高等学校教材经典同步辅导丛书数学专业类(一)
配高教社工程数学《复变函数》 第四版 西安交大高数教研室 编

工程数学

复变函数

(第四版)

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
曾 捷 主编

◈紧扣教材 ◈知识精讲

◈习题全解 ◈应试必备

◈联系考研 ◈网络增值

中国矿业大学出版社

高等学校教材经典

复变函数

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
曾 捷 主编

中国矿业大学出版社

内容提要

本书是高等教育出版社出版，西安交通大学高等数学教研室编的《复变函数》(第四版)教材的配套辅导书。全书由学习导引、知识点归纳、典型例题与解题技巧、课后习题全解及考研考试指导等部分组成，旨在帮助读者掌握知识要点，学会分析问题和解决问题的方法技巧，并且提高学习能力及应试能力。

本书可供高等院校复变函数课程的同步辅导使用，也可作为研究生入学考试的复习资料，同时可供本专业教师及相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数同步辅导及习题全解/曾捷主编．—徐州：中国矿业大学出版社，2006.8

(高等学校教材经典同步辅导丛书)

ISBN 7-81107-399-4

Ⅰ.复… Ⅱ.曾… Ⅲ.复变函数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 086953 号

书　　名 复变函数同步辅导及习题全解
主　　编 曾　捷
责任编辑 罗　浩
选题策划 孙怀东
特约编辑 王丽娜
出版发行 中国矿业大学出版社
网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail** cumtpvip@cumtp.com
印　　刷 北京市昌平百善印刷厂
经　　销 新华书店
开　　本 850×1168　1/32　**本册印张** 8.25　**本册字数** 172 千字
印　　次 2008 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
总 定 价 81.60 元

高等学校教材
经典同步辅导丛书编委会

结，从而更好地帮助学生理解掌握每一知识点。

5. 考研考试指导 首先总结了各章节考研考试的常考题型十二例，然后精选了清华大学等名校的最新考研考试试题并给出了参考答案，以帮助学生顺利通过相关考试。

本书在编写时参考了大量的优秀教材和权威考题。在此，谨向有关作者和所选考试、考研试题的命题人以及对本书的出版给予帮助和指导的所有老师、同仁表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正。

联系我们

华腾教育网：http://www.huatengedu.com.cn

电子邮件：huateng@huatengedu.com

华腾教育教学与研究中心

目 录

CONTENTS

第一章

复数与复变函数

学习导引

本章首先在中学阶段学过的复数的基础上做了简要的复习和补充;然后介绍了复平面上的区域以及复变函数的极限与连续性等概念,为进一步研究解析函数理论和方法奠定必要的基础.

知识点归纳

一、复数及其代数运算和几何表示

1. 复数的概念

设 x,y 都是实数,我们把形如 $z=x+iy$ 或 $z=x+yi$ 的表达式称为复数.其中 i 称为虚数单位,且具有性质 $i^2=-1$,x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部,记为

$$x=\mathrm{Re}(z),y=\mathrm{Im}(z).$$

(1)当 $x=0,y\neq0$ 时,$z=iy$ 称为纯虚数.

(2)当 $y=0$ 时,$z=x+0\cdot i$ 视为实数 x.

(3)设 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$,则 $z_1=z_2$,当且仅当 $x_1=x_2$,$y_1=y_2$.

(4)当 $x=y=0$ 时,称 $z=0$.

2. 复数的运算

(1)加(减)法

两个复数的加(减)法,定义为实部与实部相加(减)及虚部与虚部相加(减),即

$$(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2).$$

(2)乘法

两个复数相乘按多项式乘法法则相乘并注意 $i^2=-1$,即

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

(3)除法

若 $z_2\neq0$,将满足 $z_2\cdot z=z_1$ 的复数 z 定义为 z_1 除以 z_2 的商,记为 $z=\frac{z_1}{z_2}$,即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

(4)复数的共轭及性质

设 $z=x+iy$,称 $x-iy$ 为复数 z 的共轭复数,记为 $\bar{z}$,即 $\bar{z}=x-iy$,它有如下性质:

①$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$, $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\ \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}(z_2\neq0)$;

②$\bar{\bar{z}}=z$, $z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$;

③$\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$.

