

精选 试题解析

(江苏·山东·上海)

奥林匹克竞赛 青少年信息学 实战辅导丛书

高中课程 沈 琳 杨文海 王盛海
本书主编 曹建勋 夏朝华 邱继祥



本书附光盘1张
含更多测试数据



东南大学出版社

责任编辑 张 煦

责任印制 张文礼



竞赛训练知识体系

日常常规训练

知识强化

重点专题解析

精选试题解析

青少年信息学奥林匹克竞赛实战辅导丛书

— 程序设计与应用 (小学 • BASIC)

— 程序设计与应用 (中学 • PASCAL)

— 程序设计与应用 (中学 • C/C++)

— 程序设计与应用习题解析 (小学 • BASIC)

— 程序设计与应用习题解析 (中学 • PASCAL)

— 程序设计与应用习题解析 (中学 • C/C++)

— 数学与程序设计

— 数据结构及其应用

— 高级数据结构及其应用

— 动态规划及其应用

— 图论及其应用

— 精选试题解析 (江苏 • 山东 • 上海)

上架建议: 信息学 / 奥赛辅导

ISBN 978-7-5641-2189-1



9 787564 121891 >

定价: 48.00元 (含1光盘)

青少年信息学奥林匹克竞赛实战辅导丛书

精选试题解析

(江苏·山东·上海)

从书主编 沈 军 李立新 王晓敏

本册主编 章维铨 刘培玉 毛黎莉

东南大学出版社

·南 京·



内 容 提 要

本书遴选了近几年江苏、山东、上海三地全国青少年信息学奥林匹克竞赛 NOI 代表队选拔赛的试题,从竞赛实战需求出发对每一道题进行了详细解析。全书所选试题背景内容丰富多彩,妙趣横生,解题分析突出数学模型构造、算法灵活运用,贴近当前信息学竞赛的要求和趋势。

本书既可以作为大、中学生计算机竞赛活动的培训教材,亦可以作为大专院校计算机专业程序设计、算法类课程教学的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

精选试题解析 / 章维飏,刘培玉,毛黎莉主编. —南京:
东南大学出版社,2010.5

(青少年信息学奥林匹克竞赛实战辅导丛书 / 沈军,
李立新,王晓敏主编)

ISBN 978-7-5641-189-1

I. ①精… II. ①章… ②刘… ③毛… III. ①程序设
计—解题—青少年读物 IV. ①TP311.1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 069068 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人:江 汉

江苏省新华书店经销 常州市武进第三印刷有限公司印刷

开本:787 mm×1092 mm 1/16 印张:24.25 字数:605 千字

2010 年 1 月第 1 版 2010 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5641-2189-1

印数:1—4000 册 定价:48.00 元(含 1 光盘)

(凡因印装质量问题,可直接向发行部调换。电话:025-83792328,网址:press.seu.edu.cn)

丛书序

得益于计算机工具的特殊结构,以计算机技术为核心的信息技术现在已在整个社会发展中起到了其重要的作用。同时,由于信息技术的本质在于不断创新,因而人们将 21 世纪称之为信息世纪。根据人类生理特征,青少年时期正处于思维活跃、充满各种幻想的黄金年代,孕育着创新的种子和潜能。长期的实践活动告诉我们,青少年信息学奥林匹克竞赛可以让广大的青少年淋漓尽致地展现其思维的火花,享受创新带来的美感。因此,该项活动得到了全国各地广大青少年朋友的喜爱,越来越多的青少年朋友怀着浓厚的兴趣加入到这项活动中来。

从本质上看,计算机学科是一种思维学科,正确的思维训练可以播种持续创新的优良种子。相对于其他学科的竞赛,信息学竞赛覆盖知识面更为宽广,涉及数学、数据结构、算法、计算几何、人工智能等相关的专业知识。如何在短时间内有效地掌握这些知识的主体,并能灵活地应用其解决实际问题,显然是一个值得认真思考的问题。

