国家级示范性高等院校精品规划教材

经济数学

上

JING JI SHU XUE

GUOJIAJI SHIFANXING GAODENGYUANXIAO
JINGPIN GUIHUA JIAOCAI

主编/饶　峰

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

国家级示范性高等院校精品规划教材

经济数学

（上）

主　编　饶　峰
主　审　袁　森
副主编　彭　沛　叶提芳
　　　　杨贵诚　王　慧

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是为了适应培养"实用型、应用型"的经济管理人才要求而编写的公共数学课教材．内容包括微积分、线性代数、概率论和数理统计．

本书可作为高等学校本专科经济类高等数学课程和高职高专数学课程的教材或教学参考书．

图书在版编目(CIP)数据

经济数学．上/饶峰主编．—天津：天津大学出版社，2011.8

国家级示范性高等院校精品规划教材

ISBN 978-7-5618-4050-4

Ⅰ.①经… Ⅱ.①饶… Ⅲ.①经济数学—高等学校—教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 149792 号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨欢
地　　址	天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话	发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址	www.tjup.com
印　　刷	河北省昌黎县第一印刷厂
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	185mm×260mm
印　　张	13.25
字　　数	331 千
版　　次	2011 年 8 月第 1 版
印　　次	2011 年 8 月第 1 次
定　　价	28.00 元

前　言

根据国家教育部1998年制定的《经济数学基础》教学大纲并结合近年来经济数学教学改革经验我们编写了本套教材，这套教材分为两册，上册的主要内容是微积分，下册包括线性代数、概率论与数理统计．本套教材可作为高等学校本专科经济管理类经济数学课程和高职高专数学课程的教材或教学参考书．

本书是这套教材的上册，主要内容共有9章，包括极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、多元函数微分学、无穷级数、常微分方程．

本教材以湖北工业大学商贸学院为主编单位，多所独立学院参编．上册第1、2章由湖北开放职业学院彭沛编写，第3章由湖北工业大学商贸学院王慧编写，第4、5章由湖北工业大学商贸学院杨贵诚编写，第6、7章由湖北工业大学商贸学院饶峰编写，第8、9章由武汉工业学院工商学院叶提芳编写．全书由饶峰统稿，湖北开放职业学院袁森老师担任主审．

全书具有以下特色．

1. 针对当前高职高专教育的实际与特点，突出“以应用为目的，必需够用为度”的指导思想，强调数学思想、数学方法及数学的应用．

2. 文字上力求深入浅出，做到数、形结合，直观易懂，让学生有兴趣、有能力学好该课程．

3. 本书在编写上侧重于应用，对过于复杂的定理证明以及在实际问题中应用较少的内容都予以省略，不去强调论证的严密性．

4. 注重数学概念与实际问题的联系，特别是与经济问题的联系．

5. 按章节配备适量练习题，有利于学生对数学的基本概念、基本运算、基本方法的掌握．

本教材的编写具有一定的弹性，希望使适用面更为广泛．不同层次的学生可以根据实际情况选择不同的内容．

本书得到天津大学出版社的大力支持，特致以谢意．

由于编者水平有限，时间紧迫，书中难免存在疏漏之处，敬请专家、同行及广大读者指正．

编　者

2011年7月

目　　录

第1章 极限与连续

初等数学主要研究事物相对静止状态的数量关系，而微积分则主要研究事物运动、变化过程中的数量关系．极限方法是研究微积分的最基本方法，微积分学的概念、性质和法则都是通过极限方法来建立的．因此，极限是微积分学最基本的概念．本章在复习函数知识的基础上，学习极限的概念、连续函数的概念与性质．连续函数是微积分的主要研究对象，因为实际中所遇到的函数常常是连续函数，对于不连续函数，常常直接或间接地借助于连续函数进行研究．

