◎首届学术报告会◎

编号
基—8305

论文资料

二元函数极限定义探讨

（江飞学）

常州工业技术学院

八三·十二

二元函数极限定义探讨

提出问题

工科院校使用的“高等数学”教材* 中，对二元函数的极限经常采用下述定义。

定义：

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一领域内有定义（点 P_0 可以除外），$P(x,y)$ 是领域的任意一点，如果当点 P 以任何方式无限趋近于点 P_0 时，函数的对应值 $f(x,y)$ 无限趋近于一个定数 A，我们就说数 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $x \longrightarrow x_0$，$y \longrightarrow y_0$ 时的极限，记作：

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

用“$\varepsilon-\delta$”语言写出就是：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\delta>0$。当 $0<|PP_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(P)-A|<\varepsilon$，

则 $\lim\limits_{P\to P} f(P)=A$

按上述定义考察下列极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

---

* 如：樊映川等编“高等数学讲义”（简称“讲义”）；

同济大学数学教研究编“高等数学”

四川大学高等数学教研组编“高等数学”

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$

不难发现，不同的书上给出的答案不同。如同济大学数学教研室编“高等数学习题集”上的答案（65年版78年印刷本与80年印刷本），Г.Н.别尔曼著“数学分析习题汇编”（简称“别本）上的答案；80年3月数学通报上的文章（简称“通报”文章）“关于多元函数极限定义的讨论”第（一）段给出的答案已汇集在下面的表中：

答案 书名 / 题号	“别”本	“同”78年印本	“同”80年印本	“通报”文章
(1)	0	0	0	不存在
(2)	2	2	2	〃
(3)	0	0	不存在	〃
(4)	1	1	〃	〃

另外，中央广播电视大学“高等数学”课的教学中，也用过这四道题，答案与“别”本相同，但(3)，(4)题中 $x\to 0$，$y\to 0$ 被改为 $x\to 0^+$，$y\to 0^+$。

四道题采用的都是樊映川编“讲义”上的定义，相应的答案却相差很大，实属少见，原因何在？多元函数的极限是工科：高

等数学”课程教学中的难点，如何合理而迅速地求出二元函数的极限值或证明其极限不存在，本文将在这一方面进行初步的探讨。

“通报”文章认为，对照上述定义，当区域的边界不是一个点，而是一条曲线 l，又 $P_0 \in l$ 时，以 P_0 为圆心的任意一个圆形开域中免不了总有无穷多个点会使函数 $f(x,y)$，没有定义从而 $P \to P_0$ 时极限不存在。

例如 $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{x}$，原点 $(0,0)$ 在该函数定义域 D 的边界上，由于点 $(0,0)$ 的任一圆形开域中总有无穷多个点（即 y 轴上的点）会使函数 $f(x,y)$ 失去意义，从而满足定义的 P_0 点的邻域不存在，$\therefore (x,y) \longrightarrow (0,0)$ 时，$f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{x}$ 的极限不存在。

上面的结论是错误的。下面以“讲义”为蓝本，研究如何正确地理解二元函数极限的定义以及 P_0 为边界点时，如何求二元函数的极限。并说明根据“讲义”的定义，四道题的答案分别是：(1) 0；(2) 2；(3) 不存在；(4) 不存在；是正确的（即“同”80 年本的答案），其余答案均有错。

先看“讲义”§12.2 中间的一个脚注（“讲义”下册第74 页末行。

照抄于下：

“如果 P_0 是 D 的边界点，我们只考虑它的邻域与 D 的公共部分上的各点 $P(x,y)$，这是对边界点的特殊规定，一般的讨论 D 的内点为准”。

这就是说，对定义于区域 D 上的二元函数，$z=f(x,y)$ 而言，若 $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点，要求函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 的某一邻域内有定义（P_0 点可以例外）这时 P_0 点的邻域是一个圆形的开域；若 $P_0(x_0,y_0)$ 是满足边界点条件的点，这时 P_0 的邻

域虽然还是一个圆形的开域 $N(P_0,\delta)$，但在求 $P\to P_0$ 时函数的极限时，只要求对 D 内的那些适合不等式 $0<|PP_0|<\delta$ 的点处函数有定义，且恒有不等式：

$|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立就行了

我们把 $N(P_0,\delta)$ 与 D 的公共部分，记为集 $U_{边}$ 则：

$$U_{边}=D\cap\left\{(x,y)\;\middle|\;0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