知识学习与知识应用基于两种不同的思维策略,尽管这两种策略的统一本质上依赖于选手自身的领悟,但是如何建立两种策略之间的桥梁、快速地促进选手自身的领悟,显然是教材以及由其延伸的教学设计与实施过程所应考虑的因素。竞赛训练有别于常规的教学,要在一定的时间内得到良好的效果,需要有一定的技术方法,而不应拘泥于规范。从学习的本质看,各种显性知识的学习是相对容易的。或者说,只要时间允许,总是可以消化和理解的。然而,隐性知识的学习和掌握却是较难的。由于隐性知识的学习对竞赛和能力的提高起到决定性的作用,因此,仅仅依靠选手自身的感悟,而不能从隐性知识的层面重新组织知识体系,有目的地辅助选手自身的主动建构,显然是不能提高竞赛能力的。基于上述认识,结合多年来开展青少年信息学竞赛活动的经验,我们组织了一批有长期一线教学经验的教练员和专家、教授,编写出版了这套《青少年信息学奥林匹克竞赛实战辅导丛书》。

丛书的主要特点如下:

1. 兼顾广大青少年课外学习时间的短暂与知识内容较多的矛盾,考虑我国青少年信息学竞赛的特点和安排,丛书分为四个层次,分别面向日常常规训练、数据结构与数学知识强化、重点专题解析和精选试题解析,

既考虑知识体系的系统性及连续训练的特点,又考虑各个层次选手独立训练的需要。

2. 区别于常规的教学模式,丛书中每册书的体系设计以实战需要为核心主线,突出重点,整个体系从逻辑上构成符合某种知识体系学习规律的系统化结构。

3. 围绕实战辅导需求,在解析知识和知识应用关系所蕴涵的递归思维策略的基础上,重构知识点关系,采用抛锚式和支架式并重教学思路,突出并强化知识和知识应用两者之间的联系。

4. 在显性知识及其关系基础上,强调知识应用模式及其建构的学习方法的教学,注重学习思维和能力的训练,实现知识应用能力和竞赛能力的提高,强化从程序设计与应用的角度来进行训练的特点。

5. 整套丛书的设计,不仅注重竞赛实战的需要,还考虑选手未来的发展,强调计算机程序设计正确思维的训练和培养,以不断建立持续创新的源泉。

值此邓小平同志“计算机的普及要从娃娃抓起”重要讲话发表 25 周年之际,我们期望以此奉献给广大读者朋友一套立意新、选材精、内容丰富的青少年信息学奥赛读本。

本套丛书的编写与出版,得到了东南大学出版社的大力支持,在此表示感谢!

沈 军 李立新 王晓敏

2008 年 12 月

前言

近几年,随着全国青少年信息学奥林匹克竞赛健康、深入地发展,许多省市在培养、选拔参赛选手的过程中取得了丰富的经验和显著的成效。这些宝贵的经验和训练水平很大程度上反映在各自的 NOI 代表队选拔和集训的试题上。这些试题的分析、解答是进行学术研究、教学实践不可多得的参考资料。为了使这些凝聚了许多专家学者、指导老师和参赛选手心血的资源得到更好的利用,本着相互借鉴和资源共享的目的,上海、山东、江苏三地的有关方面经多次讨论,决定集各地之力联合编写《精选试题解析》一书,值此纪念邓小平同志“计算机的普及要从娃娃抓起”重要讲话发表 25 周年、NOI 成功举办 25 周年之际,为读者奉献一本立意新、选材精、内容丰富的青少年信息学奥赛读本。

本书共分三篇,分别为江苏篇、山东篇、上海篇,每篇精选了一批该地近几年 NOI 代表队选拔试题,每一试题的解析独立成文,文中着重在试题的分析、数学模型的构建、算法的设计、算法的实现等方面下笔,让读者从中领悟解题的思维方法和过程。文中特意设置的【归纳与拓展】版块,作者针对试题作了进一步的补充,或对知识点的拓展、或对该题解法的讨论和归纳、或对题目本身的拓展和探讨,留给读者思考余地。

下列人员参加了本书的编写工作:

