高考

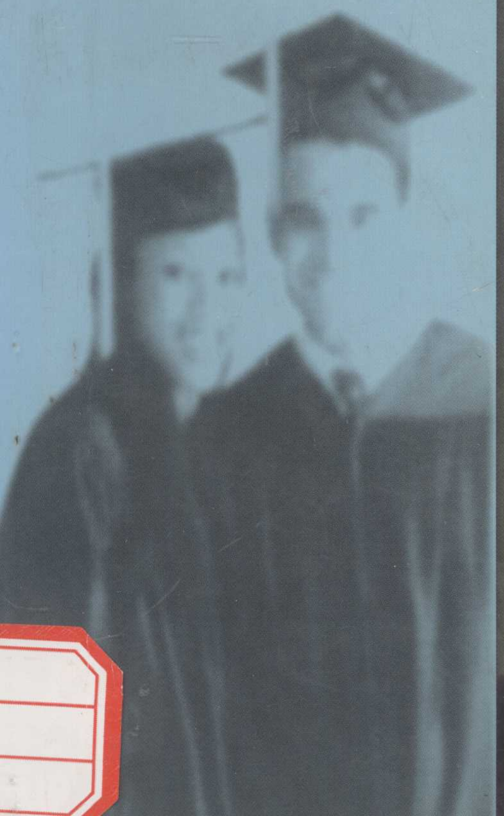
高三备考必会

数学

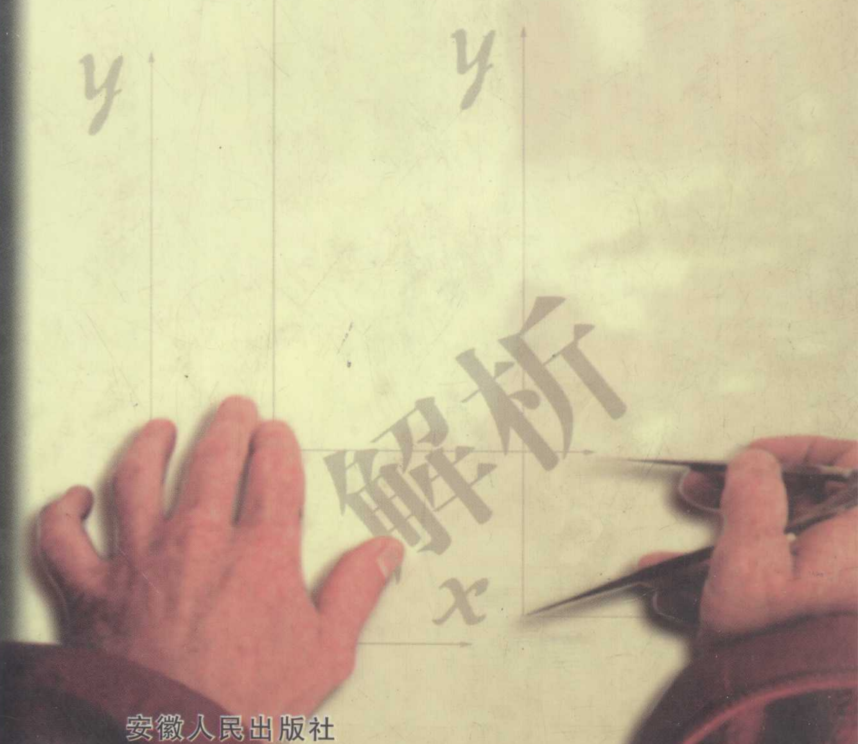
大赢家

丛书主编:宛炳生 张 凯 文 曙
本册主编:陶运湘

试卷模拟:追求高效高分
名师奉献:成就世纪骄子
给你一把成功钥匙
帮你跨入学府殿堂



习题



解析

安徽人民出版社

高考大赢家：高三备考必会

主　　编：

宛炳生　张　凯　文　曙

编委会成员（按姓氏笔画排列）：

文　曙　齐　才　杨永宁　吴树烈　肖家芸

陈良舟　陈晓凤　张　凯　范代宏　周惠强

宛炳生　胡开文　陶运湘　章志学　窦明珍

数学分册主编：

陶运湘

数学分册编委：

陈其农　章志学　徐太春　武　元

陶运湘　陈为毅

安徽人民出版社

责任编辑：张胜莲　王海涛　周子瑞
装帧设计：王国亮

图书在版编目（CIP）数据

高考大赢家：高三备考必会：数学/陶运湘主编．—合肥：安徽人民出版社，1999.11
ISBN 7—212—01728—0

Ⅰ．高…　Ⅱ．陶…　Ⅲ．数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 43804 号

高考大赢家：高三备考必会
（数　学）

陶运湘　主　编

出版发行：安徽人民出版社
地址：合肥市金寨路 381 号九州大厦　邮编 230063
[redacted] 新华书店
[redacted] [redacted]新华印刷厂
[redacted] [redacted]1092　1/16　印张：13.25　字数：320 千
[redacted] 1999 年 11 月第 1 版　1999 年 11 月第 1 次印刷
标准[redacted]号：ISBN 7—212—01728—0/G・247
定价：15.00 元
印数：00001—8000

出　版　前　言

一、本套丛书吸取数年高考之成功经验，并根据2000年高考之最新信息而编写，共包括语文、数学、英语、物理、化学、历史、政治7部分册，计260万字。

二、参与编写本套丛书的作者，均为近十年来在高考教学方面取得最突出成绩的全国特、高级教师。

三、本套丛书，囊括了高三考生参加高考所必须掌握的各门学科的所有范围，并根据2000年高考之需求，突出其重点、难点。

四、每一学科之分册中，均设列了20套模拟试卷，并附有参考答案。

五、本套丛书的主要特点之一，是按倒计时的时间顺序安排复习进度，如从“前60天”开始复习，按60天的时间进度进行系统复习。每10天左右，进行一次强化训练(模拟考试)；最后10天，完成10套模拟试卷。考生可根据自己实际，灵活掌握。

