HANSHUZHONG RONGYI HUNXIAO DE DIANXING GELI POUXI

函数中容易混淆的典型个例剖析

张方盛 李世杰 等 编著

上海大学出版社

函数中容易混淆的典型个例剖析

张方盛　李世杰等 编著

上海大学出版社

·上 海·

内容提要

本书汇编了作者多年来在教学实践和教育科学研究中提炼出的150多个函数中容易混淆的、似是而非的问题或有缺陷的解答、论述的典型个例，分函数概念、函数图像与性质、函数的奇偶性、函数的周期性、反函数以及数列与极限六个部分进行剖析。书中严谨性与实用性相结合，注重函数基础素质的培养，每章末均作了小结并附有适量的练习题，书末附有相应的参考答案或提示。

本书可供中学、中专数学教师、高等师范院校学生以及中学、中专学生作教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

函数中容易混淆的典型个例剖析/张方盛编著.—上海：上海大学出版社，1999.12

ISBN 7-81058-149-X

Ⅰ.函… Ⅱ.张… Ⅲ.函数-研究 Ⅳ.0174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 57761 号

上海大学出版社出版发行
(上海市延长路 149 号　邮政编码 200072)
上海广服电脑印刷厂印刷　各地新华书店经销
开本 787×1092　1/32　印张 7.25　字数 163 000
1999 年 12 月第 1 版　1999 年 12 月第 1 次印刷
印数：1～7 000
定价：9.50 元

序

张方盛先生和几位数学老师写的《函数中容易混淆的典型个例剖析》一书，内容翔实，有不少独特的见解，许多材料来源于中学数学教学第一线，想来对弄清概念，指导教学，将会有益．

方盛兄与我是同乡、同学，相知将近半个世纪，他待人之热情是出了名的．他当人民代表时，为群众利益多方奔走，不辞辛苦，替朋友办事，无论亲疏，只要合理合法，都是全力以赴．这一点，凡知道他的人，没有不佩服的．至于他的学术研究，也别具一格，主要是用微积分等工具较严密地处理各种有关函数概念的问题，如函数的周期性、奇偶性等．《函数中容易混淆的典型个例剖析》一书是以他为代表的一系列文章的总结和延伸．

中国的数学教育自辛亥革命以后普及西算，先后学日本和欧美，到了解放后又学习苏联．向苏联学习的一个直接后果是中学数学明显地趋向严密性．这当然是一大进步．不过，中小学的数学毕竟不能弄得过分严格，还得有个分寸．青少年既要懂得逻辑演绎，也要掌握数学思想．因此，我觉得数学教育研究似乎有两个方面：一种是从大局着眼，探讨中小学数学内容的整体结构，帮助学生树立正确的数学观念；另一种是从严谨性出发，弄清数学概念的准确含义，精雕细刻地给学生以数学推导训练．用中国画来比喻，可以说前者是泼墨写意，后者是工笔彩绘．方盛先生等的这本书，便是一本“工笔

画”式的数学教育研究作品．他们把概念抠得非常之细，指出许多容易混淆的、似是而非的地方，有助于人们对数学概念的把握；另一方面，我又觉得搞得过细也会流于琐碎，乃至堕入形式演绎的海洋而失去大方向．事实上，数学本来就无法做到绝对严格，在中小学阶段更是如此．在一些无关大局的枝节问题上，允许暂时的不严格，以求粗略地掌握核心的数学思想观念．此时不可责备求全，说人家“犯科学性”错误，因为这时的工作相当于“泼墨写意”的国画，用“工笔画”的标准去要求，显然是不大合适了；至于一些两可之间的剖析，则是“仁者见仁”、“智者见智”，不能强求一律的．