- 第一篇 南京外国语学校 吴尚、贾志鹏、蔡心媛,指导老师吴效时
江苏省苏州中学 张若愚、徐晔嘉,指导老师章维铨
江苏省常州高级中学 陈爽、蒋中天,指导老师曹文
扬州树人学校 胡渊鸣,指导老师倪震祥
江苏省丹阳高级中学 殷志超,指导老师荆晓虹
南师附中 李耀东,指导老师王静
江苏省泰州高级中学 智天成,指导老师潘凌云
- 第二篇 山东师大附中 赵宗昌
山东省实验中学 王乃广

山东青岛二中 臧方青

第三篇 上海市上海中学 毛黎莉

北京大学的曹钦翔同学和华师大二附中吴佳俊同学也为第三篇的编写做了大量的解题工作。

本书由江苏省青少年信息学奥林匹克竞赛委员会的李立新、沈军、王晓敏老师,上海市科技艺术教育中心余晓清老师,山东师范大学刘培玉老师共同策划,在编写过程中林厚从老师对江苏篇的部分稿件进行了修改,在此一并表示衷心的感谢。

编 者

2010年3月12日于苏州树山温泉

目 录



江苏篇

- 1 末日传说 (3)
- 2 平衡点 (8)
- 3 完美的对称 (14)
- 4 流行舞蹈 (21)
- 5 重要的城市 (33)
- 6 化学反应 (42)
- 7 行程 (50)
- 8 祖玛 (59)
- 9 下落 (70)
- 10 巨额奖金 (78)
- 11 星球大战 (90)
- 12 小店购物 (99)
- 13 最大值 (107)
- 14 猜图游戏 (114)



山东篇

- 1 仪仗队 (135)
- 2 校门外的区间 (138)
- 3 红黑树 (145)
- 4 沙拉公主的困惑 (152)
- 5 Sue 的小球 (157)
- 6 洞穴勘测 (163)

7	递归数列(版本Ⅱ)	(176)
8	Sandy 的卡片	(182)
9	郁闷的小 J	(189)
10	烧水问题	(198)
11	最优图像	(201)
12	地图复原	(207)
13	学校食堂	(212)
14	虔诚的墓主人	(217)
15	细胞探索	(225)
16	E&D	(233)
17	HH 去散步	(238)
18	SuperGCD	(243)
19	晨跑	(248)
20	HH 的项链	(253)
21	Bill 的挑战	(258)
22	Elaxia 的路线	(263)



上海篇

1	吃豆豆(PACMAN)	(273)
2	分球(ball)	(285)
3	矩形(RECT)	(292)
4	书柜的尺寸(bookcase)	(302)
5	树的双中心(median)	(307)
6	园丁的烦恼(tree)	(314)
7	最小生成树(MST)	(321)
8	巴士路线(bus)	(333)
9	宝石纪念币(coin)	(344)
10	会场预约(booking)	(358)
11	交通网络(transport)	(366)
12	舞会(ball)	(373)

江 苏 篇





末日传说

【问题描述】

只要是参加 JSOI 活动的同学一定都听说过汉诺塔的传说：三根柱子上的金片每天被移动一次，当所有的金片都被移完之后，世界末日也就随之降临了。

在古老东方的幻想乡，人们都采用一种奇特的方式记录日期：他们用一些特殊的符号来表示从 1 开始的连续整数，1 表示最小而 N 表示最大。创世纪的第一天，日历就被赋予了生命，它自动地开始计数，就像排列在不断地增加。

我们用 $1-N$ 来表示日历的元素，第一天日历就是：

$1, 2, 3, \dots, N$

第二天，日历自动变为：

$1, 2, 3, \dots, N, N-1$

每次它都生成一个以前未出现过的“最小”的排列——把它转为 $N+1$ 进制后数的数值最小。

日子一天一天过去。有一天，一位预言者出现了——他预言道，当这个日历到达某个上帝安排的时刻，这个世界就会崩溃……他还预言道，假如某一个日期的逆序达到一个值 M 的时候，世界末日就要降临。