1999年9月

—— 目　　录 ——

前60天：
集合，函数和反函数

一、考点精要

1. 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念．了解空集、全集的意义．掌握属于、包含，相等关系等有关术语和符号，进一步掌握集合语言与集合思想在函数、方程与不等式、解析几何等问题中的应用．

2. 了解映射的概念，在此基础上进而理解函数与反函数的概念，能正确由已知函数式求出反函数式．能掌握互为反函数的图象特征．

3. 由函数所具有的某些性质或满足的某些关系式，求出它的解析式．

二、典型例题辨析

1. 已知$A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，

$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，

$C=\{x|2^{x^2+2x-8}=1\}$，且$A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$同时成立，求实数a和集合A．

解：由已知条件，$\log_2(x^2-5x+8)=1$ 得 $x^2-5x+8=2$ 解得$x_1=2$或$x_2=3$，$\therefore B=\{2，3\}$ 又由已知 $2^{x^2+2x-8}=1$ 得 $x^2+2x-8=0$ 解得$x_1=2$或$x_2=-4$，$\therefore C=\{2，-4\}$．

又$A\cap C=\varnothing$，知$2\notin A$，$-4\notin A$，而$A\cap B\neq\varnothing$，$\therefore 3\in A$，即有$a^2-3a-10=0$，解得$a=5$或$a=-2$．

当$a=5$时，$A=\{2,3\}$与$2\notin A$矛盾，故$a=5$应舍去，当$a=-2$时，$A=\{3，-5\}$满足题设．

故所求实数$a=-2$，集合$A=\{3，-5\}$．

注：(1)集合中元素具有确定性，互异性和无序性，要注意此性质在解题中的应用．

(2)本题若不要求求集合A时，也要检验a的值是否满足题设要求．

2. 求下列函数的反函数

(1) $y=2^{x^2-2x+3}$　　$(x>2)$

(2) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & (0\leqslant x\leqslant1)\\ x^2 & (-1\leqslant x<0)\end{cases}$

解：(1)由$y=2^{x^2-2x+3}$ 得 $x^2-2x+3=\log_2y$ 即$x^2-2x+3-\log_2y=0$ 解这个关于x的二次方程得$x=1\pm\sqrt{\log_2y-2}$由原函数定义域$x>2$可得原函数值域为$y>8$．$\therefore$舍去$x=1-\sqrt{\log_2y-2}$取$x=1+\sqrt{\log_2y-2}$，交换字母，得所求的反函数为$y=1+\sqrt{\log_2x-2}\ (x>8)$

(2)本题给出的原函数是一个分段函数，故其反函数也是一个分段函数．

先由$y=x^2-1$ 解$x=\pm\sqrt{y+1}$，而$0\leqslant x\leqslant1$ $\therefore$舍去$x=-\sqrt{y+1}$，且原函数值域为$-1\leqslant y\leqslant0$，交换字母后得反函数$y=\sqrt{x+1}$ $(-1\leqslant x\leqslant0)$．同理再由$y=x^2$求得反函数为$y=-\sqrt{x}$　$(0<x\leqslant1)$

$\therefore$所求的反函数为

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & (-1\leqslant x\leqslant0)\\ -\sqrt{x} & (0<x\leqslant1)\end{cases}$$

注：对于给定以解析式表示的函数，求其反函数，主要是要做两件事：一是把原函数视作方程解出x，有多解时应根据原函数的定义域舍去不适合的解．二是求反函数的定义域即求原函数的值域．由反函数存在条件可知原函数为单调函数或分段单调函数，因此只要把原函数的定义域的边界值代入原函数可求得原函数的值域．

3. 某工厂今年1月、2月、3月生产某产品分别为1万件、1.2万件、1.3万件，为了估测以后每个月的产量，以这三个月的产品数量为依据，用一个函数模拟该产品的月产量y与月份数x的关系，模拟函数选用二次函数或函数$y=a\cdot b^x+c$（其中a、b、c为常数），已知4月份的产量为1.37万件，问用以上哪个函数作为模拟函数为好？请说明理由．

解：设$f_1(x)=px^2+qx+r\ (p\neq0)$，则$f_1(1)=p+q+r=1$，$f_1(2)=4p+2q+r=1.2$，$f_1(3)=9p+3q+r=1.3$．联立上述三个方程解得$p=-0.5$，$q=0.35$，$r=0.7$

$\therefore f_1(x)=-0.05x^2+0.35x+0.7$．$\therefore$4月份产量为$f_1(4)=-0.05\times4^2+0.35\times4+0.7=1.3$（万件）

又由题设$y=f_2(x)=a\cdot b^x+c$，由$f_2(1)=ab+c=1$，$f_2(2)=ab^2+c=1.2$，$f_2(3)=ab^3+c$，联立三个方程，解得$a=-0.8$，$b=0.5$，$c=1.4$，$\therefore f_2(x)=-0.8\times0.5^x+1.4$，$\therefore$ 4月份产量为$f_2(4)=-0.8\times0.5^4+1.4=1.35$（万件），而题设4

月份的产量为1.37万件，比较 $f_1(4)$ 和 $f_2(4)$，可得用模拟函数 $y=f_2(x)=-0.08\times0.5^x+1.4$ 较好.