值《函数中容易混淆的典型个例剖析》一书出版之际，应方盛兄之约，欣然为序，时值秋高气爽，心境豁达，所发的一孔之见，但愿不致贻笑大方．

张奠宙

1999年8月

编者的话

本书与大家见面了，是值得高兴的．

我们在长期的数学教学、科研中，深感函数在整个中学、中专数学课程中占有极其重要的地位，而且还在不断地加强．它比起数学课程中其他内容，显得十分丰富、深刻、难度大．特别是函数的周期性，不仅有不少似是而非问题难于判别，而且不少问题是近几十年甚至最近几年才提出来的．尽管它在数学课中所占篇幅不多，但总要弄清楚才好．为此，我们一直想编写一本关于“函数中容易混淆的典型个例剖析”的课外读物．

经过数年努力，边编写边听意见，不断充实、修改，数易其稿，历尽艰难，现在终于完成了．

我们在编写本书时，考虑到主要读者是在职中学、中专数学教师以及全国高等师范院校数学专业学生——未来的数学教师；同时还注意到爱好数学、程度中上的高中、中专学生．为此，我们收集了历年来部分数学竞赛题、高考试题，并对典型的错解进行剖析．

本书格调是每章开头为引言，之后分几个方面问题，逐一提出易混淆的、似是而非的问题或有缺陷的解答、论述的典例（用另一字体——楷体编排），接着进行剖析，必要时紧接“注意”或“引伸”或“深思”或“探索”或“体会”等．读者可按自己的爱好、需要，选择有关内容阅读．

这里要说明一点：本书部分内容，直接对某些课本中非严

谨性问题进行评述，这些看法与意见，仅是我们一家之言，仅供参考．由于考虑问题的出发点、读者对象、要求等不同，出现不同看法是正常的．数学课本面向学生，要更多地考虑学生的知识基础、年龄特征和接受能力，不必处处强调数学的严谨性；而我们编写这本书，力图从科学性、严谨性角度来加以论述．由于不少问题的处理带有探索性，加上水平有限，难免会有不妥之处，欢迎读者批评指正！

参加本书编写工作的有：张方盛（上海师范大学）、李世杰（浙江衢州市教育委员会教研室）、吴卫国（上海市崇明县民本中学）、孙忱（上海市田林三中）、刘敏杰（内蒙古乌兰浩特四中）．

著名的华东师范大学数学教育家张奠宙教授为本书写了序，还乐意在百忙中任本书主审，不仅为本书增添光彩，而且指明了如何开展数学教育研究的方向；上海师范大学数学科学学院刘俊杰副教授、浙江象山县教育科学研究所顾海润老师仔细审阅了初稿，并提出了不少很有价值的修改意见；上海师范大学林炎生副教授、原上海教育学院毛宏德副教授等对初稿提出了中肯意见，这里一并表示衷心感谢．

编　者

1999 年 6 月

目　　录

第一章　函数概念

函数概念是适应17世纪研究物体运动的需要而产生的．在这漫长的300年中，它经历了七次发展[参见“函数概念七次扩展”，《中学数学教学》(上海师范学院)1979年创刊号]，人们对它的认识，也随之逐步深入和提高．

函数概念是现实世界中量与量之间相互联系、相互制约关系在数学中的反映，这对培养学生的辩证唯物主义观点、解决实际问题的能力是一个有力工具；函数概念是近代数学的主要基础，它与集合、对应等现代数学的基本概念紧密联系着，这就有利于数学教育内容的更新，为学生今后学习高等数学打好基础；函数概念与中学数学课程中的数、式、方程(方程组)、数列等都有密切联系．如解方程(方程组)就可看作求函数(函数组)的零点问题；解不等式就可看作求函数 $y=f(x)$ 当 x 取哪些值时 $y\geqslant0$ 或 $y<0$ 等的问题；而数列就是特殊的函数，是定义域为正整数集或其子集的函数．

当前，九年义务教育以及高中、中专的数学课程中，函数概念无疑是最基本、最重要的概念．先在义务教育后阶段的数学课本中，通过几个典型实例，分别用解析式、图像、列表引进了古典函数定义(两个变量之间的依赖关系)；到了高中、中专第一学期，在讲了集合并在复习古典函数定义的基础上，引进了现代函数定义(两个集合的单值对应关系)．后者比前者更为抽象、含义更为深刻．要求学生正确理解，确有一定难度．在以后讲到反函数、函数的单调性、奇偶性、周期性等时，

需反复复习、巩固.