什么是逆序？日历中的两个不同符号，假如排在前面的那个比排在后面的那个更大，就是一个逆序，一个日期的逆序总数达到 M 后，末日就要降临，人们都期待一个贤者，能够预见那一天，到底将在什么时候到来？

【输入文件】 (legend. in)

输入文件只包含一行两个正整数，分别为 N 和 M 。

【输出文件】 (legend. out)

输出一行，为世界末日的日期，每个数字之间用一个空格隔开。

【时 限】 1s

【输入输出样例】

legend. in	legend. out
5 4	1 3 5 4 2



数据规模

对于 10% 的数据有 $N \leq 10$ 。

对于 40% 的数据有 $N \leq 1000$ 。

对于 100% 的数据有 $N \leq 50000$ 。

所有数据均有解。

【问题分析】

本题求解任务可简述为:给出 N, M , 求出具有 M 个逆序对的最小的 N 个数的全排列。

初步想法是:从 $1 \sim N$ 开始按顺序生成全排列,并检查每个序列是否具有 M 个逆序对。但是,这种方法的耗时可达 $N!$,是无法忍受的。

仔细分析“逆序对”的定义,可以得知:如果一个较大的数的位置在另一个较小的数的前面,无论较小的数的具体位置在哪里,只要在较大的数之后,这两个数就构成一个逆序对。进而可以得出:如果一个 $1 \sim N$ 全排列序列的第一个数为 x ,无论后 $n-1$ 个数怎样排列,一定会有 $x-1$ 个小于 x 的数在数 x 的后面,即这个序列至少有 $x-1$ 个逆序对;对于后 $n-1$ 个数的排列,如果第 1 个数(也就是整个长度为 n 的序列的第 2 个数)是在 $1 \sim N$ 中去除 x 后的第 x_2 小的数,那么类似的,一定会有 x_2-1 个小于 x_2 的数在 x_2 的后面,即这个长度为 $n-1$ 的序列至少有 x_2-1 个逆序对。以此类推,如果整个序列的第 i 个数为除去前 $i-1$ 个数后的第 x_i 小的数,那么后 $n-i+1$ 个数的序列中至少有 x_i-1 个逆序对。而整个序列的逆序对总数就等于关于第一个数和后面数的 $x-1$ 个逆序对加上后 $n-1$ 个数的序列所具有的逆序对总数,后 $n-1$ 个数的逆序对总数也等于 x_2-1 加上后 $n-2$ 个数的序列所具有的逆序对总数。以此类推,可以得出:

$$n \text{ 个数的逆序对总数} = \sum_{i=2}^n (x_i - 1)$$

于是,题目的求解任务就转变成为:求一组上述的 x ,使得这组 x 对应的逆序对总数等于 m ,并使得这组 x 对应的全排列序列最小。

为了使序列最小,应当让前面的数尽可能小,也就是让前面的 x_i 尽可能小。这样一来,整个序列的逆序对就会集中在后面的部分。也就是说:让逆序对尽量集中在后几个数中。具体做法是:前面的部分从 1 开始递增,不产生任何逆序对(即 $x_i=1$),让序列最后尽量少的数产生最多的逆序对(即 $x_i=i$,形成递减序)。显然 k 个数能产生的最多的逆序对为 $k(k-1)/2$ 个,即递减序列所产生的逆序对,因此可以让满足 $k(k-1)/2 \leq m$ 的最大的 k 对应的后 k 个数成为递减序。为了让整个序列的总逆序对数等于 m ,应当让 $x_{n-k} + k(k-1)/2 = m$,即 $x_{n-k} = m - k(k-1)/2$ 。这样一来,后 $k+1$ 个数的序列就具有了 m 个逆序对,然后只要让前面的 $(n-k-1)$ 个数成递增序($x_i=1$)即可。