三、目标训练

（一）选择题

1. 设集合 $M=\{x\mid x^2-mx+2=0，x\in R，m\in R\}$，则满足 $M\cap\{1.2\}=M$ 的集合的个数是（ B ）

   A. 1　　　B. 2

   C. 3　　　D. 4

2. 已知映射 f：$M\to N$，对任意 $x\in M$，都有 $y=x^2$，$y\in N$. 则集合 M、N 可以是（ A ）

   A. $M=R$，$N=\overline{R^-}$

   B. $M=R$，$N=R^-$

   C. $M=\overline{R^-}$，$N=R^+$

   D. $M=\overline{R^+}$，$N=\overline{R}^+$

3. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(a\cdot b)=f(a)+f(b)$ 且 $f(2)=p$，$f(3)=q$，则 $f(36)$ 的值为（ B ）

   A. $2pq$　　　B. $2(p+q)$

   C. p^2q^2　　　D. p^2+q^2

4. 若函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 的反函数是 $f^{-1}(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$，则实数 a、b、c 的值依次是（ B ）

   A. 2，1，3　　　B. -2，-1，-3

   C. 3，-1，-2　　　D. -1，3，2

（二）填空题

5. 若 $g(x)=1-2x$，$f[g(x)]=\dfrac{1-x^2}{x^2}(x\neq0)$，则 $f(\dfrac{1}{2})$ 的值为 15 .

6. 若 $\{2,a^2\}\cap\{2a-4,1,2,3\}=\{6a-a^2-6\}$，则 a 的值是 2 4

7. 函数 $f(x)$ 满足条件 $\log_a f(x)=x$ $(a>0，a\neq1)$，则 $f(\log_a x)$ 的解析式是 $x=f(\log_a)$.

（三）解答题

8. 已知集合 $A=\{1，2，3，k\}$，$B=\{4，7，a^4，a^2+3a\}$ 且 a，$k\in N$，$x\in A$，$y\in B$. f：$x\to y=3x+1$ 是 A 到 B 上的一个函数，求 a，k 的值.

$a=2$　　$k=5$

9. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+a}$，其中 $a\neq\dfrac{1}{2}$，

（1）求其反函数 $f^{-1}(x)$；

（2）若这个函数图象关于 $y=x$ 对称，求 a 的值.

$y=\dfrac{1-ax}{x-2}$

$a=-2$

10. 设函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的增函数，当 $x>0$ 时，$f(x)>1$，且对任意 a，$b\in R$ 都有 $f(a+b)=f(a)\ f(b)$.

（1）求证 $f(0)=1$；

（2）若 $f(1)=2$，集合 $A=\{(m,n)\mid f(n)\ f(2m-m^2)>\sqrt{2}\}$，集合 $B=\{(m,n)\mid f(m-n)=16\}$，当 m，$n\in Z$ 时，求 $A\cap B$.

$f(1)=f(1+0)=f(0)f(1)$

$f(0)=1$

前59天：函数的定义域、值域

一、考点精要

1. 由函数表达式求定义域，求简单复合函数的定义域，求反函数定义域（即原函数值域）. 已知函数定义域，讨论其中参数的取值范围.

2. 理解函数值域是由函数定义域所确定的，能掌握求函数值域常用的几种方法.

二、典型例题辨析

1.

(1) 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+5}}{\lg(6-x^2)}$ 的定义域，

(2) 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,2)$，求函数 $y=f(\log_2 x)+f(\sqrt{x^2+1})$ 的定义域.

解：(1) 要使函数有意义，必须

$$\begin{cases}x+5\geqslant 0\\ 6-x^2>0\\ 6-x^2\neq 1\end{cases}\quad 解得\begin{cases}x\geqslant -5\\ -\sqrt{6}<x<\sqrt{6}\\ x\neq\pm\sqrt{5}\end{cases}$$

画数轴

∴所求函数定义域为 $(-\sqrt{6},-\sqrt{5})\cup(-\sqrt{5},\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},\sqrt{6})$

(2) 依题设，有

$$\begin{cases}0\leqslant\log_2 x<2\\ 0\leqslant\sqrt{x^2-1}<2\end{cases}\quad 解得\begin{cases}1\leqslant x<4\\ 1\leqslant x<\sqrt{5}\ 或\\ -\sqrt{5}<x\leqslant -1\end{cases}$$

∴ $1\leqslant x<\sqrt{5}$，故所求函数的定义域为 $[1,\sqrt{5})$.

注：(1) 若函数是由一些基本函数通过四则运算结合而成的，那么它的定义域是各基本函数定义域的交集. 求函数定义域时，应遵循下列规则：分式的分母不为零；偶次根式中的被开方数为非负数；对数的真数为正数，底数大于零且不等于1；由实际问题建立的函数，其定义域受实际问题的具体条件制约.

(2) 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，求 $f[g(x)]$ 的定义域是指满足 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 的 x 的取值范围，而已知 $f[g(x)]$ 的定义域是 $[a,b]$，指的是 $x\in[a,b]$.

2. 求下列函数的值域

(1) $y=\dfrac{3}{x^2}\quad(1\leqslant x\leqslant 2)$

(2) $y=-x^4+x^2+\dfrac{1}{4}\quad(x\in R)$

(3) $y=x+\dfrac{1}{x}+1\quad(x\neq 0)$

解：(1) 因为在 $[1,2]$ 上，$y=\dfrac{3}{x^2}$ 是单调减函数，且 $x=1$ 时，$y=3$，$x=2$ 时，$y=\dfrac{3}{4}$，故所求函数的值域为 $\left[\dfrac{3}{4},3\right]$.

(2) 由 $y=-x^4+x^2+\dfrac{1}{4}$ 得 $y=-\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$，因为 $-\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2\leqslant 0$，所以 $y\leqslant\dfrac{1}{2}$，即当 $x^2-\dfrac{1}{2}=0$ 时，即 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，有 y 最大值 $\dfrac{1}{2}$. 故所求函数的值域为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$.