函数内容在当前中等学校数学课程中占有十分重要地位.它的内容相当丰富、广泛,不仅有大量的初等数学问题,如基本初等函数的图像与性质等;还有数列极限、微积分初步等高等数学内容.

本章我们对集合、与函数定义密切相关的以及反函数等内容中的容易混淆的典型个例进行剖析.

一、集　合

1. 很大数的全体是否为集合?为什么?

答　是集合;符合集合定义.

注:这是部分高中生的回答.

上述的结论及其"理由",对吗?

【剖析】　都不对!首先,要搞清楚的是,集合像几何中的"点"、"线"、"面"一样,是数学中不可定义的原始概念,课本从具体事物抽象出集合概念,不是定义,仅仅是描述,或者说是"描述性定义".

其次,"很大数的全体"是否为集合?课本:"对于一个给定的集合,集合中的元素是确定的.这就是说,任何一个对象或者是这个给定集合的元素,或者不是它的元素."这段话十分重要,可看作判定是否集合的依据,需要深刻领会.由于"很大数"是不确定的,譬如,数 10 000 在一般的数字里,会被认为是"很大数",而在天文数字里,却不被认定是"很大数",因而"很大数的全体"不是集合.如改为:"大于 10 000 的数的全体是否为集合?"回答是肯定的,因其元素(对象)是确定的.即对任何小于或等于 10 000 的数都不属于它;而对任何

大于 10 000 的数都属于它．

【注意】 类似问题不少．如“很小数的全体”、“某单位的高(矮)个子全体”都不是集合;而“某单位 1.90 米以上高个子全体”是集合．

2. 参加今年全国高校统一考试者的全体是不是集合？为什么？

答 搞不清楚;好像是集合．

注:编者问过不少高中生,此“答”较为普遍．

到底是不是集合,理由何在?

【剖析】 看来,高中生对“集合”这一近代数学概念了解得十分浅薄,因而遇到这样问题(含义深刻)难以回答清楚,是可以谅解的;不过,这是一个现实问题,且有助于搞清集合概念．

回答此题,要有一个时间界限,即统考课程全部结束之前或之后．

在上述时间界限之前回答上题,不是集合;而在上述时间界限之后回答上题,是集合．因前者的对象不确定;而后者的对象是确定的．

注:只要有一个对象不确定,就说“对象不确定”;而“对象是确定的”是指“任何一个对象都是确定的．”

【注意】 类似问题,如“参加去年全国高校统一考试者的全体是集合”,“参加明年全国高校统一考试者的全体不是集合”,但都比上题简单．

3. 列举法、描述法的作用如何？描述法适用范围是否比列举法要广？描述法可取代列举法吗？

答 表示集合的两种方法;凡是能用列举法来表示的集合都能用描述法来表示;反之,不然. 因而,描述法可取代列举法.

描述法能取代列举法吗?

