華氏中西算學全書初集

華氏中窗叢孝

全書必集

行素軒

校本

算術莫難於開方開平立方不難開三乘已上諸方爲難開三乘以上諸方尚不難開實從廉隅正負雜糅諸方爲難自元和李氏取宋秦道古法演爲開方說則開正負雜糅諸方亦不難矣然有益積有翻積開之雖不難而定商甚難定商難則開之仍不易矣

嘉興華君若汀創立數根開方法數根者他數不能度惟一可度之數也凡開方之實必爲諸數根連乘之積而開得之元數必卽實中一數根或卽實中若干數根相乘之數其法先求元之尾數及元之位數乃視實中之數根及若干數根相乘之數其尾數位數與所求合者爲商數有若干商數一一開之其開法亦如秦氏但無次商其式可開若干次者卽有若干商法開之恰盡此法併諸商爲一商故無翻積益積不特生面獨開且較舊法簡易什倍

余又告以倒開法蓋順開法以商數乘隅自下而上逐層加減而乘之必至減實不能恰盡始知商數非元數倒開法以商數除實自上而下逐層加減而除之不必至隅但除之不盡卽知商數非元數則簡易之中又簡易焉華君卽取而用之可謂從善如流矣

余所譯所著各種算書自謂俱遠勝古人當今之世能讀而盡解之者惟吳太史子登及華君耳太史著九章翼力求簡易而華君所著獨務精深此卷爲行素軒算稿第一種已自空前絕後他日盡出其蘊以問世余又烏能量其所至耶余近著攷數根四法華君倘能一一詳解之亦可與此卷相輔而行也

同治十一年龍在壬申二月旣望海甯李善蘭序

華氏中西算學全書總目

四集

金匱華蘅芳學

數根開方術

數根之術所以能通於開方者因諸數相乘之數一如其諸根連乘之數

如六與七相乘得四十二試以六之根二與三及七之根七連乘之亦得四十二

如四與九相乘得三十六試以四之根二與二及九之根三與三連乘之亦得三十六

兩數根相乘之數卽以相乘之兩數爲根多數根連乘之數卽以連乘之多數根爲根

如三與七相乘得二十一則二十一卽以三與七兩數爲根

如三與五與七連乘得一百〇五則一百〇五卽以三與五與七之三數根爲根

兩數相乘之數卽以兩數之根爲根多數連乘之數卽以多數之根爲根

如六之根爲二與三而七之根爲七則六與七相乘得四十二其根卽爲二與三與七

如二十一之根爲三與七而二之根爲二則二與二十一相乘所得四十二其根亦爲二與三與七

故其數爲兩數相乘所生必兼有兩數之根其數爲三數相乘所生必兼有三數之根其數爲若干數相乘所生必兼有若干數之根

如六之根爲二·三而四之根爲二·二則四與六相乘之數其根必爲二·二·二·三也　又如九之根爲三·三六之根爲二·三十之根爲二·五則九與六與十連乘之數其根必爲二·二·三·三·三·五也