1.1 函数

1.1.1 变量与区间

1. 常量与变量

在日常生活和科学技术中，经常遇到各种不同的量，例如长度、面积、体积、时间、距离、速度等等，其中在某一过程中保持不变，始终取一固定数值的量称为**常量**；在某一过程中发生变化，可以取不同数值的量称为**变量**．习惯上，用字母 a,b,c 等表示常量，而用字母 x,y,z 等表示变量．

例如，一封闭容器在加热过程中，容器内气体的体积和质量都是常量，而其温度与压力则是变量．在某一时期内，一种商品的价格保持不变，它是一个常量，而这种商品每天的销售数量却不同，它是一个变量．

注意 一个量究竟是常量还是变量并不是绝对的，需要由具体情况而确定，常量和变量依赖于所研究的过程；同一个量，在某一过程中是常量，而在另一过程中则可能是变量．因此，常量和变量是可以相互转化的，比如重力加速度 g，在地球表面它是一个常量，但到了太空中它就是变量了．

本书中，不论是变量还是常量，它们所取的值都是实数．换句话说，只在实数范围内讨论问题，一个变量所能取的数值范围称为变域．一个变量的变域是一个实数的集合，该集合是一个或几个区间，它可以用数轴上的点集来表示．

2. 绝对值

实数 x 的绝对值记作 $|x|$，它的定义如下：

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

在几何上，$|x|$ 表示实数轴上点 x 到原点的距离．

绝对值有如下性质．

设 a,b 为任意实数,则有

(1) $|a|\geqslant 0$, $|a|=0$ 等价于 $a=0$;

(2) $|-a|=|a|$;

(3) $|ab|=|a||b|$;

(4) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$;

(5) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$;

(6) $||a|-|b||\leqslant |a\pm b|\leqslant |a|+|b|$;

(7) $|x|\leqslant a$ 等价于 $-a\leqslant x\leqslant a(a\geqslant 0)$;

(8) $|x|\geqslant a$ 等价于 $x\leqslant -a$ 或 $x\geqslant a(a>0)$.

3. 区间与邻域

(1)区间

设 a,b 都是实数,且 $a<b$,数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为以 a,b 为端点的开区间,记作 (a,b),即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

类似还有闭区间,半开区间以及无限区间:

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\},$$
$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

$[a,b]$称为闭区间,$[a,b)$和$(a,b]$称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间,数 $b-a$ 称为这些区间的长度,除此之外,还有下面几类无限区间:

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\},$$
$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\},$$
$$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x|x\text{ 是实数}\}=\mathbf{R}.$$

其中 $+\infty$ 与 $-\infty$ 是两个记号(不是数)分别读作正无穷大和负无穷大.

以后常用"区间 I"泛指以上各种区间,即它可以是有限区间,可以是无限区间,可以是开区间,也可以是闭区间或半开区间,具体指何种区间有时可加一些说明.

(2)邻域

设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为该邻域的中心,δ 称为该邻域的半径,如图 1-1 所示.

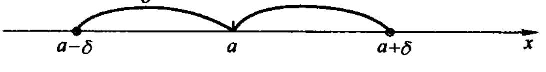

图 1-1

因为$a-\delta<x<a+\delta$相当于$|x-a|<\delta$,所以

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}.$$

有时在不需关注邻域的半径时,邻域$U(a,\delta)$也简记为$U(a)$.

在点a的δ邻域中去掉a后,称为点a的去心δ邻域,记作$\mathring{U}(a,\delta)$,简记作$\mathring{U}(a)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

其中$0<|x-a|$表示$x\neq a$.

例1　$\{x\,|\,|x-1|<0.5\}$表示以点$a=1$为中心,以0.5为半径的邻域,也就是开区间(0.5,1.5),即

$$U(1,0.5)=\{x\,|\,|x-1|<0.5\}=(0.5,1.5).$$

$\{x\,|\,0<|x-1|<0.5\}$表示以点$a=1$为中心,以0.5为半径的去心邻域,也就是开区间$(0.5,1)\cup(1,1.5)$,即

$$\mathring{U}(1,0.5)=\{x\,|\,0<|x-1|<0.5\}=(0.5,1)\cup(1,1.5).$$

1.1.2　函数

1. 函数的概念

在某一个问题中,往往会遇到并不是孤立地变化的几个变量,它们是相互联系并按一定的规律变化的.

