证明复杂性
证明论

“Sheffer竖研究”研究成果

Ampheck

逻辑演算
逻辑史

哲学

Studies on Sheffer Functions

谢弗函数研究

刘新文 著

暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

“Sheffer竖研究”研究成果

Ampheck

Studies on Sheffer Functions

谢弗函数研究

刘新文 著

图书在版编目（CIP）数据

谢弗函数研究／刘新文著．—广州：暨南大学出版社，2011.6
ISBN 978-7-81135-881-0

Ⅰ.①谢… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①数理逻辑—研究 Ⅳ.①0141

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 101652 号

.....

谢弗函数研究
著　　者　刘新文

出 版 人　徐义雄
策划编辑　杜小陆
责任编辑　杜小陆　谭晓青
责任校对　何　力
出版发行　暨南大学出版社（广州暨南大学　邮编：510630）
网　　址　http：//www.jnupress.com　http：//press.jnu.edu.cn
电　　话　总编室（8620）85221601
　　营销部（8620）85225284　85228291　85228292（邮购）
排　　版　暨南大学出版社照排中心
印　　刷　湛江日报社印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　12.75
字　　数　200 千
版　　次　2011 年 6 月第 1 版
印　　次　2011 年 6 月第 1 次
定　　价　26.00 元

中国博士后科学基金成果
项目名称：Sheffer 竖研究
项目编号：20080430035（第 43 批一等资助金）
200801076（第 1 批特别资助金）

献给采采

内容提要

逻辑联结词是逻辑的核心概念之一，本书是中国博士后基金项目“Sheffer 竖研究”的研究成果，主要从逻辑史、逻辑演算、证明复杂性理论、证明论以及哲学方面对逻辑联结词谢弗函数进行了深入研究.

本书可作为逻辑学、哲学和数学工作者理论学习和科学研究的参考书.

前　言

逻辑联结词是逻辑的核心概念之一，本书是关于逻辑联结词谢弗函数的研究. 自1913年谢弗提出这一功能完备的布尔联结词以来，关于它的研究已经形成一个传统. 20世纪50年代模型论出现之前，逻辑初始概念和运算的归约在逻辑研究中占据重要地位. 罗素、尼科、肖菲克尔、卢卡西维茨和奎因等著名逻辑学家都关注过这一方面的工作，肖菲克尔的论文甚至还被编入了数理逻辑主流文献选集《从弗雷格到哥德尔：1879—1931》. 这一传统由莱蒙、马里帝兹、普莱尔等人继承到20世纪下半叶，并由沃斯等人于21世纪在布尔代数、自动推理等领域作了进一步发挥. 我的导师张清宇研究员自20世纪90年代以来在这一方面做过独到的系列工作，本书的研究工作就是在他的这些工作基础上开始的，从这种意义上来说，本书内容也可以看成是对他的工作进行详细阐释和进一步发展.

本书分为五章.

第1章是谢弗函数的概念. 自从谢弗竖提出以来，围绕它从逻辑演算、证明论、逻辑哲学、布尔代数、自动定理证明等方面进行过许许多多的工作. 本章首先致力于整理谢弗函数的概念、基于这一函数之上的逻辑演绎系统的历史发展以及近年来与希尔伯特新问题有关的部分内容，出于叙述便利的目的，这些相互缠绕在一起的内容是分节进行的.

第2章是命题逻辑. 命题逻辑是关于联结词的逻辑，本章首先介绍坦南特的以谢弗竖为唯一命题联结词的后承演算系统以及适用于谢弗竖的推理语义，然后介绍张清宇建立的一个以多级联结词谢弗竖为初始联结词的命题逻辑公理系统，这个演算系统采用括号记法以减少初始符号的数量. 最后一节研究了张清宇这种括号记法的变种及其一系列的弗雷格系统，由此研究了经典命题逻辑重言式的一个递归枚举；这些工作还是下一章关于

命题证明复杂性研究的基础.

第3章是证明复杂性. 在前一章工作的基础上，本章研究了命题证明复杂性理论中的多项式模拟问题.