凡兩不相等之數相乘則所生之數其根非兩兩相等

如六之根爲二·三四之根爲二·二惟六與四不等故其相乘所得之數二十四其根爲二·二·二·三其二·二與二·三不能兩兩相等

若相等之兩數相乘則所生之數其根必兩兩相等

如六之根爲二·三則六自乘之數三十六其根爲二·二·三·三其二·三之根各有兩箇是也

又如九之根爲三·三四之根爲二·二其九與四雖不等而相乘得三十六其根爲二·二·三·三仍兩兩相等此因三十六可作六與六相

乘所生故也

所以凡自乘之數其根必倶兩倍再乘之數其根必倶三倍其數爲若干乘方之數其根必有若干倍

如六之根爲二·三 則三十六之根爲二·二·三·三 而二百十六之根爲二·二·二·三·三·三 一千二百九十六之根爲二·二·二·二·三·三·三·三 之類是也

凡諸正乘方之數若求得其根即可知其爲某乘方及方邊之根若何

如九之根爲三·三 則見三·三 即知九爲平方數且知其方邊之根爲三

如十六之根爲二·二·二·二 則見之即知其數爲二之三乘方又知其平方邊之根爲二·二

如見二百十六之根爲二·二·二·三·三·三 則知其數爲立方數且知其方邊之根爲二·三

如見一千二百九十六之根二·二·二·二·三·三·三·三 則知其數爲三乘方且知其方邊之根亦爲二·三

凡數之諸根相同或諸根中各自相同而相同之倍數有等則可開正乘方

如四之根爲二·二 八之根爲二·二·二 二十七之根爲三·三·三 三十六之根爲二·二·三·三 之類是也

諸正乘方之積爲方邊累乘所得則方邊必可約其積故積之根恒爲幾倍其方邊之根所以凡見其數之諸根有幾倍者即知可開得幾乘方邊盤數

如十六之根爲二·二·二·二 則十六等於二×二×二×二 即$二^{四}$ 亦即$四^{二}$ 所以可開三乘方其方邊爲二亦可開平方其方邊爲四此因二·二·二·二 有四箇二根亦爲二箇二·二根故也

今有數二千四百〇一問可開幾乘方其方邊之數幾何

數平方其根爲七·七·七·七知其數等於七×七×七×七亦等於四九×四九所以知此數可開平方邊爲四十九亦可開三乘方其方邊爲七

一千七百二十八欲開立方問方邊幾何

求得其根爲二·二·二·二·二·二·三·三·三即(二·二·三)(二·二·三)(二·二·三)故其立方邊之根爲二·二·三即二×二×三故知其立方之邊爲十二

數之是數根者其數恆不能開正乘方

蓋數之可開正乘方者必爲幾箇相等之數連乘所得故其根必不止一數今數根之數只有一根故不能開得整數及分數之方邊蓋其方邊之數必奇零不盡以至無窮故也

數之諸根不相同或有相同之根而根之倍數無等則不能開正乘方整數

如一百〇五之根三·五·七諸根皆不相同　又如二百之根二·二·二·五·五其兩箇五與三箇二倍數無等則不能得其方邊之根故不能開得

整數

今有數十二問此爲正乘方數否　答曰不能因其根爲二·二·三倍數不同故知其方邊必非整數

今有數二百十問此爲正乘方數否　答曰不能因其根爲二·三·五·七諸根之數不同故也

今有數三百二十四問此爲立方數否　答曰不能祇能開平方因其根爲二·二·三·三·三·三故祇能作(二·三·三)(二·三·三)

今有數四百〇五問此爲平方及三乘方數否　答曰不能祇能開五箇相等之平方或五箇相等之三乘方因其根爲三·三·三·三·五即五(三·三·三·三)即五箇三×三之平方亦即五箇三之三乘方也此式若已知五之平方邊及三乘方邊之密率即可得其平方邊三乘方邊之密率

數之不能開正乘方整數者必可開帶縱乘方其帶縱乘方之形或只有一形或有兩形及多形

如三十五之根爲五·七則爲闊五長七之帶縱平方

如一百〇五之根爲三·五·七則爲廣三長五高七之帶縱立方亦可爲闊三長三十五或闊五長二十一或闊七長十五之帶縱平方

如四百〇五之根爲三·三·三·三·五則可作五×八一 三×一三五 一五×二七 九×四五亦可作五×九×九 五×三×二七 三×九×一五 三×三×四五亦可作三×三×三×一五 三×三×九×五亦可作三×三×三×三×五凡可作四箇平方四箇立方兩箇三乘方一箇四乘方皆帶縱不同式

凡開帶縱方求得其實之諸根數必兼紀一根

如實之根爲三·三·三·三·五則必紀一·三·三·三·三·五是也

凡正負諸乘方式無論如何雜糅其實之諸根中必包有元之諸根

如平方式㫪卄丨其元之同數二十八則實㫪之根一·二·二·二·三·七其中必包有元之根二·七也

如立方式㫪-∞〢卜其元之同數爲十與二則其實㫪之根一·二·二·二·五·五其中必包有元之根二·五與二也

實之諸根既包有元之諸根而恒多於元之諸根其故由於諸方數之和較

諸方之數有大小及正負則另生他根或與元之根同或與元之根異故有元只一兩根而實有多根者夫實之根既恒多於元之根則不知何者是元之根何者非元之根亦不知幾根相乘而可等於元設實之根有十餘數則兩根相乘已有數十數若欲盡窮諸根相乘之變不且有數百數乎於此數百數中而欲擇其一二仍茫然也今立法以通之