例2　设一圆的半径为r,则其面积S为

$$S=\pi r^2.$$

面积S随半径r变化而变化,也随r的确定而确定.

例3　$F=\frac{9}{5}C+32$. 其中F是华氏度数,而C是摄氏度数.

定义1　对于实数域$\mathbf{R}$上的两个非空集合D和Y,若对D中的任一元素x,按照某个法则f对应着Y中唯一确定的数y,则称这个对应法则f是从D到Y的**函数**,通常简记为

$$y=f(x),\ x\in D,$$

其中元素x称为**自变量**,y称为**因变量**,集合D称为函数f的**定义域**,记作$D(f)$,即$D=D(f)$. 当x取遍D中的一切数时,它对应的y值组成的集合$f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$称为函数$f$的**值域**,记作$R(f)$,显然$f(D)\subseteq Y\subseteq\mathbf{R}$.

2. 函数的两个重要因素

在函数的定义中,当x在定义域D上取一个值x_0,所对应的值y_0称为函数f在$x=x_0$处的值,记作$y_0=f(x_0)$, $f(x)\big|_{x=x_0}$或$y\big|_{x=x_0}$.

注意　表示函数的记号可以是任意选取的,除了常用的f外,还可用其他的英文字母或希腊字母,如g,F,φ等. 相应地,函数可记作$y=g(x)$,$y=F(x)$,$y=\varphi(x)$.

有时为了方便起见,可用$y=y(x)$表示一个函数,这样y既代表对应法则又代表因变量. 如果同时研究几个不同的函数,为了以示区别,需用不同的记号来表示它们.

由函数的定义可知,确定一个函数有两个要素,即定义域D与对应法则f. 只有当两个函数的定义域和对应法则完全相同时,才能认为这两个函数是相同的函数. 至于变量本身的

具体意义及采用什么记号,那是无关紧要的,比如函数 $y=f(x)$,$x\in D$ 与 $s=f(t)$,$t\in D$ 代表的就是同一个函数.

例 4 判断下列每组的两个函数是否表示同一个函数:

(1)$y=2\ln x$,$y=\ln x^2$; (2)$y=|x|$,$s=\sqrt{t^2}$.

解 (1)函数 $y=2\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,而函数 $y=\ln x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,即两个函数的定义域不相同,所以它们不是同一个函数.

(2)函数 $y=|x|$ 与 $s=\sqrt{t^2}$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$,且有相同的对应法则,所以,尽管两个函数的自变量、因变量所用的字母不同,但它们表示同一个函数.

例 5 已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{x}{1-x}+1$,求 $f(0)$,$f(x+1)$,$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 及 $\dfrac{1}{f(x^2)}$.

解 $f(0)=0^2+\dfrac{0}{1-0}+1=1$,

$$f(x+1)=(x+1)^2+\frac{x+1}{1-(x+1)}+1=\frac{x^3+2x^2+x-1}{x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}+1=\frac{x^3+x-1}{x^3-x^2},$$

$$\frac{1}{f(x^2)}=\frac{1}{(x^2)^2+\frac{x^2}{1-x^2}+1}=\frac{1}{\frac{x^6-x^4-1}{x^2-1}}=\frac{x^2-1}{x^6-x^4-1}.$$

高等数学的主要研究对象是函数,确定函数的定义域是一件十分重要的事情.通常确定函数定义域的依据为:分式的分母不能为零、负数不能开偶次方、已知的一些函数的定义、物理意义、几何意义等来确定函数的定义域.

例 6 求下列函数的定义域:

(1)$f(x)=\dfrac{1}{\ln(2x-1)}$; (2)$f(x)=\sqrt{x^2-4}-\arcsin(5-2x)$.

