固体力学中的中值定理

郑建军　樊承谋　著

吉林大学出版社

固体力学中的中值定理

郑建军　樊承谋　著

吉林大学出版社

内 容 简 介

本书共有八章，内容包括：基本数学理论和力学方程、一维问题的中值定理、二阶椭圆型方程的中值定理、弹性静力学的中值定理、弹性动力学的中值定理、板静力分析的中值定理、板动力分析的中值定理及中值定理的应用，同时还涉及到线性固体力学的诸多分支。可供高等院校从事固体力学教育和研究的师生，以及从事这方面工作研究的人员和工程技术人员阅读参考。

固体力学中的中值定理

郑建军　樊承谋　著

责任编辑：赵洪波　　封面设计：张沭沉

吉林大学出版社出版　　吉林大学出版社发行

（长春市东中华路 29 号）　　吉林农业大学印刷厂印刷

开本：787×1092 毫米　1/32　　1994 年 9 月第 1 版

印张：4.5　　1994 年 9 月第 1 次印刷

字数：104 千字　　印数：1—260 册

ISBN 7－5601－0353－7/O・49　　定价：3.50 元

前　言

固体力学中的微分方程大多属于椭圆型方程，椭圆型方程的中值定理表达了圆心或球心的物理量是圆周或球面上物理量的某种加权平均值，在力学上揭示了圆心或球心的位移与圆周或球面上位移之间的关系，进一步阐明了力学问题的本质和共性。

从50年代起，国内外学者就开始研究各类力学问题的中值定理，在中值定理的理论研究方面作了大量的工作，研究内容涉及到材料力学、波动方程、弹性力学、板理论、弹性动力学及中值定理应用等诸多方面。本书是在综合并总结国内外有关中值定理文献的基础上，结合作者近年来从事这一领域的研究成果而写成的。本书力求阐述明确，证明简洁、严密，并将它作为引玉之砖，望能有助于力学中中值定理的理论和应用的进一步研究。

本书第一章介绍有关 δ 函数、Bessel 函数、地基模型理论、弹性力学方程、薄板弯曲理论和 Reissner 板理论，为后继章节论述和证明固体力学的中值定理作理论上的准备。第二章介绍杆件拉伸和振动、梁弯曲和振动、Winkler 地基梁弯曲和振动及双参数地基梁弯曲和振动的中值定理。第三章介绍 Laplace 方程、Helmholtz 方程、D′ Arcy 方程和正交各向异性弹性体波动方程的中值定理。第四章介绍二维弹性静力学和三维弹性静力学的中值定理。第五章介绍二维弹性动力学和三维弹性动力学的中值定理。第六章介绍弹性薄板弯曲、

Reissner 板弯曲、Winkler 地基板弯曲和双参数地基板弯曲的中值定理。第七章介绍弹性薄板振动、Winkler 地基板振动和双参数地基板振动的中值定理。第八章介绍利用二维 Laplace 方程的中值定理构造出一种新的有限元迭代格式。

目前,关于力学中中值定理的研究主要集中在从力学问题的常微分或偏微分方程推导出相应的中值定理,而对中值定理的应用研究还不多见。众所周知,在数学物理方程中,我们可以利用 Laplace 方程的中值定理,推出 Laplace 方程解的最大值、最小值原理,从而证明 Laplace 方程某些解的唯一性。另外,本书的第八章也介绍了如何应用中值定理构造一种新的有限元迭代格式,并应用这种方法对二维 Laplace 方程进行数值求解。因而,中值定理不仅揭示了力学问题的一些特征和本质,具有重要的理论价值,而且还可利用中值定理推出力学问题的其它结果并构造出一种新的有限元迭代格式,具有广阔的应用前景。

本书虽数易其稿,多次修改补充,由于水平有限,经验不足,书中难免有疏漏和失误之处,望给予批评指正。

作　者

1994.6

目　录

第一章　基本数学理论和力学方程

为方便读者，本章扼要地介绍本书所用到的一些数学理论和力学方程. 数学理论包括 δ 函数理论和 Bessel 函数理论；力学方程包括弹性力学方程、板弯曲方程和地基模型理论.