凡以元之諸乘方乘式之從廉隅諸數并之必與實之數正負相當則以元之諸乘方之單位數乘從廉隅之單位數并之亦必與實之單位數正負相當

法用自一至九之九個單位數各取其諸乘方之單位數與從廉隅之單位數並列而對乘之取其單位之數并之仍取其單位數與實之單位數相課則必有一數或幾數正負適相當者則記其所用之單位數爲元之尾數

自一至九之九數其諸乘方之單位數皆爲循環數故每數只

須記其四數如
一爲　一一一一
二爲　二四八六
三爲　三九七一
四爲　四六四六
五爲　五五五五
六爲　六六六六
七爲　七九三一
八爲　八四二六
九爲　九一九丁

如有九乘方式 [illegible]

以自一至九之諸乘方單位數各列爲行

第一行　𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠
第二行　𝍡𝍣𝍧𝍥𝍡𝍣𝍧𝍥𝍡
第三行　𝍢𝍨𝍦𝍠𝍢𝍨𝍦𝍠𝍢
第四行　𝍣𝍥𝍣𝍥𝍣𝍥𝍣𝍥𝍣
第五行　𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤
第六行　𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥
第七行　𝍦𝍨𝍢𝍠𝍦𝍨𝍢𝍠𝍦
第八行　𝍧𝍣𝍡𝍥𝍧𝍣𝍡𝍥𝍧
第九行　𝍨𝍠𝍨𝍠𝍨𝍠𝍨𝍠𝍨

以從廉隅單位數𝍣𝍢𝍥𝍣𝍣𝍡𝍣〇𝍣𝍥各齊其等而乘之

仍取其單位數得

第一行　𝍣𝍢𝍥𝍤𝍣𝍡𝍣〇𝍣𝍥
第二行　𝍢𝍡𝍦〇𝍢𝍧𝍡〇𝍢𝍣
第三行　𝍡𝍦𝍡𝍣𝍡𝍦𝍢〇𝍡𝍣
第四行　𝍥𝍦𝍣〇𝍥𝍡𝍥〇𝍥𝍥
第五行　〇𝍤〇𝍤〇〇〇〇〇〇
第六行　𝍣𝍦𝍥〇𝍣𝍡𝍣〇𝍣𝍥
第七行　𝍢𝍦𝍦𝍣𝍢𝍦𝍡〇𝍢𝍣
第八行　𝍡𝍡𝍡〇𝍡𝍦𝍢〇𝍡𝍣
第九行　𝍥𝍢𝍣𝍣𝍥𝍡𝍥〇𝍥𝍥

并每行正負之數仍取其單位數與實之單位數相課惟第三與第八兩行皆并得𝍡與實之單位𝍡正負之數適相當故記三與八兩數爲尾數言元之單位數非三即八也

如欲求負尾數者則以自一至九之九數爲負故其諸乘方之單位數每層正負相間

第一行　𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠
第二行　𝍡𝍣𝍢𝍥𝍡𝍣𝍢𝍥𝍡𝍣
第三行　𝍣𝍣𝍢𝍠𝍣𝍣𝍢𝍠𝍣𝍣
第四行　𝍣𝍥𝍣𝍥𝍣𝍥𝍣𝍥𝍣𝍥
第五行　𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤
第六行　𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥
第七行　𝍢𝍣𝍣𝍠𝍢𝍢𝍣𝍠𝍢𝍣

第八行 [illegible]

第九行 [illegible]

以從廉隅單位數各齊其等而乘之仍取其單位數則得

第一行 [illegible]

第二行 [illegible]

第三行 [illegible]

第四行 [illegible]

第五行 [illegible]

第六行 [illegible]

第七行 [illegible]

第八行 [illegible]

第九行 [illegible]

并每行正負之數仍取其單位數則第一第四第六第九四行皆得[illegible]第三第八兩行皆得[illegible]第二第七兩行皆得[illegible]第五行得〇　皆與實之單位[illegible]不相當所以知負元之尾數非整數

又如立方式[illegible]則求得其正尾數二・八　負尾數二・二元之尾數既有法求之奕然實之根數中及根與根相乘連乘之數其單位數與尾數合者猶廉其多欲删繁就簡非求得元之位數不可