【剖析】 前半部分答得正确;"凡是……,反之,不然",在理论上是站得住脚的;最后一句:"描述法可取代列举法"讲得太绝对. 世界是复杂的,有时会遇到这样情况:在理论上正确,但在实践上却行不通. 用列举法表示集合有一定局限性,它只能表示有限集,即无法表示无限集. 如无理数集、由所有直角三角形组成的集合等,此时用描述法却能简明地表示出来:{无理数}、{直角三角形}. 又如,小于 100 000 的正整数集,用描述法可简明表示为$\{x|x\in\mathbf{N}^*$且$1\leqslant x\leqslant 100\ 000\}$或{小于 100 000 的正整数},不宜用列举法. 但是,有不少集合用列举法表示比用描述法表示,显得简明. 如表示"1,2,4,5,8,9"的数集及"2"的数集,若用列举法分别表为{1,2,4,5,8,9}及{2},一目了然;而用描述法表示,前者为$\{x|x\in\mathbf{N}^*,1\leqslant x\leqslant 9$但$x\neq 3,6,7\}$,后者为{正整数的第二个数}或{正偶数的第一个数},显得抽象、难懂;而且要表示出来还得动一番脑筋. 又如,要表示"0.1,0,6,1 000"的数集,若用列举法表示:{0.1,0,6,1 000},十分容易且清楚;但对如此简单的数集,却很难用描述法来表示,即使动足脑筋表示出来,必然显得繁琐、难以看懂. 类似例子不胜枚举.

因此,我们认为列举法、描述法这两种方法表示集合各有利弊,相辅相成,无论从教学角度,还是从实际使用方便角度来看,不能偏废其中一个.

【注意】 (1) 像方程之重根等,不能用集合来表示(因表示集合的元素不允许重复).

(2) 这里的符号“$\mathbf{N}^*$”表示正整数集，是指原“自然数集”，现在的自然数集$\mathbf{N}$，包括数零．

4. 设 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，$N=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1\}$，则 M、N 的关系是(   ).

(A) $M\subset N$ (B) $N\subset M$

(C) $M\cap N=\phi$ (D) $M\cup N=\phi$

解 画出 M、N 表示的图形(图 1-1)，由于 M 表示的图形包含于 N 表示的图形内，故选(A).

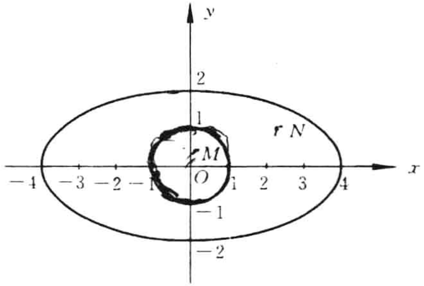

图 1-1

这一解法有问题吗？

【剖析】 上述解法可能受文氏图思维定势的影响，将集 M、N 分别错看为 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$、$N=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\}$，从而误认为圆在椭圆内．事实上，题目要求判断的是两曲线的位置关系，而非曲线内部图形的包含关系．故正确答案应选(C).

另外，对给出的具体集合 M、N，要判断 M、N 的关系，无

需借助文氏图，而直接通过给出集合 M、N 在头脑上反映出分别是单位圆（圆心在坐标原点）、椭圆（焦点在 x 轴上、长轴 $2a=2\times4$、短轴 $2b=2\times2$），从而得出 $M\cap N=\phi$. 这样做法，不仅免受文氏图思维定势的影响，而且节省作图时间，提高解题速度．

5. 若 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，求当 $B\subseteq A$ 时，实数 m 的取值范围．

解　由 $B\subseteq A$，就有

$$\begin{cases} m+1\geqslant -2, \\ 2m-1\leqslant 5. \end{cases}$$

解之得 $-3\leqslant m\leqslant 3$.

这一解法是否有片面性？

【剖析】　此解法确实考虑不全，漏了“$m+1\leqslant 2m-1$”的情况．完整的解法应为

由

$$\begin{cases} m+1\geqslant -2, \\ 2m-1\leqslant 5, \\ m+1\leqslant 2m-1, \end{cases}$$

得 $2\leqslant m\leqslant 3$；

6. 设方程 $f(x)=0$ 的解集为 F，如果 $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$ 且方程 $f_1(x)=0$ 与 $f_2(x)=0$ 的解集分别是 F_1、F_2，那么

$$F=F_1\cup F_2.$$

证明　设 $a\in F$，即 $f(a)=0$，由 $f(a)=f_1(a)f_2(a)$，可知 $f_1(a)=0$，$f_2(a)=0$ 中至少有一式成立．因此，$a\in F_1$ 或 $a\in F_2$，即 $a\in F_1\cup F_2$，从而 $F\subseteq F_1\cup F_2$.

