5} \\ u^5 + v^5 = -q \end{cases}$$

可解得 u, v .

回到原题, $p = 10, q = -4$, 则

$$\begin{cases} uv = -2 \\ u^5 + v^5 = 4 \end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned} &\begin{cases} u_1 = \sqrt[5]{4} e^{i\frac{\pi}{5}} \\ v_1 = \sqrt[5]{8} e^{i\frac{4\pi}{5}} \end{cases} \\ &\begin{cases} u_2 = \sqrt[5]{4} e^{i\frac{3\pi}{5}} \\ v_2 = \sqrt[5]{8} e^{i\frac{2\pi}{5}} \end{cases} \\ &\begin{cases} u_3 = \sqrt[5]{4} e^{i\pi} = -\sqrt[5]{4} \\ v_3 = \sqrt[5]{8} e^{i0} = \sqrt[5]{8} \end{cases} \\ &\begin{cases} u_4 = \sqrt[5]{4} e^{i\frac{7\pi}{5}} \\ v_4 = \sqrt[5]{8} e^{i\frac{8\pi}{5}} \end{cases} \\ &\begin{cases} u_5 = \sqrt[5]{4} e^{i\frac{9\pi}{5}} \\ v_5 = \sqrt[5]{8} e^{i\frac{6\pi}{5}} \end{cases} \end{aligned}$$

切比雪夫多项式

因此原方程的五个根为

$$x_i = u_i + v_i$$

其中 $i = 1, 2, \dots, 5$.

解法 4 注意到满足 $f(2\sqrt{2} \sin ht) = 8\sqrt{2} \cos h5t$ 的多项式是

$$f(x) = x^5 + 10x^3 + 20x$$

即

$$8\sqrt{2} \times \frac{e^{5t} - e^{-5t}}{2} = 4$$

所以 $e^{5t} = \sqrt{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

于是 $e^t = \sqrt[10]{2} e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ 或 $-\frac{1}{\sqrt[10]{2}} e^{i\frac{2k\pi}{5}}$, 其中 $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

故 $x = \sqrt{2}(e^t - e^{-t}) = \sqrt[5]{8} e^{i\frac{2k\pi}{5}} - \sqrt[5]{4} e^{-i\frac{2k\pi}{5}}$, 其中 $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

评注 本题的背景是切比雪夫(Tschebyscheff)多项式, 若不熟悉切比雪夫多项式, 要做出此题, 难度异常之大.



两个竞赛问题

第 1 章

§ 1 一道普特南竞赛试题的简单解法

1978年12月2日举行的普特南数学竞赛中有一个涉及4次切比雪夫多项式的问题.

试题 求出一个最大的 A , 对于 A 存在一个实系数多项式

$p(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ 满足 $0 \leq p(x) \leq 1$, 这里 $-1 \leq x \leq 1$.

解 假如我们知道四次切比雪夫多项式 $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 = \cos(4\arccos x)$ 是对于 $-1 \leq x \leq 1$ 满足 $-1 \leq f(x) \leq 1$ 的所有四次多项式 $f(x)$ 中具有最大首项系数的, 就容易得到 $p(x) = \frac{1}{2}[T_4(x) + 1]$, 于是 $\max A = 4$.

切比雪夫多项式

假如没有这个背景知识,也可以应用各种代换解决这一问题.

取 $Q(x) = \frac{p(x) + p(-x)}{2}$, 此条件变为

$$0 \leq Q(x) = Ax^4 + Cx^2 + E \leq 1, x \in [-1, 1]$$

取 $x^2 = y$, 变为

$$0 \leq R(y) = Ay^2 + Cy + E \leq 1, y \in [0, 1]$$

取 $y = \frac{z+1}{2}$ 和 $S(z) = R\left(\frac{z+1}{2}\right)$, 我们有

$$0 \leq S(z) = \left(\frac{A}{4}\right)z^2 + Fz + G \leq 1, z \in [-1, 1]$$

取 $T(z) = \frac{S(z) + S(-z)}{2}$, 我们得到

$$0 \leq \left(\frac{A}{4}\right)z^2 + G \leq 1, z \in [-1, 1]$$

最后再取 $z^2 = w$ 就变成

$$0 \leq \left(\frac{A}{4}\right)w + G \leq 1, w \in [0, 1]$$

现在可看出 $\max A = 4$, 这个最大值是取 $G = 0$ 得到的.

即用

$$T(z) = z^2, R(y) = (2y - 1)^2$$

$$Q(x) = 4x^4 - 4x^2 + 1$$

得到的.