(3) 解法一：用均值不等式

当 $x>0$ 时，$y=x+\dfrac{1}{x}+1\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}+1=3$，在 $x=1$ 时有 $y=3$，当 $x<0$ 时，有 $-y=-x-\dfrac{1}{x}-1\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}-1=1$，∴ $y\leqslant -1$，即在 $x=-1$ 时有 $y=-1$. ∴函数的值域为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

解法二：用判别式法

由 $y=x+\dfrac{1}{x}+1$ 整理得 $x^2+(1-y)x+1=0$，∴ $\triangle=(1-y)^2-4\geqslant 0$ 得 $1-y\geqslant 2$ 或 $1-y\leqslant -2$ 即 $y\leqslant -1$ 或 $y\geqslant 3$，∴函数的值域为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

解法三：用单调性法

设 $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$，可证 $g(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调减，在 $[1,+\infty)$ 上单调增，因而当 $x>0$ 时，且 $x=1$ 时，$g(x)$ 的最小值为 $g(1)=2$，又 $g(x)$ 为奇函数，所以当 $x<0$ 时，且 $x=-1$ 时，$g(x)$ 有最大值 $g(-1)=-2$，∴函数的值域为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

注：求值域常用的几种方法是：配方法，判别式法，均值不等式法，换元法，利用函数单调性和数形结合法等. 求函数值域，不但要掌握几种基本方法，而且要注意定义域对值域的制约作用.

3. 若函数 $f(x)=\dfrac{ax-1}{\sqrt{ax^2+4ax+3}}$ 的定义域为 R，求实数 a 的取值范围.

解：由题设，即对 $x\in R$，不等式 $ax^2+4ax+3$

>0恒成立时 a 的取值范围.

当 $a=0$时，不等式显然成立.

当 $a\neq 0$时，有

$\begin{cases} a>0 \\ \triangle=16a^2-12a<0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a>0 \\ 0<a<\dfrac{3}{4}, \end{cases}$

即有$0<a<\dfrac{3}{4}$，∴实数 a 的取值范围为 $[0,\ \dfrac{3}{4})$.

注：本题不要遗漏对 $a=0$的讨论，当 $a\neq 0$时，利用了二次函数图象与二次不等式的关系.

三、目标训练

（一）选择题

1. 函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，值域为$[1,\ 2]$，则 $f(x+2)$ 的定义域和值域分别是 （ C ）

A. $[0,\ 1]$ 和 $[1,\ 2]$

B. $[2,\ 3]$ 和 $[3,\ 4]$

C. $[-2,\ -1]$ 和 $[1,\ 2]$

D. $[-1,\ 2]$ 和 $[3,\ 4]$

2. 函数 $y=x^2+\sqrt{1-x^2}$ 的值域为（ B ）

A. $[0,\ +\infty)$　　B. $[1,\ +\infty)$

C. $\left[\dfrac{3}{4},\ +\infty\right)$　　D. $\left[\dfrac{3}{4},\ 1\right]$

3. 函数 $y=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x^2-1}$ 的定义域是 （ D ）

A. $[-1,\ 1]$　B. $(-\infty,\ -1]\cup[1,\ +\infty]$

C. $[0,\ 1]$　D. $\{-1,\ 1\}$

$=\log_{x+2}2$

$\log_{x+2}3>\log_{x+2}2$

$=-1$

4. 已知集合 $A=\{x|\log_{(x+2)}3>1\}$，集合 B 为函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{3ax-x^2-2a^2}}$ 的定义域，若$B\subset A$，则 a 的取值范围为 （ D ）

A. $\left[-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right]$　B. $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

C. $\left[-\dfrac{1}{2},\ 0\right)\cup\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right]$

D. $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)\cup\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

（二）填空题

5. $f\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$的定义域为$[-8,\ -2]$，则$f(x^2)$的定义域为 $[-\frac{\sqrt6}{2},-\frac{\sqrt3}{2}]\cup[\frac{\sqrt3}{2},\frac{\sqrt6}{2}]$

6. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+4x-2)$ 的值域是 $[-1,+\infty)$.

$\log_{\frac12} -(x-2)^2+2$

7. 设函数 $y=\sqrt{x^2-2x-8}$的定义域为 A，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-|x-a|}}$的定义域为 B，若 $A\cap B=\varnothing$则 a 的取值范围为 $(-1,\ 3)$.

$(-2,4)$

$x\geq 4$

$or\ x\leq -2$

（三）解答题

8. 若函数 $y=\sqrt{ax^2-ax+\dfrac{1}{4}}$ 的定义域为一切实数，求实数 a 的取值范围.

$0<a<1$

$\begin{cases} a\neq 0 \\ a>0 \\ \triangle<0 \end{cases}$

9. 已知扇形周长为$10cm$，求扇形的半径 r 与扇形面积 S 的函数关系式，并求出其定义域.

$S=5r$　　$r\in R^+$

$S=\frac12 lr$

$=5r$

$(\frac{5}{\pi+1},5)$

10. 已知正$\triangle ABC$中，$AB=2$，点 P、Q 分别在 AB，AC 上，且线段 PQ 将$\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分，设 $AP=x$，$AQ=m$，$PQ=y$. 求：

（1）m 与 x 的函数关系式及定义域；

（2）y 与 x 的函数关系式及 y 的值域.?

$m=\frac{2}{x}$　　$mx=2$

前58天：函数的奇偶性与单调性

一、考点精要

1. 理解奇偶函数的定义及其奇偶函数图象的对称性（及定义域的对称性），掌握用定义判断或证明函数的奇偶性.

2. 理解函数单调性的定义，掌握用定义求解或证明函数的单调区间及其增减性.

3. 简单复合函数的奇偶性和单调性的判断，函数的奇偶性，单调性及周期性的应用.

二、典型例题辨析

1. 设数函 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，并且在区间 $(-\infty, 0)$ 内单调递增，若 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-2a+1)$，又已知函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{a^2-3a+1}$ 是单调递减函数，求 a 的取值范围.