§1.1　δ 函数

§1.1.1　δ 函数的定义

设有函数[1]

$$\delta_h(x - x_i) = \begin{cases} 0, & x < x_i \\ \dfrac{1}{h}, & x_i < x < x_i + h \\ 0, & x > x_i + h \end{cases} \tag{1.1}$$

若令 $h = x - x_i$，则当 $h \to 0$ 时，上述函数的极限为

$$\lim_{h \to 0} \delta_h(x - x_i) = \begin{cases} 0, & x < x_i \\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{x - x_i} = \infty, & x = x_i \\ 0, & x > x_i \end{cases} \tag{1.2}$$

现引入算符 $\delta(x - x_i)$ 来表示它，称之为 δ 函数. 即

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} 0, & x \neq x_i \\ \infty, & x = x_i \end{cases} \tag{1.3}$$

§1.1.2 δ函数的性质

积分性质 设函数 $f(x)$ 在 x_i 处连续，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_i)\mathrm{d}x = f(x_i) \tag{1.4}$$

证明 因为

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_i)\mathrm{d}x \\
&=\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_h(x-x_i)\mathrm{d}x \\
&=\lim_{h\to 0}\int_{x_i}^{x_i+h} \frac{1}{h} f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{1.5}$$

由积分中值定理可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\int_{x_i}^{x_i+h} \frac{1}{h} f(x)\mathrm{d}x \\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\mathrm{d}x \\
&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h} f(x_i+\theta h)\cdot h\right] \\
&=f(x_i)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

式中 $|\theta|<1$. 于是式(1.4)得到了证明.

在式(1.4)中，若令 $x_i=0$, $f(x)=1$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{1.7}$$

乘法性质 设函数 $f(x)$ 在 x_i 处连续，则有

$$f(x)\delta(x-x_i) = f(x_i)\delta(x-x_i) \tag{1.8}$$

证明 设 $\varphi(x)$ 为检验函数，则由式(1.4)得

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)\varphi(x)]\delta(x-x_i)\mathrm{d}x = f(x_i)\varphi(x_i) \tag{1.9}$$

同理

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_i)\varphi(x)\delta(x-x_i)\mathrm{d}x = f(x_i)\varphi(x_i) \tag{1.10}$$

由于式(1.9),(1.10)两式右端相等,说明 $f(x)\delta(x-x_i)$ 和 $f(x_i)\delta(x-x_i)$ 分别对检验函数 $\varphi(x)$ 的作用相同,于是证明了式(1.8)成立.

推论

(1) $f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x)$ (1.11)

(2) $x\delta(x)=0$ (1.12)

(3) $\delta(x)\delta(x-x_i)=0, x_i\neq 0$ (1.13)

坐标缩放性质 设 a 为实常数,则有

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{1.14}$$

证明 设 $\varphi(x)$ 为检验函数,则

(1) 若 $a>0, |a|=a$,令 $ax=u$,于是有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(ax)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{u}{a}\right)\frac{\delta(u)}{a}\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\varphi(0) \tag{1.15}$$

另一方面,有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\frac{\delta(x)}{|a|}\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}\varphi(0) \tag{1.16}$$

故得

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{1.17}$$

(2) 若 $a<0, |a|=-a$,令 $ax=u$,于是有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(ax)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{u}{a}\right)\frac{\delta(u)}{|a|}\mathrm{d}u = \frac{1}{|a|}\varphi(0) \tag{1.18}$$

另一方面,有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\frac{\delta(x)}{|a|}\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}\varphi(0) \tag{1.19}$$

故得

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|\delta(x)} \tag{1.20}$$

对称性

$$\delta(x_i-x)=\delta(x-x_i) \tag{1.21}$$

证明 设 $\varphi(x)$ 为检验函数. 现作变量代换,令 $-t=x_i-x$,则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x_i-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_i+t)\delta(-t)\mathrm{d}t \tag{1.22}$$

由式(1.14)可知

$$\delta(-t)=\frac{1}{|-1|}\delta(t)=\delta(t) \tag{1.23}$$

于是有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x_i-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_i+t)\delta(t)\mathrm{d}t=\varphi(x_i) \tag{1.24}$$

比较

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x-x_i)\mathrm{d}x=\varphi(x_i) \tag{1.25}$$

由此可得

$$\delta(x_i-x)=\delta(x-x_i) \tag{1.26}$$

在特殊情况下,若 $x_i=0$ 得

$$\delta(-x)=\delta(x) \tag{1.27}$$

因此,根据这一性质可将 δ 函数作为偶函数来处理.