§ 2 单增教授提出的一个问题

单增教授在一本叫《我怎样解题》的书中提出了一个貌似简单的问题:

设自然数 $k \geq 3, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \theta \neq \frac{\pi}{6}$. 证明: 若 $\cos(k-1)\theta, \cos k\theta$ 都是有理数, 则 $\cos \theta$ 也是有理数.

解 $\cos \frac{\pi}{3}$ 是有理数, 以下设 $\theta \neq \frac{\pi}{3}$.

还是先看最简单的情况: 已知 $\cos 2\theta, \cos 3\theta$ 都是有理数. 这时由三倍角公式

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta = \cos \theta (4\cos^2 \theta - 3) \\ &= \cos \theta (2\cos 2\theta - 1)\end{aligned}\quad (1)$$

当 $\theta \neq \frac{\pi}{6}, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $2\cos 2\theta - 1 \neq 0$, 所以

$$\cos \theta = \frac{\cos 3\theta}{2\cos 2\theta - 1} \in \mathbf{Q} \quad (2)$$

一般情况比较复杂. 我们慢慢地说, 顺便通过这道题介绍一点多项式, 特别是三角多项式的知识.

定理 1 对任意正整数 n , 存在 n 次多项式 $T_n(x)$ 与 $U_n(x)$, 满足

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta \quad (3)$$

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \quad (4)$$

并且 $T_n(x), U_n(x)$ 都是整数系数多项式, 首项系数分别为 2^{n-1} 与 2^n .

证明 采用归纳法, 当 $n=1$ 时, 显然. 设当 n 换为 $n-1$ 时结论成立, 则

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \cos(n-1)\theta \cos \theta - \sin(n-1)\theta \sin \theta \\ &= T_{n-1}(\cos \theta) \cos \theta - U_{n-2}(\cos \theta) (1 - \cos^2 \theta)\end{aligned}$$

其中 $\cos^n \theta$ 的系数是

$$2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1}$$

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \cos \theta + \cos n\theta$$

$$=U_{n-1}(\cos \theta)\cos \theta+T_n(\cos \theta)$$

其中 $\cos^n \theta$ 的系数是

$$2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$$

因此 $T_n(x), U_n(x)$ 都是 n 次整系数多项式, 首项系数分别为 2^{n-1} 与 2^n .

同样用上面的归纳法, 不难得出 $T_n(x), U_n(x)$ 中的项 x^k 的次数 k 都与 n 同奇偶.

$T_n(x), U_n(x)$ 称为切比雪夫多项式.

定理 2 $T_n(x)$ 满足递推关系

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \quad (5)$$

而且

$$T_n(x)=\sum' a_{k,n} \cdot 2^{k-1}x^k, a_{k,n} \in \mathbf{Z} \quad (6)$$

其中 $\sum'$ 表示对 $k=n, n-2, n-4, \dots$, 求和.

证明 由题意, 得

$$\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos \theta\cos n\theta \quad (7)$$

即式(5)成立.

假定式(6)对 $T_n(x)$ 及 $T_{n-1}(x)$ 成立, 则由式(5)

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= \sum' a_{k,n} \cdot 2^k x^{k+1} - \sum' a_{k,n-1} \cdot 2^{k-1} x^k \\ &= \sum' (a_{k,n} - a_{k+1,n-1}) \cdot 2^k x^{k+1} \end{aligned} \quad (8)$$

于是

$$a_{k+1,n+1} = a_{k,n} - a_{k+1,n-1} \in \mathbf{Z}$$

定理 3 设多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高公因式为 $d(x)$, 则有多项式 $A(x), B(x)$, 使得

$$A(x)f(x)+B(x)g(x)=d(x) \quad (9)$$

$A(x), B(x)$ 可通过 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的辗转相除得到. 因此, 如果 $f(x), g(x)$ 都是有理系数的多项式, 那么 $A(x), B(x), d(x)$ 也都是有理系数的多项式.

定理3是熟知的,这时不再证明.