解：$f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且在区间 $(-\infty, 0)$ 内单调递增，由偶函数性质，可知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减，又 $2a^2+a+1=2\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$，$3a^2-2a+1=3\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$，由 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-2a+1)$ 得 $2a^2+a+1>3a^2-2a+1$，即 $a^2-3a<0$ 解得 $0<a<3$

又已知函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{a^2-3a+1}$ 是单调减函数，且 $a^2-3a+1=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$ 在 $a\in\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 为单调增函数，$\therefore y=\left(\frac{1}{2}\right)^{a^2-3a+1}$ 的单调减区间为 $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

由此可得 $a\in\left[\frac{3}{2}, 3\right)$ 时满足题设要求.

注：复合函数的单调性有以下规律：

(1) 若 $y=f(u)$ 是 $[m, n]$ 上的增函数，则 $y=f[g(x)]$ 的增减性与 $u=g(x)$ 的增减性相同.

(2) 若 $y=f(u)$ 是 $[m, n]$ 上的减函数，则 $y=f[g(x)]$ 的增减性与 $u=g(x)$ 的增减性相反.

2. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上以2为周期的周期函数，且 $f(x)$ 是偶函数，在区间 $[2, 3]$ 上，$f(x)=-2(x-3)^2+4$，求 $x\in[1, 2]$ 时，$f(x)$ 的解析式.

解：当 $x\in[1, 2]$ 时，有

$-x\in[-2, -1]$，$(-x+4)\in[2, 3]$，

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)=f(-x)$.

因为 $f(x)$ 是以2为周期的周期函数，所以 $f(-x)=f(-x+4)$，

$\therefore$ 当 $x\in[1, 2]$ 时，有

$$\begin{aligned} f(x)&=f(-x)=f(-x+4)\\ &=-2[(-x+4)-3]^2+4\\ &=-2(x-1)^2+4 \end{aligned}$$

即所求 $f(x)$ 的解析式为

$f(x)=-2(x-1)^2+4$ $(x\in[1, 2])$

注：本例涉及周期函数的定义是："对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零的常数 T，使得当 x 取定义域内每一个值时，$f(x+T)=f(x)$ 都成立，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，不为零的常数 T 称为这个函数的周期".

3. 用定义求函数 $f(x)=x+\frac{t}{x}$ $(t>0)$ 的单调区间，并由此求 $f(x)=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的值域.

解：函数 $f(x)=x+\frac{t}{x}$ $(t>0)$ 的定义域为 $x\neq0$ 的一切实数，且 $f(-x)=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 为奇函数，因而先考察函数在 $(0, +\infty)$ 上的单调性.

设 x_1，$x_2\in(0, +\infty)$，且 $x_1<x_2$

由 $f(x_1)-f(x_2)=x_1-x_2+\frac{t}{x_1}-\frac{t}{x_2}=(x_1-x_2)\left(1-\frac{t}{x_1x_2}\right)=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-t)}{x_1x_2}$ (1)

$\because x_1<x_2$ 且 $x_1, x_2\in(0, +\infty)$，$\therefore (x_1-x_2)<0$，$x_1x_2>0$，

$\therefore$ 当 $0<x_1<\sqrt{t}$，$0<x_2\leqslant\sqrt{t}$ 时有 $0<x_1x_2<t$，即 $x_1x_2-t<0$.

$\therefore$ (1)式大于零，即 $f(x_1)>f(x_2)$ 即 $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{t}]$ 内单调减.

同理有 $x_1\geqslant\sqrt{t}$，$x_2>\sqrt{t}$ 时 $x_1x_2>t$，即 $x_1x_2-t>0$，$\therefore$ (1) 式小于零，即 $f(x_1)<f(x_2)$ 即 $f(x)$ 在 $[\sqrt{t}, +\infty)$ 内单调增.

而 $f(x)$ 是奇函数，故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{t})$ 单调增，在 $[-\sqrt{t}, 0)$ 单调减.

综合可知 $f(x)=x+\frac{t}{x}$ $(t>0)$ 的单调增区间为 $(-\infty, -\sqrt{t}]\cup[\sqrt{t}, +\infty)$；单调减区间为 $[-\sqrt{t}, 0)\cup(0, \sqrt{t}]$.

而 $f(x)=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$，若令 $\sqrt{x^2+4}=t$，则 $t\geqslant2$，可转化为 $y=t+\dfrac{1}{t}$（$t\geqslant2$）的形式，由前所述，y 在（0，1］单调减，在[1，$+\infty$）单调增，所以当 $t=2$时，y 有最小值$\dfrac{5}{2}$. 所以 $f(x)=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$的值域为$\left[\dfrac{5}{2},\ +\infty\right)$.

注：(1) 函数 $f(x)=x+\dfrac{t}{x}$（$t<0$）可直接利用函数单调性知 $f(x)$ 在定义域内为增函数.

(2) 对于 $f(x)=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$用均值不等式求最小值时，等号取不到.

三、目标训练

（一）选择题

1. 已知 $F(x)=\left(1+\dfrac{2}{2^x-1}\right)f(x)$（$x\neq0$）是偶函数，且 $f(x)$ 不恒为零，则 $f(x)$ 是（　　）

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 既奇又偶函数　　D. 非奇非偶函数

2. 奇函数 $f(x)$ 在区间 $[-b,\ -a]$ 上单调递减且 $f(x)>0$　（$0<a<b$），那么 $|f(x)|$ 在区间 $[a,\ b]$上是（ B ）

A. 单调递减　　B. 单调递增

C. 不增也不减　　D. 先递减后递增

3. 命题甲：定义在区间（a，b）上的函数$f(x)$是减函数. 命题乙：存在 $x_1\in$（a，b），$x_2\in$（a，b），当 $x_1<x_2$时，$f(x_1)>f(x_2)$.