【算法实现】

按上面的描述求出 x 后,就可以直接按位依次计算出符合要求的序列了。

具体实现时,为了方便查询第 x_i 大的数,可以设置一个数组 $\text{numbers}[j]$ 储存第 j 小的数,依次访问 $\text{numbers}[x_i]$,并做相应的维护,使得元素 $\text{numbers}[j]$ 始终是除去序列中当前位之前的元素(即用过的数)后剩下的第 j 小的数,即组成后面序列的所有数中第 j 小的数。但是,维护时要进行大量的数据移动,使得除去当前位 i 使用的数 $\text{numbers}[x_i]$ 后, $\text{numbers}[j]$ 中存储的仍是第 j 小的数,由于所有比 $\text{numbers}[x_i]$ 大的剩余数都不再是原来的第 j 个数,而是第 $j-1$ 个数,因此所有比 $\text{numbers}[x_i]$ 大的数都应往前移一位,以满足之后的查询要求。然而,此题中 $n \leq 50000$,这样的数据移动代价是很大的,上述算法又要求每除去一个数,即每生成一个数,就要进行移动,最坏情况下时间复杂度可达 $O(n^2)$,不满足时间限制。

仔细分析生成的序列,可以得出:由于上述算法生成的前 $n-k-1$ 个数是从 1 开始递增至 $n-k-1$,因此计算这段序列时并不需要不断的查询,只需要简单的累加即可。这一段的处理完成后,进行一次移动,将 $n-k-1$ 之后的数往前移 $n-k-1$ 位,以便查询第 x_{n-k} 小的数。计算出第 $n-k$ 位后,再进行一次维护,将 $n-k$ 之后的数往前移 1 位。由于后面的序列是递减序,除去最大的数不会影响前面所有的数,所以不需要不断的移动,只需要不断地查询当前最大的数即可。这样一来,整个过程只需要两次数据移动,平方时间算法降为线性,不会超出时间限制。

实现时不需要存储所有的 x ,只需要求出 k ,前面 $n-k-1$ 个数的递增序列简单累加即可生成,要求出第 $n-k$ 个数,只要求出 $m-k(k-1)/2$ 并查询,之后只要倒序输出 numbers 数组中所有剩余的数即可。只需要 numbers 数组存储第 i 小的数,便于查询。

【Pascal 参考程序】

```
// Program: 末日传说
program legend(input,output);
const maxn=50000;
type arraytype=array[1..maxn]of longint;
var n,m;longint;

procedure plusarray(var a:arraytype;left,right,x:longint);
var i:longint; //将数组 left-right 间的元素移动 x 位
begin
  for i:=left to right do a[i]:=a[i]+x;
end;
```

```
procedure createlist(n,m:longint);
```

```
var
```

```
  numbers:arraytype;
```

```
  i,p,x,s:longint;
```

```
  isfirst:boolean;
```

```
begin
```

```
  for i:=1 to n do numbers[i]:=i;
```

```
  s:=0; i:=1;
```

```
  while s<m do begin
```

```
    //计算 k
```

```
    s:=s+i; i:=i+1;
```

```
  end;
```

```
  dec(i);
```

```
  s:=s-i; p:=n-i;
```

```
  isfirst:=true;
```

```
  for i:=1 to p-1 do
```

```
    //输出序列前面递增部分
```

```
    if isfirst then begin
```

```
      write(i); isfirst:=false;
```

```
    end
```

```
    else write(' ',i);
```

```
  plusarray(numbers,1,n-p+1,p-1);
```

```
    //维护 numbers 数组
```

```
  x:=numbers[m-s+1];
```

```
  If not(isfirst) then write(' ') else isfirst:=false;
```

```
  write(x);
```

```
    //输出第 n-k+1 位
```

```
  plusarray(numbers,m-s+1,n-p,1);
```

```
  for i:=p+1 to n do write(' ',numbers[n-i+1]); //输出序列递减部分
```

```
  writeln;
```

```
end;
```

```
begin
```

```
  assign(input,'legend.in'); assign(output,'legend.out');
```

```
  reset(input);
```

```
  read(n);
```

```
  readln(m);
```

```
  close(input);
```

```
rewrite(output);  
createlist(n,m);  
close(output);  
end.
```

(执笔:蔡心媛 指导:吴效时)