回到原来的命题,设 $\cos(k-1)\theta=r_1$, $\cos k\theta=r_2$, r_1, r_2 都是有理数. 由定理1, 有理数系数的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ (即 $T_{k-1}(x)$ 与 $T_k(x)$), 次数分别为 $k-1$ 与 k , 满足

$$f(\cos(\theta)) = \cos(k-1)\theta = r_1 \quad (10)$$

$$g(\cos \theta) = \cos k\theta = r_2 \quad (11)$$

$f(x)-r_1$ 与 $g(x)-r_2$ 在 $x=\cos \theta$ 时, 值均为0, 所以 $x-\cos \theta$ 是 $f(x)-r_1$ 与 $g(x)-r_2$ 的公因式. 如果 $x-\cos \theta$ 是它们的最高公因式, 那么由定理3, 有

$$x - \cos \theta = A(x)(f(x) - r_1) + B(x)(g(x) - r_2) \quad (12)$$

其中 $A(x), B(x)$ 都是有理系数的多项式, $x-\cos \theta$ 也是有理系数的多项式. 特别地, $\cos \theta$ 是有理数.

因此, 只要证明 $f(x)-r_1$ 与 $g(x)-r_2$ 的公因式只有 $x-\cos \theta$.

我们还需要一个定理, 即:

定理4 自然数 $n > 3, m$ 与 n 互质, 则 $\cos \frac{m}{n}\pi$ 不是有理数.

证明 由题意, 得

$$T_n\left(\cos \frac{m}{n}\pi\right) = \cos m\pi = (-1)^m \quad (13)$$

因此 $\cos \frac{m}{n}\pi$ 是方程

$$T_n(x) = (-1)^m \quad (14)$$

的根, 由于 $T_n(x) = \sum' a_{k,n} \cdot 2^{k-1} x^k$, 所以令

$$h(x) = \sum' a_{k,n} x^k \quad (15)$$

切比雪夫多项式

则 $2\cos \frac{m}{n}\pi$ 是

$$h(x) = 2 \times (-1)^m \quad (16)$$

的有理根. $h(x) - 2 \times (-1)^m$ 是首项系数为 1 的整系数多项式, 它的有理根一定是整根, 即 $2\cos \frac{m}{n}\pi$ 是整数. 因为

$$\left| 2\cos \frac{m}{n}\pi \right| \leq 2 \quad (17)$$

所以

$$\cos \frac{m}{n}\pi = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, 0 \quad (18)$$

但在 $n > 3$ 时, 式(18) 不成立, 所以 $\cos \frac{m}{n}\pi$ 不是有理数.

上面的结果也可说成:

若 $\frac{\theta}{\pi}$ 与 $\cos \theta$ 同为有理数, 则 $\cos \theta$ 必为 $0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ 这 5 个值.

以下设 $k \geq 3$

$$\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{k}j\right), j=0, 1, \dots, k-1$$

都是 $g(x) = r_2$ 的根. 这 k 个根中没有相同的, 因为由

$$\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{k}j\right) = \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{k}j'\right), 0 \leq j < j' \leq k-1$$

得

$$\theta + \frac{2\pi}{k}j + \theta + \frac{2\pi}{k}j' = 2\pi \text{ 或 } 4\pi$$

所以 $\theta = r\pi, r \in \mathbf{Q}$, 而且 r 的分母是 k 的约数. 但 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \theta \neq \frac{\pi}{3}$, 所以 r 的分母 r 大于 4. $k-1$ 与 k 互质,

也与 r 的分母互质, 所以 $(k-1)\theta = r'\pi, r \in \mathbf{Q}, r'$ 的分母大于或等于 4, 但由定理 4, $\cos(k-1)\theta$ 不是有理数.

因此, 上述 k 个根就是 $g(x) = r_2$ 的全部的根.

同理, $\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{k-1}t\right), t = 0, 1, \dots, k-2$, 是 $f(x) = r_1$ 的全部的根, 如果有

$$\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{k-1}t\right) = \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{k}j\right) \quad (19)$$

那么

$$\theta + \frac{2\pi}{k-1}t = \theta + \frac{2\pi}{k}j \quad (20)$$

或

$$\theta + \frac{2\pi}{k-1}t + \theta + \frac{2\pi}{k}j \equiv 0 \pmod{2\pi} \quad (21)$$

式(20) 导致 $k \mid j, (k-1) \mid t$, 即 $j = t = 0$.

式(21) 导致 $\theta = r\pi, r \in \mathbf{Q}$, 所以 $kr, (k-1)r$ 的分母小于或等于 3.

$r = kr - (k-1)r$ 的分母只可能为 6, 3, 2, 1. 但 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \theta \neq \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$, 所以式(21) 不会发生.

因此, $f(x) = r_1$ 与 $g(x) = r_2$ 只有一个公共根, 即 $\cos \theta$.

根据上面的证明, $\cos \theta$ 为有理数.

评注 运用代数数论的知识, 可以简单地导出定理 4.