如平方式[illegible]　其實之根爲二・二・三・五・七・七・七　尾數爲四・五・九

則一乂五爲五　二乂二爲四　二乂七爲一四　三乂五爲一五　七乂七爲四九　五乂七爲三五

二乂二乂三乂七爲八四　三乂五乂七爲一〇五　五乂七乂七爲二四五　五乂七乂七乂七爲一七一五　三乂五乂七乂七乂七爲五一四五　以上十一數其單位數皆與尾數合若必以此十一數一一試之無乃太繁乎所以若能先知元數有幾位則位數之不合者可棄之不用而其商數可稍簡

求元之位數仍用舊術廉隅超步之法異名相步得正商之位同名相步得負商之位

如平方式[illegible]　則以廉步實其廉隅各可進一位故知元之位數爲二又以正隅步正廉可進二位故知負元爲三位數

旣知實之根數元之尾數位數則可於實之根數中求商數

如前式[illegible]　其實根爲一・二・二・三・五・七・七・七　元之正尾數四・五・九　負尾數一・五・六

位數二・三　則視其根數中有乘得兩位三位之數而單位與尾數合者則記之爲商數故得正商之數爲八四・四九・三五・一五　負商之數爲

凡正負諸乘方式若以元之同數乘隅以加減上一層又以元之同數乘之以加減上一層如是遞求而上必減實適盡

如立方式[illegible] [illegible] [illegible] 1　以元數三乘隅數1得3以減上一層[illegible]得[illegible]又以三乘之得[illegible]以減上一層[illegible]得[illegible]又以三乘之得[illegible]以減上層[illegible]適盡

如平方式[illegible] [illegible] 1　以元數四十九乘隅得[illegible]以加上層[illegible]得[illegible]又以四十九乘之得[illegible]以減實[illegible]適盡

凡正負諸乘方式若以元之同數除實以加減下一層又以元之同數除之以加減下一層如是遞求而下亦必減隅適盡

如平方式[illegible] [illegible] 1　以元數四十九除實[illegible]得[illegible]與下一層[illegible]相減得[illegible]又以四十九除之得[illegible]以減下層隅1適盡

如立方式[illegible] [illegible] [illegible] 1　以元數三除實[illegible]得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以三除之得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以三除之得[illegible]以減下一層隅1適盡

所以既有商數欲求元之同數有二法　一法以商數乘隅以加減上一層又以商數乘之加減上一層如是遞求而上若減實適盡者其商數即元之同數若減實不能適盡則更置原式用他商數如法求之　一法以商數除實以加減下一層又以商數除之加減下一層如是遞求而下至減隅適盡者其商數即元之同數若不能適盡亦更置原式用他商數如法求之

如平方式[illegible] [illegible] 1　以商數十五乘隅1得[illegible]以加上層[illegible]得[illegible]又以十五乘之得[illegible]以減上層[illegible]得[illegible]不能適盡故知元之同數非十五

如立方式[illegible] [illegible] [illegible] 1　以商數九乘隅1得[illegible]以減上層[illegible]得[illegible]又以九乘之得[illegible]以減上層[illegible]得[illegible]又以九乘之得[illegible]以減上層實[illegible]適盡故知其商數九即元之同數

如前式[illegible] [illegible] [illegible] 1　以商數七除實[illegible]得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以七除之得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以七除之得[illegible]以減下層隅1適盡故知其商數七亦元之同數

此二術余初以爲用乘法遞求而上者較便李氏秋紉言用商數乘隅遞求而上必求至最上一層方能知之若用除法遞求而下則不必求至最下一層已可知之蓋商數之不合於元數者求至數層其除得之數必不能俱爲整數故易識別若上下二層正負異名而除減之後除之仍得整數則其商數即爲元之同數此理非李君揭出之余不知也

如立方式[illegible] [illegible] [illegible] 1　試以商數三除實[illegible]得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以三除之得[illegible]仍爲整數即知商數三爲元之同數

如前式試以商數七除實[illegible]得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以七

除之得[illegible]仍爲整數卽知商數七亦爲元之同數

如前式試以商數九除實[illegible]得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以九除之得[illegible]仍爲整數卽知商數九亦爲元之同數

如立方式[illegible]　試以商數五除實[illegible]得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以商數五除之得[illegible]仍爲整數故知五爲元之同數

如前式試以商數七除實[illegible]得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以七除之得[illegible]仍爲整數故知元之同數又爲七

如前式試以商數三十三除實得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以三十三除之得[illegible]亦爲整數故知元之同數又爲三十三