解 (1)由

$$\begin{cases}2x-1>0,\\ \ln(2x-1)\neq 0\end{cases}$$

解得 $x>\dfrac{1}{2}$ 且 $x\neq 1$,即所求定义域为 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$.

(2)当 $\sqrt{x^2-4}$ 与 $\arcsin(5-2x)$ 都有意义时,$f(x)$ 才有意义,则

$$\begin{cases}x^2-4\geqslant 0,\\ -1\leqslant 5-2x\leqslant 1,\end{cases}$$

即 $2\leqslant x\leqslant 3$. 故所求定义域为 $[2,3]$.

3. 函数的表示方法

表示函数的方法主要有以下三种:公式法、列表法和图示法.

(1)公式法

用数学式表示函数的方法称为**公式法**,又称为**解析法**．本书涉及的函数大多用公式法表示,上面例 4、例 5、例 6 都是用此方法表示的．这种表示法便于对函数进行理论上的研究,它的优点是表达清晰,缺点是抽象,不够直观．

公式法包含一类函数,称为**分段函数**,它是在定义域内不同区间上用不同式子表示的一个函数．下面介绍几个常用的分段函数．

例 7　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

其图形如图 1－2 所示．

例 8　符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

其图形如图 1－3 所示．

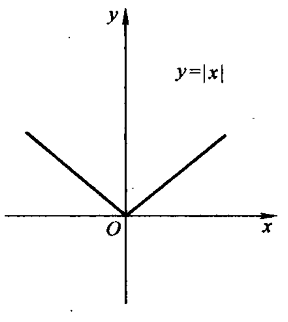

图 1－2

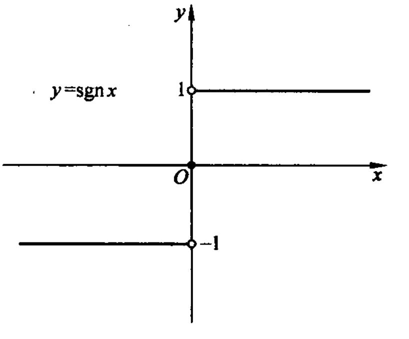

图 1－3

(2)列表法

若变量 x 与 y 之间有函数关系,将一系列自变量 x 的数值与对应的函数值 y 列成表格表示函数的方法称为**列表法**．

例 9

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	180	95	90	80	85	83	280	300	200	80	98	190

其中 Y 表示某家庭月电费,单位为元,M 表示某年的月份．

这是用表格表示的函数,其中 M 为自变量,Y 为因变量. 当 M 在 1 ~ 12 之间任取一整数值时,从表中可查到与其对应的 Y 的值,这种表示法使用方便,但自变量的取值有限．

(3)图示法

用图形表示函数的方法称为**图示法**．图示法直观性强,对函数的变化一目了然,且便于研究函数的几何性质,但不便于作理论研究．这种方法常和解析表达式同时使用,如前面例 7 和例 8.

1.1.3 函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义2 设函数$f(x)$的定义域为D,区间$I\subset D$,如果存在一个正数M,使得$|f(x)|\leqslant M$对任一$x\in I$都成立,则称$f(x)$在I上**有界**;如果不存在这样的正数M,则称$f(x)$在I上**无界**.

例如,函数$f(x)=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内有$|\sin x|\leqslant 1$,所以函数$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内有界(当然也可取大于1的任何数作为M而使$|f(x)|\leqslant M$成立).

又如,函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(1,2)$内,因$\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$,所以函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(1,2)$内有界.但函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内是无界的($x$趋近于0时,不存在确定的正数$M$,使$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$成立).

2. 函数的单调性

定义3 设函数$f(x)$的定义域为D,区间$I\subset D$. 如果对于区间I上任意两点x_1和x_2,当$x_1<x_2$时,都有$f(x_1)<f(x_2)$,则称函数$f(x)$在区间I上是**单调增加**的;单调增加函数的图像沿横轴正向而上升,如图1-4所示. 当$x_1<x_2$时,有$f(x_1)>f(x_2)$,则称函数$f(x)$在区间I上是**单调减少**的;单调减少函数的图像沿横轴正向而下降,如图1-5所示.