3. 复数的几种表示方法

(1)复数的坐标表示

每一个复数 $z=x+iy$ 确定平面上一个坐标为(x,y)的点,反之亦然,这意味着复数集与平面上的点之间存在一一对应关系. 由于这个特殊的一一对应存在,我们常把以 x 轴为实轴,y 轴为虚轴的平面称之为复平面. (x,y)为复数 $z=x+iy$ 的坐标表示形式,称为点 z.

(2)复数的向量表示

记复数 $z=x+iy$ 在平面上确定的点为 P，原点为 O. 设复数 z 对应向量 $\overrightarrow{OP}$. 这也是一个特别的一一对应. 为此我们称向量 $\overrightarrow{OP}$ 为复数 z 的向量表示式.

向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 z 的模或绝对值，记为 $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$.

我们有结论：

$$z\bar{z}=|z|^2=|z^2|.$$

当 $z\neq 0$ 时，以正实轴为始边，向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边所确定的角 θ 称为复数 z 的辐角，记为

$$\mathrm{Arg}z=\theta.$$

$\mathrm{Arg}z$ 是一个多值函数. 称满足条件 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的 θ 为幅角的主值，记为 $\arg z$. 从而有

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

当 $z=0$ 时，辐角不确定.

辅角主值 $\arg z(z\neq 0)$ 可由 $\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$ 按下列关系确定

$$\arg z(z\neq 0)\begin{cases}\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} & \text{当 } x>0\\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}+\pi & \text{当 } x<0,y>0\\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}-\pi & \text{当 } x<0,y<0\\ \pi & \text{当 } x<0,y=0\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{当 } x=0,y>0\\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{当 } x=0,y<0\end{cases}$$

利用复数的向量表示法对任意复数 z_1,z_2，三角不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

的意义为三角形的一边不大于两边之和. 不等式

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$$

表示三角形的一边不小于两边之差的绝对值.

(3)复数的三角表示

设 $z\neq 0$, r 是 z 的模, θ 是 z 的任意一个辐角.则

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

(4)复数的指数表示

在三角表式示中,利用欧拉公式: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 可得

$$z=re^{i\theta},$$

称为复数 z 的指数表示式.

以上复数的不同表示法仅是形式上的差异,它们各有其特点.复数及其运算的几何解释可以从向量表示法得到,复数运算中模与幅角的变化规律可以由三角或指数表示法得到.

(5)复球面

一个球与复平面相切于原点 S,过原点作垂直平面的直线交球于 N 点,则 S,N 分别称为球的南极与北极.由于这样的球与扩充的复平面存在特别的一一对应,常称此球面为复球面。

扩充复平面是指在复平面中加进无穷远点∞后的集合.

4. 复数的乘幂与方根

(1)积与商

设 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$, $z_2=r_2e^{i\theta_2}$ 则

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)},\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\quad(r_2\neq 0).$$

即

① $|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\ \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}\quad(z_2\neq 0)$;

② $\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2,\ \mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2$.

注意:(ⅰ)正确理解等式②的含义;

(ⅱ)乘积与商的几何解释.

(2)乘幂

设 $z=re^{i\theta}$，则 $z^n=r^n e^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$. 棣莫弗(DeMoivre)公式：$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 及其应用.

(3)方根

设 $z=re^{i\theta}$，则 $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n})$　$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

注意：$\sqrt[n]{z}$ 的 n 值性及几何解释.

二、复变函数及其极限与连续

1. 平面点集

(1)z_0 的 δ一邻域：满足关系 $|z-z_0|<\delta$ 的点 z 的全体称为点 z_0 的一个 δ一邻域，而满足 $0<|z-z_0|<\delta$ 的点 z 的全体称为点 z_0 的一个去心 δ一邻域.

(2)内点：设 G 是一平面点集，$z_0\in G$，若存在 z_0 的某个邻域也包含于 G，则称 z_0 为 G 的内点.

(3)开集：若 G 的每个点都是内点，则称 G 为开集.

(4)连通集：若平面点集 G 中任意两点都可以用完全属于 G 的折线连接起来，则称该集合 G 为连通集。

(5)区域：连通的开集叫区域.

(6)边界：若 z_0 点的任意一个邻域内既有区域 G 中的点，又有不属于 G 中的点，则 z_0 称为区域 G 的一个边界点. 由 G 的全体边界点组成的集合称为 G 的边界.

(7)闭区域：区域 G 及其边界一起构成闭区域，记为 $\overline{G}$.