复合函数形式的 δ 函数 若 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 均为连续函数,且方程 $f(x)=0$ 有 n 个单实根:$x_1,x_2,\cdots,x_n$,则有

$$\delta[f(x)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad f'(x_i) \neq 0 \tag{1.28}$$

证明 因 $f(x)=0$ 有 n 个单实根，则在任一单实根 x_i 附近的足够小的邻域内，有

$$f(x) = f'(x_i)(x - x_i) \tag{1.29}$$

式中 $f'(x_i)$ 表示 $f(x)$ 在 $x=x_i$ 处导数，若 $f'(x_i)\neq 0$，则在 $x=x_i$ 附近可写出

$$\delta[f(x)] = \delta[f'(x_i)(x - x_i)] \tag{1.30}$$

利用式(1.14)，上式可得

$$\delta[f(x)] = \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \tag{1.31}$$

依次类推，若 $f'(x)$ 在 n 个根处均不等于零，则应有

$$\delta[f(x)] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \tag{1.32}$$

这个性质表明，函数 $\delta[f(x)]$ 相当于由分别位于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 处的强度为 $\frac{1}{|f'(x_i)|}$ 的 n 个“脉冲”所构成的 δ 函数列.

§1.1.3 δ 函数的导数

δ 函数的一阶导数定义为

$$\delta'(x - x_i) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x - x_i}}{x - x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x - x_i)^2} \tag{1.33}$$

上式中，$h=x-x_i$.

$\delta'(x-x_i)$ 主要性质如下：

积分性质 对于有界且在 $x=x_i$ 处可导的函数 $f(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x - x_i)\mathrm{d}x = -f'(x_i) \tag{1.34}$$

证明 采用分部积分法

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-x_i)\mathrm{d}x = [f(x)\delta(x-x_i)]|_{-\infty}^{\infty}$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x-x_i)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x-x_i)\mathrm{d}x$$

$$= f'(x_i) \tag{1.35}$$

故式(1.34)证毕.

奇函数性质

$$\delta'(x_i - x) = -\delta'(x - x_i) \tag{1.36}$$

证明 设 $\varphi(x)$ 为检验函数,并作变量交换,令 $x_i - x = t$,则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta'(x_i - x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_i - t)\delta'(t)\mathrm{d}t$$

$$= [\varphi(x_i - t)\delta(t)]|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x_i - t)\delta(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x_i - t)\delta(t)\mathrm{d}t = \varphi'(x_i) \tag{1.37}$$

而

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta'(x - x_i)\mathrm{d}x = -\varphi'(x_i) \tag{1.38}$$

比较式(1.37)、(1.38)得

$$\delta'(x_i - x) = -\delta'(x - x_i) \tag{1.39}$$

在 $x_i = 0$ 的特殊情况下有

$$\delta'(-x) = -\delta'(x) \tag{1.40}$$

§1.1.4 δ 函数的傅里叶展开式

1. $\delta(x - x_i)$ 的偶延拓($0 \leqslant x_i \leqslant L$)

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L \delta(x - x_i)\mathrm{d}x = \frac{2}{L}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \delta(x - x_i)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\cos\frac{n\pi x_i}{L} \tag{1.41}$$

将上式代入公式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \tag{1.42}$$

可得

$$\delta(x - x_i) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x_i}{L}\cos\frac{n\pi x}{L} \tag{1.43}$$

2. $\delta(x-x_i)$的奇延拓($0 < x_i \leqslant L$)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \delta(x - x_i)\sin\frac{n\pi x}{L} \\ &= \frac{2}{L}\sin\frac{n\pi x_i}{L} \end{aligned} \tag{1.44}$$

将上式代入式

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{1.45}$$

得

$$\delta(x - x_i) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x_i}{L}\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{1.46}$$

§1.1.5 高维 δ 函数

对于 n 维空间区域 Ω,若点 $M(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega$,则 n 维 δ 函数的定义为

$$\delta(M - M_0) = \begin{cases} \infty, & M = M_0 \\ 0 & M \neq M_0 \end{cases} \tag{1.47}$$

及

$$\int_\Omega \delta(M - M_0)\mathrm{d}\Omega = \begin{cases} 1, & M_0 \in \Omega \\ 0, & M_0 \overline{\in} \Omega \end{cases} \tag{1.48}$$

式中，M_0 的坐标为$(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$.