那么甲是乙的（ A ）

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

4. 函数 $y=f(x)$ 为偶函数，$x>0$时，$f(x)=-x^2+x$，则 $f(x)$ 在 $x\in R$ 上的单调增区间是（ A ）

A. $\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{2}\right]$　B. $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right]$

C. $\left[-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$　D. $\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{2}\right]\cup\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right]$

（二）填空题

5. 函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 的奇偶性是________.

6. $f(x)$ 是定义 R 上的奇函数，则 $f(0)=$ 0；又若对一切实数 x 均有 $f(x+4)=f(x)$，且 $f(3)=2$，则 $f(25)=$ -2.

7. 函数 $y=f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-80}}$的单调递增区间为________.

（三）解答题

8. 设函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且 $f(x_1-x_2)=\dfrac{f(x_1)\cdot f(x_2)+1}{f(x_1)-f(x_2)}$求证 $f(x)$ 是奇函数.

9. 求函数 $f(x)=\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2+\log_{\frac{1}{2}}x+1$的单调区间，并指出在区间内 $f(x)$ 的增减性.

10. 设 a 是实数，$f(x)=a-\dfrac{2}{2^x+1}$　（$x\in R$）

(1) 试证明：对 a 取任意实数，$f(x)$ 是增函数；

(2) 试确定 a 的值，使 $f(x)$ 为奇函数.

前57天：函数的图象

一、考点精要

1. 掌握一次、二次函数、幂函数、指对数函数、三角函数等初等函数的图象特征.

2. 理解并掌握函数图象的平移变换，对称变换和伸缩变换.

3. 结合图象理解函数的奇偶性，单调性及周期性等主要性质，数形结合是探求解题途径，获得问题解决的重要方法.

二、典型例题辨析

1. 设 $a\in R$，函数 $f(x)$ 的定义域为 R，证明若对任意 $t\in R$，都有 $f(a+t)=f(a-t)$，则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

证明：设 (x_0, y_0) 是 $y=f(x)$ 的图象上任一点，则 $y_0=f(x_0)$，又 (x_0, y_0) 关于 $x=a$ 的对称点为 $(2a-x_0, y_0)$，由题设

$$f(2a-x_0)=f[a+(a-x_0)]$$
$$=f[a-(a-x_0)]=f(x_0)=y_0,$$

这就说明 $(2a-x_0, y_0)$ 也在 $y=f(x)$ 的图象上.

所以函数 $y=f(x)$ 的图象关于 $x=a$ 对称.

注：(1) 对于函数 $y=f(x)$，本例的结论等价于：若对定义域内任意 x，$f(x)=f(2a-x)$ 都成立，则 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

(2) 关于函数图象对称的一般结论有：$y=f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称；$y=-f(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于 x 轴对称；$y=-f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于原点对称；$x=f(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称；$x=-f(-y)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=-x$ 对称.

2. 分别画出下列函数的大致图象

(1) $y=2^{|x|}$　　(2) $y=|\lg x|$

(3) $y=|x^2-2x|+1$

解：分别化简函数解析式

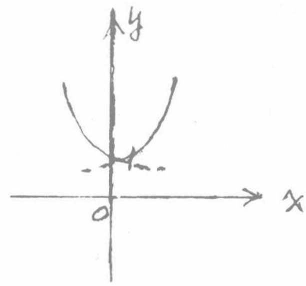
(1) $y=2^{|x|}=\begin{cases}2^x & (x\geqslant 0)\\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^x & (x<0)\end{cases}$

(2) $y=|\lg x|=\begin{cases}\lg x & (x\geqslant 1)\\ -\lg x & (0<x<1)\end{cases}$

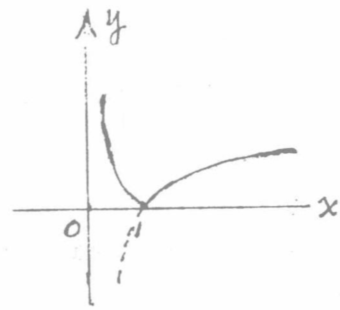
(3) $y=|x^2-2x|+1$

$=\begin{cases}(x-1)^2 & (x\leqslant 0 \text{或} x\geqslant 2)\\ -(x-1)^2+2 & (0<x<2)\end{cases}$

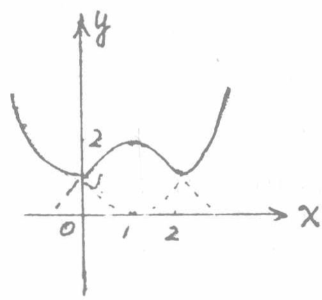
再依基本函数图象作图如下：



57～（1）



57～（2）

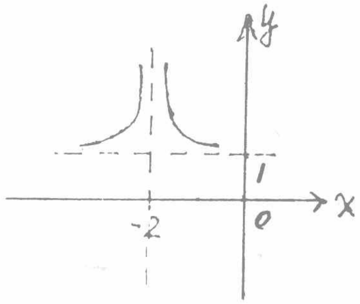


57～（3）

注：本例作 (1) 的函数图象是形如 $y=f(x)$ 与 $y=f(|x|)$ 的对称变换，其特征是保留 $y=f(x)$ 的图象在 y 轴的右半部分，去掉左半部分，再把右半部分的图象依 y 轴对称到左半平面所得. 作 (2) 的函数图象是形如 $y=f(x)$，与 $y=|f(x)|$，的对称变换，其特征是保留 $y=f(x)$ 的图象在 x 轴的上半部分并把 x 轴的下半部分依 x 轴对称到上半平面所得.

3. 画出函数 $f(x)=\dfrac{x^2+4x+5}{x^2+4x+4}$ 的大致图象，由图象写出函数 $y=f(x)$ 的单调区间，并比较 $f(-\pi)$ 与 $f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 的大小.