点集 $U_{边}$ 可能会有各种形状，如下图中画有阴影线的图形。

图 1

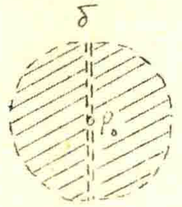

图 2

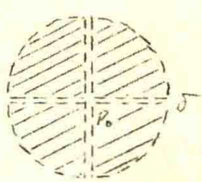

图 3

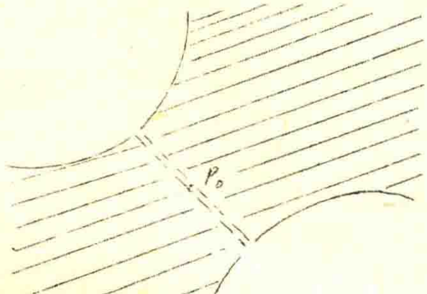

图 4

这样一来，类似于一元函数中动点趋向于区间端点时极限情况的讨论。如果 $P_0(x_0,y_0)$ 在 D 的边界上，只要考虑动点 $P(x,y)$ 在集 $U_{边}$ 内函数有定义，并考虑从 $U_{边}$ 内 P，点 $P(x,y)$ 按任意方式趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，是否有 $f(x,y)\longrightarrow A$ 就行了，至于在函数定义域 D 外（自然也在 $U_{边}$ 外）的点 $P\longrightarrow P_0$ 时的情况，则根本不必考虑。

数学中强调在使函数 $z=f(x,y)$ 有意义的条件下再考虑函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义（P_0 点可以除外），一般学生很容易接受且又没有改变定义的原意，经试验这样处理的效果是很好的。

此外，这四道题的求解，除用到极限的定义外，还要用二元函数的连续性，一般应安排在 §12.2 二元函数的极限与连续性这一节教完后再做为宜。

解决问题

在讲清区域，区域的边界，极限的定义与集 $U_边$ 的找法后，可按下面的步骤求极限。

第一步：写出函数 $z=f(x,y)$ 的定义域，若 P_0 为函数 $z=f(x,y)$ 的连续点，则利用连续函数的性质求函数的极限值。

第二步，若 P_0 为函数的边界点则先找出集 $U_边$，然后在集 $U_边$ 内考虑点 P 以任意方式趋近于 P_0 时极限是否存在。

一般可借助于极限的定义，定理及一些已知的极限来证明极限的存在或求出极限值。应当注意，点 $P(x,y)$ 在 D 内沿任何路经趋向于点 P_0 (x_0,y_0) 时函数 $f(x,y)$ 都趋近于数 A，这时极限才存在；若沿不同的路经趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 趋向于不同的数值，则极限不存在，后者是证明极限不存在的主要方法。

求二元函数的极限也还有其他的办法，如在区定义中加上条件"P_0 是 D 的一个聚点"或"P 是一切属于定义域中的点"等，即重新定义或推广原有定义也能很好地解决问题。但由于上述课本或习题集在工科院校中，使用已十分广泛，在不修改原有定义的任何字句也能讲清概念，解决工科实际问题时，还是继续使用原有定义为好。

上述四题，现试解如下：

(1) 求：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{x}$

$f(x,y)=\frac{\sin(xy)}{x}$ 的定义域 $D=\{(x,y)\mid x\neq 0\}$ 点 $P_0(0,0)$ 是边界点。$U_{\text{边}}=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta,\ x\neq 0\}$ 如图2所示：

在 $U_{\text{边}}$ 内

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{xy}\cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y$$

$=1\cdot 0=0$

$$\therefore \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{x}=0$$

(2) 求：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$

解：

$D=\{(x,y)\mid xy\neq 0,\ xy\geq -1\}$ 点 $P_0(0,0)$ 是边界点

如图3所示：$U_{\text{边}}=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta,\ xy\neq 0,\ xy\geq -1\}$

在 $U_{\text{边}}$ 内

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1})^2-1^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{xy+1}+1)=2$$

(3) 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$

解：

$D=\{(x,y)\mid x+y\neq 0,\ xy\geq -1\}$ 点 $P_0(0,0)$ 是边界点

$U_{\text{边}}=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta,\ x+y\neq 0,\ xy\geq -1\}$ 在 $U_{\text{边}}$ 内

设 $P(x,y)$ 沿曲线 $y=-x+kx^2$ 趋近于 $P_0(0,0)$ 则

$$原式=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x+Kx^2\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{Kx^3-x^2+1}-1}{Kx^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{Kx^3-x^2+1})^2-1}{Kx^2(\sqrt{Kx^3-x^2+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{Kx-1}{K(\sqrt{Kx^3-x^2+1}+1)}$$

$$=\frac{-1}{2K}$$

随K的取值不同而改变数值，即沿不同的曲线趋于点(0.0)时函数$f(x.y)$趋于不同的数值。

∴本题极限不存在

(4)求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$

解：点$P_0(0,0)$是边界点

$U_{边}=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta,\ x+y\neq 0\}$

设$P(x,y)$沿曲线族 $y=-x+Kx^2$ 趋向于点$P_0(0,0)$：1

$$原式=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2+Kx^2\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=\lim_{x\to 0}(1+x(-x+Kx^2))^{\frac{1}{Kx^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+(Kx^3-x^2))^{\frac{1}{Kx^3-x^2}\cdot\frac{Kx^3-x^2}{Kx^2}}$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}(1+(Kx^3-x^2))^{\frac{1}{Kx^3-x^2}}\right]^{\frac{Kx-1}{K}}$$

$$=e^{-\frac{1}{K}}$$

沿不同的曲线趋于原点时，函数趋向于不同的数值

∴本题极限不存在