第4章是证明论与哲学. 按照根岑的意见，某个逻辑常项 * 的消除规则允许我们从主联结词为 * 的公式不多不少地推出 * 的引入规则所保证的，如果出现这种情形，按照达米特的说法，可以说这些规则处于“协调”之中. 自然推演系统及其相应的后承演算之间有着紧密的联系，当自然推演规则都处于协调之中的时候，就有可能从相应的后承演算的推演中证明切割规则的可消除性. 本章首先介绍斯蒂芬·里德对谢弗竖的研究工作，即通过二元联结词谢弗竖来阐述根岑的思想，然后提出一种策略来支持逻辑推理的证明论核证，再讨论这一策略是如何导致逻辑常项的推理规则应该协调，逻辑常项的这一证明论核证可以用来核证经典逻辑. 接着的工作是研究谢弗竖基础上的一阶逻辑正规化定理，这些工作对逻辑常项的意义进行了纯证明论研究，这些解释的兴趣在于它们在解释演绎和逻辑真公式的时候只需依赖极少的策略，一个非常基本的初始演绎概念和真概念.

第5章是量化理论. 本章把第2章部分内容从命题逻辑推广到量化逻辑，研究的是一阶量词和谢弗竖的组合问题以及在此基础上为经典一阶逻辑建立的公理系统. 从某种意义上来说，也可以把本章内容看成是对肖菲克尔型算子的进一步研究.

本书是中国博士后基金项目“Sheffer 竖研究”[项目编号：20080430035（第43批一等资助金）、200801076（第1批特别资助金）]的最终成果，全部内容完成于2009年7月.

由于水平所限，书中难免有不足之处，敬请专家、读者不吝赐教.

目 录

第 1 章　谢弗函数的概念

每一个革新都会尽量推广到可以推广的地方，直到新的革新出现为止.

维基百科[①]

生命的意义在于寻找生命的意义.

逻辑联结词是逻辑中的核心概念之一. 1913 年，美国逻辑学家H. M. 谢弗(Henry M. Sheffer，1883—1964)为布尔代数、经典命题逻辑提出了两个功能完备的联结词，史称“谢弗函数”和“谢弗竖”. 二元的谢弗竖(一般也称为“析舍联结词”，写成“$\mid$”)及其对偶(一般也称为“合舍联结词”，写成“$\downarrow$”)由谢弗在 1913 年发表的论文中提出并证明了其功能完备性. 根据数学史学家近年来的研究发现，波兰数学家爱德华·斯塔姆在 1911 年的论文中使用析舍和析取这两个联结词实现了类似的归约，[②] 而谢弗并没有注意到这个工作. 早在 1880 年左右，美国逻辑学家皮尔士已经证明了所有的布尔选择函数都可以用具有“既不……也不……”作为相容否定意义的单个原始记号加以表达，只是他从来没有发表过此结论. [③]

在经典逻辑中，谢弗竖“$\mid$”的定义为：

$$p \mid q \overset{\text{def}}{=\!=} \neg (p \wedge q).$$

---

① http://en.wikipedia.org/wiki/W._V._Quine.

② Stamm，1911；Grattan-Guinness，2001，第 425 页.

③ 参见 CP 4.20 的脚注.

谢弗竖的对偶在文献中一般被称为“谢弗箭号”，也被称为“皮尔士箭号”或“奎因箭号”，[①] 定义如下：

$$p \downarrow q \overset{\text{def}}{=} \neg p \wedge \neg q.$$

注意到谢弗竖和其对偶之间的平行关系是很有意思的：

$$p \downarrow q \overset{\text{def}}{=} ((p \mid p) \mid (q \mid q)) \mid ((p \mid p) \mid (q \mid q));$$
$$p \mid q \overset{\text{def}}{=} ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)).$$

谢弗竖及其对偶分别相当于自然语言中的“两者都不、并非既是 A 又是 B(not both)”、“既不……也不(neither…nor)”，在卢卡西维茨记法中分别记为 D 和 S. 它们都可以单独定义出所有的经典命题联结词，因此每一个公理集合都有着特别的意思. 从语言学的角度来说，无法用单个的词汇来表达它.[②]

自从谢弗竖被提出以来，围绕它从逻辑演算、证明论、逻辑哲学、布尔代数、自动定理证明等方面进行过许多的研究.