(8)简单闭曲线：设曲线 $C: z=z(t)=x(t)+iy(t), a\leqslant t\leqslant b$. 当 $x(t)$ 与 $y(t)$ 连续时，称 C 为连续曲线. 对 $a<t_1<b, a\leqslant t_2\leqslant b$，当 $t_1\neq t_2$ 而有 $z(t_1)=z(t_2)$ 时，点 $z(t_1)$ 称为曲线 C 的重点. 没有重点的连续曲线 C，称为简单(或 Jardan)曲线. 如果简单曲线 C 的两个端点重合，则 C 称为简单闭曲线.

由以上定义知，简单曲线自身不相交，简单闭曲线则只有起点与终点重合.

(9)光滑曲线：曲线 $z=z(t)=x(t)+iy(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$，当 $x'(t)$ 与 $y'(t)$ 连续且 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$ 时，称为光滑曲线，由几条光滑曲线依次连接而成的曲线，称为按段光滑曲线.

(10)单连通域：若属于区域 G 的任何简单闭曲线 C 的内部也属于 G，则称 G 为单连通域. 否则称为多连通域.

2. 复变函数的概念

复变函数是高等数学中一元实变函数概念的推广，二者定义的表述形式几乎完全一样，只要将定义中的"实数（或实数集）"换为"复数（或复数集）"就行了. 但对下面几点应多加注意：

(1)实变函数是单值函数，而复变函数有单值函数和多值函数之分.

(2)复变函数 $w=f(z)$ 是从 z 平面上的点集 G 到 w 平面上的点集 G^* 的一个映射，因此，它不但可以把 z 平面上的点映射（或变换）为 w 平面上的点，而且可以把 z 平面上的曲线或图形映射为 w 平面上的曲线或图形，实现两个不同复平面上的图形之间的有趣的变换，为简化或研究某些问题提供了可能.

(3)由于一个复变函数 $w=f(z)$ 对应着两个二元实变函数：

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),$$

所以，可以将对复变函数的研究转化为对两个二元实变函数的研究. 这是研究复变函数的常用思想方式之一.

3. 复变函数的极限与连续性

(1)定义：设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 点的去心领域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义，若任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0(0<\delta\leqslant\rho)$，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限，记为：

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A.$$

若 $f(z)$ 在 z_0 点有定义，且 $f(z_0)=A$，则称 $f(z)$ 在点 z_0 连续.

若 $f(z)$在区域 G 内每一点都连续，我们称 $f(z)$在G 内连续.

(2)设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$A=u_0+iv_0$，$z_0=x_0+iy_0$，那么

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A \Leftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0\end{cases} \qquad ①$$

由此可见，复变函数极限的定义虽在形式上与一元实函数的极限定义相似，但实质上却相当于二元实函数的极限.这导致了第二章用极限定义的复变函数的导数的概念，较之一元实变函数的导数概念，其要求要苛刻得多.

(3)如果$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$，那么

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B,$$

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)]=AB,$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0).$$

(4)由定义及式①易得连续的充要条件：

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)\Leftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u(x_0,y_0)\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v(x_0,y_0)\end{cases}$$

典型例题与解题技巧

例 1 将复数 $z=\dfrac{(\sqrt{3}+i)(2-2i)}{(\sqrt{3}-i)(2+2i)}$化为三角形式与指数形式.

【分析】 将一个复数 z 化为三角形式与指数形式的关键在于求出该复数的模与辐角的主值.通常的方式是先将 z 化成代数形式 $z=x+iy$，再利用 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 与反正切公式分别求出它的模与主辐

角. 本题中由于 z 的分子与分母互为共轭复数，而复数与其共轭复数的模相等，因此，容易利用复数商的模公式求出 $|z|$. 至于主辐角除可反正切公式求得外. 也可以利用关于乘积与商的辐角公式来求. 下面给出两种解法，便于读者比较.