如平方式[illegible]　試以商數二十四除實[illegible]得[illegible]以加下一層[illegible]得[illegible]又以二十四除之不能適得整數卽知二十四非元之同數

如立方式[illegible]　試以商數十二除實[illegible]得[illegible]以加下一層[illegible]得[illegible]又以十二除之不能適得整數卽知元之同數非十二

如前式試以商數十八除實得[illegible]以加下一層[illegible]得[illegible]又以十八除之得[illegible]以加下一層[illegible]得[illegible]又以十八除之不能盡故知元之同數非十八

如六乘方式[illegible]　試以商數四除實[illegible]得[illegible]以減下一層〇得[illegible]又以四除之得[illegible]以減下一層〇得[illegible]又以四除之得[illegible]以加下一層[illegible]得[illegible]又以四除之不能適盡故知元之同數非四

如前式試以商數九除實[illegible]得[illegible]以減下一層〇得[illegible]又以九除之不能適得整數所以知元之同數非九

用此法以闕正負諸乘方無論式有若干層亦無論其正負如何雜糅均以一法通之

今有平方式[illegible]　求得實根二·三　尾數二·三

位數一　商數二·三　元數二·三

今有平方式[illegible]　求得實根一·二·二·二·三·七　尾數四·八

位數二　商數二八 二四　元數二十八

今有平方式[illegible]　求得實根一·二·二·三·三·一一　尾數二·八

位數二　商數二三 一八　元數二十二 十八

今有平方式[illegible] 求得實根 一·二·二·三·三·一三 尾數六·八

位數二 商數 一八·二六·三六·七八 元數二十六十八

今有立方式[illegible] 求得實根 一·二·二·二·二·三·三·五·七 尾數二·八

位數二 商數 二三·一八·二八·四八 元數二十八

今有立方式[illegible] 求得實根 一一·二·二·二·二·二·二·二·三·七 尾數二

位數二 商數二三·四二 元數十二

今有立方式[illegible] 求得實根 一·二·五·五·七·三一

尾數三·四·五·八·九 位數二·三 商數二·五 元數二十五

今有三乘方式[illegible] 求得實根 一·三·三·五·五·一三

尾數三·五·七 位數一·二 商數 一一二四六 / 三·五·三·五·五·五·五 元數十五

今有四乘方式[illegible] 求得實根 一·三·三·三·三·六五三

尾數九 位數一·二 商數九 元數九

今有五乘方式[illegible]求得實根
二·三·七·一八六七

尾數七　位數一·二　商數七　元數七

今有六乘方式[illegible]求得

實根
一·二·二·二·三·一九·二三·五七七

尾數六　位數一　商數六　元數六

今有六乘方式[illegible]求得

實根
一·二·二·二·二·二·二·二·三·三

尾數
二·四·七·九

位數一　商數
二·四·九

元數二

今有七乘方式[illegible]求得

實根
一·二·二·二·三·三·七·一三

尾數二　位數一　商數二　元數二

今有八乘方式[illegible]求得

實根
一·二·二·三○六七

尾數二　位數一　商數二　元數二

今有九乘方式[illegible]求得

實根
一·二·三·二九五二七

尾數
三·八

位數一　商數三　元數三

今有十三乘方式
[illegible]求得

實根 一·二·二·二·二·二·二·二·二　尾數二　位數一二　商數二二·二七二　元數二

凡諸乘方式任以一數徧乘之其元數不變任以一數徧除之其元數亦不變故遇諸層有公等者可以公等之數徧約之

如原式　求得

實根 一·三·三三·三·六五三　尾數九　位數一二　商數九　元數九

設以五徧乘原式爲　則其

實根變爲 一·三·三·三三·五·六五三　尾數仍爲九　位數仍爲一二

商數仍爲九　元數仍爲九

所以遇式如　可求得其公等五約之爲

凡正負諸乘方式任取一數爲法乘其某層之上除其某層之下每上一層多乘一次每下一層多除一次則其變式之元恒等於法乘原式之元

如原式爲　甲乙丙丁戊己　其元數爲一

設以五一次除乙二次除丙三次除丁四次除戊五次除己則

變爲　爲子式

設以五一次乘甲一次除丙二次除丁三次除戊四次除己則

變爲　爲丑式

設以五一次乘乙二次乘甲一次除丁二次除戊三次除己則

變爲　爲寅式