解：化简函数 $f(x)=\dfrac{x^2+4x+5}{x^2+4x+4}=1+\dfrac{1}{(x+2)^2}$ $=1+(x+2)^{-2}$. 其图象可由幂函数 $y=x^{-2}$ 的图象沿 x 轴向左平移2个单位，再沿 y 轴向上平移1个单位而得，如图：



57～(4)

其单调增区间为 $(-\infty,-2)$，其单调减区间为 $(-2,+\infty)$.

设点 $(-\pi, f(-\pi))$ 关于直线 $x=-2$ 的对称点为 $(a, f(a))$，由 $\dfrac{-\pi+a}{2}=-2$，得 $a=\pi-4$ 且 $a\in(-2,+\infty)$，$a=\pi-4<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，由函数单调性，得 $f(\pi-4)>f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，且 $f(a)=f(-\pi)=f(\pi-4)$. 故 $f(-\pi)>f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

注：本例函数图象的作法是形如 $y=f(x)$ 与 $y=f(x+a)$ 的平移变换及 $y=f(x)$ 与 $y=f(x)+h$ 的平移变换，应注意当 $a>0$ 时，把 $y=f(x)$ 的图象沿 x 轴左移 a 个单位，$a<0$ 时沿 x 轴右移 $|a|$ 个单位可得 $y=f(x+a)$ 的图象；当 $h>0$ 时，把 $y=f(x)$ 的图象沿 y 轴上移 h 个单位，$h<0$ 时沿 y 轴下移 $|h|$ 个单位可得 $y=f(x)$ 的图象.

三、目标训练

（一）选择题

1. 为了得到函数 $y=f(-2x)$ 的图象，可以把函数 $y=f(1-2x)$ 的图象进行适当平移，这个平移是 $-2(x-\frac{1}{2})$ $-2(x-\frac{1}{2})$ （ B ） D

A. 沿 x 轴向右平移1个单位

B. 沿 x 轴向右平移 $\dfrac{1}{2}$ 个单位

C. 沿 x 轴向左平移1个单位

D. 沿 x 轴向左平移 $\dfrac{1}{2}$ 个单位

2. 有三个函数，第一个函数是 $y=f(x)$，第二个函数是它的反函数，第三个函数的图象与第二个函数的图象关于点（1，0）对称，则第三个函数是（ ）

A. $y=f^{-1}(1-x)$　　B. $y=-f^{-1}(2-x)$

C. $y=f^{-1}(x)+1$　　D. $y=f^{-1}(x)+2$

3. 如果函数 $y=ax^2+2ax-1$，对于 $x\in[1,3]$ 上的图象都在 x 轴的下方，则 a 的取值范围是（ D ）

A. $\left(0,\dfrac{1}{15}\right)$　　B. $(-\infty, 0)$

C. $(-\infty, 0)\cup\left(0,\dfrac{1}{15}\right)$　　D. $\left(-\infty,\dfrac{1}{15}\right)$

4. 函数 $y=f(x)$ 的定义域为 R，且满足 $f(x+3)=f(3-x)$，$f(5)\neq0$，在区间 $(3,5)\cup(5,+\infty)$ 上 $f(x)\neq0$，则 $f(x)=0$ 的根为（ ） C

A. 2个　　B. 3个

C. 2个或3个　　D. 无数多个

（二）填空题

5. 要得到函数 $y=\log_2(x+1)$ 的图象，可将 $y=2^x$ 的图象沿______方向平移__1__个单位，再作关于直线__$y=x$__的对称图象.

6. 把函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象上各点纵坐标缩小到原来的 $\dfrac{1}{2}$，再作所得图象关于 y 轴的对称图象，这时此函数图象的解析式为__$\frac{1}{2}\sqrt{-x}$__ $(x\leq0)$

7. $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，其图象关于 $x=2$ 对称，且当 $x\in(-2,2)$ 时，$f(x)=-x^2+1$，则当 $x\in(-6,-2)$ 时，$f(x)=$__$-(x+4)^2+1$__

（三）解答题

8. 作出下列函数的大致图象

（1）$y=|2^x-2|$　　（2）$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}-1$

9. 作出函数 $y=\left|\frac{1}{2}(x-1)^2-3\right|$ 的图象，并依图象指出其单调递增区间.

$y=\left|\frac{1}{2}(x-1)^2-3\right|$

$=\begin{cases}\frac{1}{2}(x-1)^2-3 & (x>\sqrt{6}+1 \text{ 或 } x<-\sqrt{6}+1)\\ -\frac{1}{2}(x-1)+3 & (1-\sqrt{6}\le x\le 1+\sqrt{6})\end{cases}$

单↑ $[1-\sqrt{6}$　$1]$ 和 $(1+\sqrt{6},+\infty)$

单↓ $(-\infty$　$1-\sqrt{6})\cup(1,1+\sqrt{6}]$

10. 画出函数 $y=\sqrt{2x+1}$ 的图象，并利用此图象判定方程 $\sqrt{2x+1}=x+a$ 有两个不同实数解时，实数 a 所满足的条件.

$y=(2x+1)^{\frac{1}{2}}$

前56天：强化训练一

（一）选择题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\lg(x-1)}$ 的定义域是　　（ A ）

A. $(1,2)\cup(2,+\infty)$

B. $(1,+\infty)$

C. $[1,2)\cup(2,+\infty)$

D. $(1,2)\cup(2,4)\cup(4,+\infty)$

2. 已知 $A\cap B=\{a\}$，$A\cup B=\{a,b,c\}$，则满足条件的不同的集合 A、B 有　　（ ）B

A. 3对　　　　B. 4对

C. 8对　　　　D. 9对

3. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x^2)$，$x\in(-1,0)$，它的反函数是　　（ A ）