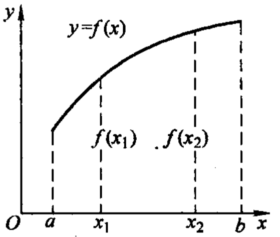

图1-4

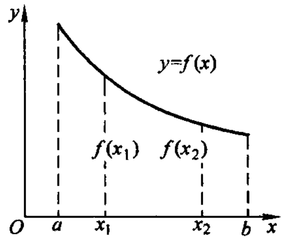

图1-5

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如,函数$f(x)=x^2$在区间$[0,+\infty)$上单调增加,在区间$(-\infty,0]$上单调减少,在区间$(-\infty,+\infty)$内不是单调的.

又如函数$f(x)=\ln x$在区间$(0,+\infty)$内单调增加.

3. 函数的奇偶性

定义4 设函数$f(x)$的定义域D关于坐标原点对称. 如果对于任意的$x\in D$,总有$f(-x)=-f(x)$成立,则称$f(x)$为**奇函数**;如果对于任意的$x\in D$,都有$f(-x)=f(x)$成立,则称$f(x)$为**偶函数**.

例如,$f(x)=x^2$在$(-\infty,+\infty)$内为偶函数,$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内为奇函数.

由定义可知,奇函数的图形关于原点对称,如图1-6所示. 偶函数的图形关于y轴对

称,如图 1－7 所示.

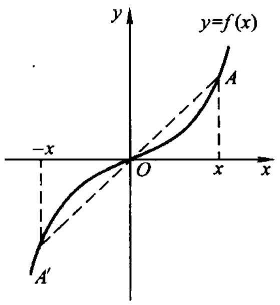

图 1－6

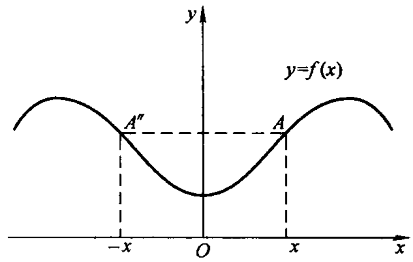

图 1－7

4. 函数的周期性

定义 5　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个非零的常数 T,使得 $x\in D$,且 $X\pm T\in D$ 有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**周期函数**. T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**. 讨论周期函数时,所说的周期是指**最小正周期**.

显然,周期为 T 的周期函数 $y=f(x)$ 的图形沿 x 轴相隔一个周期 T 重复一次.

例如 $f(x)=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数.

1.1.4　反函数与复合函数

1. 反函数的概念及性质

函数 $y=f(x)$ 反映了 y 是怎样随 x 变化而变化的,但变量间的关系往往是相互制约的,故 y 的变化也常会引起 x 的变化.

例如,在自由落体运动中,物体下落的路程 h 与时间 t 的函数关系为

$$h=\frac{1}{2}gt^2\ (t\geqslant 0),$$

若已知下落路程 h,求时间 t,就必须把 h 作为自变量,而把 t 作为关于 h 的函数,由 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 得 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$,这时称函数 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 为函数 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 的反函数,而称 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 为函数 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 的直接函数.

定义 6　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 $Y=f(D)$,如果对于 Y 中每一个 y,都可以由方程 $f(x)=y$ 唯一定出 x,则得到一个定义在集合 Y 上的新函数,称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**,记作 $x=f^{-1}(y)$, $y\in Y$.

对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说,原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

通常,用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,故常将 $y=f(x)$, $x\in D$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$, $x\in Y=f(D)$. 显然,反函数的定义域等于直接函数的值域,反函数的值域等于直接函数的定义域,且 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数. 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称,如图 1－8 所示.