解 将 z 的分子与分母同乘以 $(\sqrt{3}+i)(2-2i)$，得 $z=\frac{(\sqrt{3}+i)^2}{|\sqrt{3}+i|^2}\cdot\frac{(2-2i)^2}{|2-2i|^2}=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(-i)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$，所以 $|z|=1$，$\arg z=\operatorname{arctg}(-\frac{\sqrt{3}}{3})=-\frac{\pi}{6}$. 从而得到 z 的三角形式与指数形式：

$$z=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}=e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

另一种解法是，由于分子与分母恰为一对共轭复数，故其模相同，于是

$$|z|=\frac{|(\sqrt{3}+i)(2-2i)|}{|(\sqrt{3}-i)(2+2i)|}=1$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg} z&=2[\operatorname{Arg}(\sqrt{3}+\mathrm{i})+\operatorname{Arg}(2-2i)]\\&=-\frac{\pi}{6}+2k\pi.\end{aligned}$$

例 2 设 z_1,z_2 为复平面上任意两点，证明不等式

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||.$$

【分析】 这个不等式的几何意义为以 z_1,z_2,z_1-z_2 为边的三角形，一边的长度($|z_1-z_2|$)不小于两边的长度之差的绝对值($||z_1|-|z_2||$). 证明这个不等式可利用书中已证的三角不等式.

证 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$

$\because |z_1|=|z_1-z_2+z_2|\leqslant|z_1-z_2|+|z_2|$

$\therefore |z_1|-|z_2|\leqslant|z_1-z_2|$ ①

$\because |z_2|=|z_2-z_1+z_1|\leqslant|z_2-z_1|+|z_1|$

$\therefore |z_2|-|z_1|\leqslant|z_2-z_1|=|z_1-z_2|$ ②

利用①与②得

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||.$$

例 3 设复数 α 满足 $|\alpha|<1$，试证

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|\begin{cases}=1, 当 |z|=1\\<1, 当 |z|<1\\>1, 当 |z|>1\end{cases}$$

【分析】 比较复数 $\frac{z_1}{z_2}$ 的模 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ 与 1 的大小等价于比较 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2$ 与 1 的大小，也相当于比较 $|z_1|^2$ 与 $|z_2|^2$ 的大小. 此时常用公式 $|z|^2=z\bar{z}$，$|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm 2\mathrm{Re}(\bar{z}_1z_2)$ 以及三角不等式.

证 由等式

$$|z-\alpha|^2=|z|^2+|\alpha|^2-2\mathrm{Re}(\bar{\alpha}z)$$

$$|1-\bar{\alpha}z|^2=1+|\alpha|^2|z|^2-2\mathrm{Re}(\bar{\alpha}z)$$

可知

$$|z-\alpha|^2-|1-\bar{\alpha}z|^2=(|z|^2-1)(1-|\alpha|^2)$$

注意到 $|\alpha|<1$，便有

$$|z-\alpha|^2-|1-\bar{\alpha}z|^2\begin{cases}=0, 当 |z|=1\\<0, 当 |z|<1\\>0, 当 |z|>1\end{cases}$$

从而

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|^2=\frac{|z-\alpha|^2}{|1-\bar{\alpha}z|^2}\begin{cases}=1, 当 |z|=1\\<1, 当 |z|<1\\>1, 当 |z|>1\end{cases}$$

由此即得要证明的结论.

例 4 函数 $w=\frac{1}{z+1}$ 将 z 平面上的下列曲线变成 w 平面上的什么曲线?

(1) $x^2+y^2=1$；　(2) $y=x+1$；　(3) $y=1$.

【分析】 解此题的要点是利用公式

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\qquad y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

及题中映射

$$w=\frac{1}{z+1},\quad z=\frac{1}{w}-1.$$

解 令 $w=u+iv$，

(1)由 $x^2+y^2=1$ 有

$$\frac{1}{4}(z+\bar{z})^2-\frac{1}{4}(z-\bar{z})^2=1$$

即

$$z\bar{z}=1$$

$$\left(\frac{1}{w}-1\right)\left(\frac{1}{\bar{\omega}}-1\right)=1$$

$$\frac{(1-w)\cdot(1-\bar{\omega})}{\omega\bar{\omega}}=1$$

$$(1-w)(1-\bar{\omega})=w\bar{\omega}$$

$$w+\bar{\omega}=1$$

即

$$u=\frac{1}{2}$$

即圆 $x^2+y^2=1$ 映成了直线 $u=\frac{1}{2}$.

(2)由 $y=x+1$ 知

$$\frac{1}{2i}(z-\bar{z})=\frac{1}{2}(z+\bar{z})+1$$

代入 $z=\frac{1}{w}-1$ 得

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{\bar{w}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{\bar{w}}-2\right)+1$$

两边乘以 $2iw\bar{w}$ 得

$$\bar{w}-w=i(w+\bar{w})$$

由前设 $\bar{w}=u-iv$ 知

$$\bar{w}-w=-2iv$$