反过来，设 $a\in F_1\cup F_2$，则 $a\in F_1$ 或 $a\in F_2$，即 $f_1(a)=0$，$f_2(a)=0$ 中至少有一式成立．所以 $f(a)=f_1(a)\cdot f_2(a)=0$，即 $a\in F$，从而 $F_1\cup F_2\subseteq F$. 因此，$F=F_1\cup F_2$.

上述结论正确吗？

【剖析】 由于疏忽了函数定义域，结论有误．

如 $f_1(x)=\dfrac{x}{x-1}$，$f_2(x)=\dfrac{x+1}{x}$，则 $F_1=\{0\}$，$F_2=\{-1\}$，$F=F_1\cup F_2=\{0,-1\}$. 但按题设

$$f(x)=f_1(x)f_2(x)=\frac{x+1}{x-1},$$

知 $F=\{-1\}$. 矛盾！

正确结论：设 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的定义域分别为 D_1、D_2，则 $f(x)$ 的定义域为 $D_1\cap D_2$，$F=(F_1\cup F_2)\cap(D_1\cap D_2)$.

类似问题：(1) 若不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $[-1,2]$，而不等式 $g(x)\geqslant 0$ 的解集为 ϕ，则不等式 $f(x)/g(x)>0$ 的解集为________.

(2) 若 $f(x)>0$ 的解集为 $[a,b]$，则 $f(x)<0$ 的解集为________.

7. 某一教室里的人与桌子的全体是不是集合?! 如从集合的描述性定义来看，由于人与桌子不具有共同属性，因而它不是集合；但从两个集合（人集、桌子集）的并集来看，它却是集合．

同一数学问题，怎么会有截然相反的结论?! 到底是不是集合?!

注：上述内容是早在十余年前广东的一位中学数学教师给当时任上海师大《中学数学教学》(1990 年起改《上海中学数学》)常务副主编张方盛一封来信中提出的．下面的“剖析”是当时回复的基本内容．

上述问题如何处理好呢？

【剖析】 首先，对这位老师虚心求教、认真钻研精神表示钦佩！

这一问题令人深思，提出个人的看法，仅供参考．

该问题直接牵涉到对“描述性的集合概念”以及“是否任何两个集合的并集都有意义”的理解．

据了解，各种大专、中学数学课本对集合的描述并不相同，自然会有不同理解．先摘录有代表性的集合描述：“集是一种不可以精确定义的数学基本概念，所以我们只能给予一种描写．凡是具有某种特殊性质的东西的全体即称之集．”（《实变函数论》，那汤松著，徐瑞云译，1950 年版）；“把具有某种属性的一些对象看做一个整体便形成一个集合”（《全日制十年制学校高中课本·数学（第一册）》，人民教育出版社 1979 年第 1 版）；“我们把集合两字了解为由一些不论什么样的一些对象所组成的总体”（《实变函数论》，鲁金著，何旭初等按 1948 年第二版译）；《中学数学实验教材》（北京师范大学出版社出版）对集合描述为“任何事物的全体”．

从文字表述上来看，前两种集合的描述要求“具有某种特性（属性）”；而后两种集合的描述未提出“具有某种特性（属性）”的要求．因而，如按后两种集合描述来判断本题，“某一教室里的人与桌子全体”是集合，而且同一教室里人的全体与桌子全体即这两集合的并集，自然也是集合；如按前两种集合描述来判断上题，会有不同看法．正因为集合不可定义、只能描述，就会带来一定的模糊性．如什么叫“具有共同特性（属性）”？这里的“特性（属性）”是仅指“本质特性（属性）”，还是包括“非本质特性（属性）”？这在集合描述中不可能、也没有必要去作说明．因而，人们自然可作不同理解或解释．那位教师