A. $y=-\sqrt{1-(\frac{1}{2})^x}$　　$(x>0)$

B. $y=-\sqrt{1-(\frac{1}{2})^x}$　　$(x\geqslant 0)$

C. $y=\sqrt{1-(\frac{1}{2})^x}$　　$(x>0)$

D. $y=\sqrt{1-(\frac{1}{2})^x}$　　$(x\geqslant 0)$

4. 在区间 $(-\infty,0)$ 上为增函数的是（ D ）

A. $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$　　B. $y=x^2+1$

C. $y=-(x+1)^2$　　D. $y=\dfrac{x}{1-x}$

5. 函数 $y=(\dfrac{1}{x})^{\frac{1}{3}}$ 的反函数是 $g(x)$，则（ B ）

A. $g(2)>g(-1)>g(-3)$

B. $g(2)>g(-3)>g(-1)$

C. $g(-1)>g(-3)>g(2)$

D. $g(-3)>g(-1)>g(2)$

6. 函数 $y=f(x)$ $(x\in R)$ 是奇函数，则下列各点中，在曲线 $y=f(x)$ 上的一定是　　（ C ）B

A. $(a,f(-a))$

B. $(-a,-f(a))$

C. $\left(-\lg a,-f\left(\lg\dfrac{1}{a}\right)\right)$

D. $\left(\lg a,f\left(\lg\dfrac{1}{a}\right)\right)$

7. 下列四个图形中，与函数 $y=3+\log_2 x(x\geqslant 1)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称的图形是　　（ ）

A.

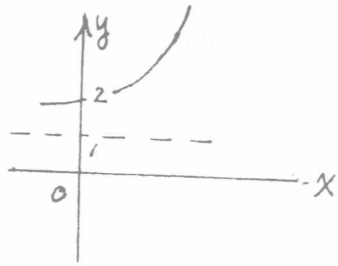


图 56～(1)

B.

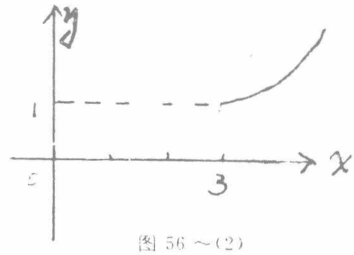


图 56～(2)

C.

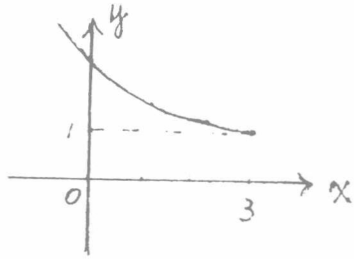


图 56～(3)

D.

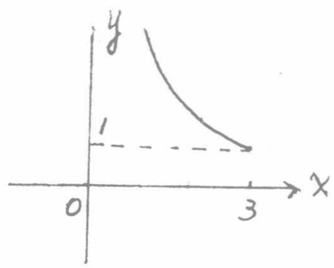


图 56～(4)

8. 方程 $\sqrt{4+4x-x^2}=\dfrac{2-x}{x-1}$ 的实根共有（ ）

A. 1个　　　　B. 2个

C. 3个　　　　D. 4个

9. 函数 $f(x)=\log_a(x^2+ax+4)$ 的值域为 R，则实数 a 的取值为　　（ D ）

A. $-4<a<4$　　B. $-4\leqslant a\leqslant 4$

C. $a\leqslant -4$ 或 $a\geqslant 4$　　D. $a<-4$ 或 $a>4$

10. 函数 $y=f(x)$ 在 $(0,2)$ 上是减函数，且

关于 x 的函数 $y=f(x+2)$ 是偶函数，那么（　　）

A. $f\left(\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{5}{2}\right)<f(3)$

B. $f(3)<f\left(\frac{5}{2}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$

C. $f(3)<f\left(\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{5}{2}\right)$

D. $f\left(\frac{5}{2}\right)<f(3)<f\left(\frac{1}{2}\right)$

（二）填空题

11. (x, y) 在映射 f 的作用下的象是 $(y-x, 2x)$，那么 $(3, 2)$ 在 f 的作用下的原象是__________.

12. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+5x+6)$ 的单调递增区间是__________.

13. 给出以下4个命题：

(1) 函数 $y=\sqrt{x-1}$ 与函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$，的和仍是 x 的函数.

(2) 设函数 $y=x+\frac{1}{x}$，$x\in\left[\frac{1}{2}, 5\right]$，则 y 的值域为 $\left[2, \frac{26}{5}\right]$.

(3) 函数 $y=f(x)$ 的图象与 $x=f(y)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

(4) 把函数 $y=f(2x)$ 的图象向左平移4个单位，可得函数 $y=f(2x+4)$ 的图象.

其中正确命题的序号为__________.

14. 已知奇函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x+3)=f(x)$，当 $x\in[0, 1)$ 时，函数 $f(x)=3^x-1$，则 $f\left(\log_{\frac{1}{3}}36\right)$ 的值等于__________.

（三）解答题

15. 已知函数 $f(x)=\log_a\frac{3+x}{3-x}$　$(a>0, a\neq1)$

(1) 求 $f(x)$ 的定义域

(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性

(3) 若 $f(x)\geqslant\log_a(2x)$，求 x 的取值范围.

16. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})$，$x\in R^+$，求该函数的反函数 $y=f^{-1}(x)$，并判断 $y=f^{-1}(x)$ 的单调性，并证明你的结论.

17. 已知 $a>0$ 且 $a\neq1$，有

$f(\log_a x)=\frac{a}{a^2-1}(x-x^{-1})$

(1) 对于 $f(x)$，当 $x\in(-1, 1)$ 时，$f(1-m)+f(1-m^2)<0$，求 m 的值的集合.

(2) 若 $f(x)-4$ 恰好在 $(-\infty, 2)$ 上取负值，求 a 的值.

18. 设 $P(x+a, y_1)$，$Q(x, y_2)$，$R(2+a, y_3)$ 是 $f(x)=2^x+a$ 的反函数图象上不同的三个点，若使 y_1、y_2、y_3 成等差数列的实数 x 只有一个，试求 a 的取值范围.