高维 δ 函数的基本性质：

1. 对于函数 $f(M)\in C$（C 为连续函数空间）

$$\int_{\Omega}\delta(M-M_0)f(M)\mathrm{d}\Omega=\begin{cases}f(M_0), & M_0\in\Omega\\ 0 & M_0\overline{\in}\Omega\end{cases}\tag{1.49}$$

2. $\delta(M-M_0)=\delta(M_0-M)$ (1.50)

这个性质称为高维 δ 函数的对称性.

3. 若 $M=M(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$M_0=(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$，则

$$\delta(M-M_0)=\delta(x_1-x_{10})\delta(x_2-x_{20})\cdots\delta(x_n-x_{n0})\tag{1.51}$$

§1.2 Bessel 函数

§1.2.1 Bessel 函数的定义

方程[2-3]

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0\tag{1.52}$$

的解 $J_\nu(x)$ 称为 ν 阶第一类的 Bessel 函数.

$J_\nu(x)$ 的级数表达式为

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}\tag{1.53}$$

若 $\nu=n$（整数），则

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\tag{1.54}$$

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\tag{1.55}$$

显然成立如下关系式

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{1.56}$$

因此，只有当 ν 为非整数时，$J_\nu(x)$、$J_{-\nu}(x)$ 是 Bessel 方程(1.52)线性无关的两个解.

§1.2.2 Bessel 函数之间的关系

由式(1.53)可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\cdot\frac{x^{2k}}{2^{\nu+2k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\cdot\frac{x^{2k-1}}{2^{\nu+2k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2(k+1)}{(k+1)!\Gamma(k+\nu+2)}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2^{\nu+2k+2}}$$

$$= -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu} \tag{1.57}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu} \tag{1.58}$$

将上式展开

$$J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu J_\nu(x)}{x} \tag{1.59}$$

对式(1.58)应用类似求导规则可得

$$\frac{\mathrm{d}^m}{(x\,\mathrm{d}x)^m}\cdot\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = (-1)^m\frac{J_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}} \tag{1.60}$$

再求乘积 $x^\nu J_\nu(x)$ 关于 x 的导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^\nu J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2(\nu+k)x^{2\nu+2k-1}}{k!\Gamma(\nu+k+1)2^{\nu+2k}}$$

$$= x^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu-1+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2k}$$

$$= x^{\nu}J_{\nu-1}(x) \tag{1.61}$$

即

$$\frac{d}{dx}x^{\nu}J_{\nu}(x) = x^{\nu}J_{\nu-1}(x) \tag{1.62}$$

将式(1.62)展开有

$$J'_{\nu}(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu J_{\nu}(x)}{x} \tag{1.63}$$

对式(1.62)取 m 次导数有

$$\frac{d^m}{(x\,dx)^m}x^{\nu}J_{\nu}(x) = x^{\nu-m}J_{\nu-m}(x) \tag{1.64}$$

从式(1.59)、(1.63)中消去 $J'_{\nu}(x)$ 得三个相邻 Bessel 函数之间的关系

$$\frac{2\nu J_{\nu}(x)}{x} = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) \tag{1.65}$$

§1.2.3 Bessel 函数的正交性及零点

讨论下列边界条件下的 Bessel 方程的本征值问题:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{1.66}$$

$$y(x)|_{x=0} \text{ 有界} \tag{1.67}$$

$$[\alpha y'(x) + \beta y(x)]|_{x=l} = 0 \tag{1.68}$$

取两个不同的 k_1、k_2,方程(1.66)写为

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy_1}{dx}\right] + \left(k_1^2x - \frac{\nu^2}{x}\right)y_1 = 0 \\ &\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy_2}{dx}\right] + \left(k_2^2x - \frac{\nu^2}{x}\right)y_2 = 9 \end{aligned}\right. \tag{1.69}$$