1 谢弗函数的定义

自从谢弗发现了经典二值逻辑的功能完备的二元联结词以来，关于谢弗联结词的大量结果涌现出来，本节将从概念上对这一联结词作详细深入的研究.

---

① Gamut，1991. 该书的中文版由邹崇理先生等人翻译完成，即将由商务印书馆出版.

② 参见：Jaspers，2005，第 1 页(全称量词的否定在自然语言中也没有单个的词汇表达：Horn，1972).

1.1　定义

根据丘齐的函数概念,[①] 谢弗函数的概念可以解释如下:

假设 E 是一个非空集合，Ω_i 是 E 上所有 i 元函数所组成的集合，令

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i,$$

函数集合 $\Delta_1 \subseteq \Omega$ 是关于函数集合 $\Delta_2 \subseteq \Omega$ 的一个“谢弗集”，仅当 Δ_2 的每一个元素都可以由 Δ_1 中的元素的有限次组合来定义.

定义 1.1.1(谢弗函数)

如果一个谢弗集 Δ_1 恰好是一个单元素集合，那么 Δ_1 中的这个元素就称为关于 Δ_2 的“谢弗函数”.

假设 Λ 是由在一个特殊的卢卡西维茨—塔尔斯基多值 $C-N$ 逻辑中可定义的所有真值函数组成的集合. 如果取 0，1，…，m 作真值集合，就可以给出与 N 和 C 有关的函数：对于 p 的值 i，Np 的值为 $m-i$；对于 p，q 的值 i，j，Cpq 的值为 0 仅当 $i \geqslant j$，否则 Cpq 的值为 $j-i$.[②] 根据谢弗函数的上述概念，D. L. 韦伯于 1935 年提出的二元竖 W 是一个关于 Λ 的谢弗函数，因为它可以定义一个多值逻辑中的每一个真值函数：对于 p，q 的值 i，j，Wpq 取 $(i, j)+1$ 中的最小值，除非 $i=j=m$；而在后一种情形下，Wpq 取值为 0. 另一方面，也可以认为韦伯的 W 函数并不是关于 Λ 的谢弗函数，其原因就在于 W 并不能由 Λ 中的元素来定义.

与此相反，就在韦伯论文发表的第 2 年，J. 麦金赛随即提出了一个二元联结词 E，E 不仅是关于 Λ 的谢弗函数，而且还可以由 Λ 中的元素来定

① “函数”概念参见 Church，1970，“导言”第 3 节“函数”.

② Webb，1935. 联结词的前置记法也称为“波兰记法”“卢卡西维茨记法”.

义，即[①]

$$Epq \overset{\text{def}}{=\!=} CpC\{CNq\}qNCqN\{Cq\}Nq,$$

其中，$\{CNq\}$表示的是 CNq 的 $m-1$ 次出现，$\{Cq\}$ 的意思同上. 这样一来，麦金赛关于 N 和 C 的定义就是：

$$Cpq \overset{\text{def}}{=\!=} EpEEEqqEEqqEqqq,$$

$$Np \overset{\text{def}}{=\!=} EpEEppEEppEpp.$$

基于上述原因，1937 年，W. V. O. 奎因在对麦金赛前述论文的评述中认为，麦金赛的结果和韦伯的结果是不一样的，麦金赛的联结词 E 属于 $C-N$ 逻辑，而韦伯的二元竖 W 则不是 $C-N$ 逻辑所固有的.[②] 1969 年，根据奎因的评述，H. E. 亨德莱和 G. J. 马赛对谢弗函数作了进一步的分析，区分出“本土谢弗函数”和“外来谢弗函数”两个概念.[③]

定义 1.1.2(本土谢弗函数、外来谢弗函数)

一个集合 Δ_1 是关于集合 Δ_2 的本土谢弗集，仅当 Δ_1 是关于 Δ_2 的谢弗集，而且 Δ_1 中的每一个元素都可以被 Δ_2 中元素的有限组合所定义；一个关于集合 Δ_2 的谢弗集合 Δ_1 如果不是本土的，那么就称为外来的.

根据这一定义，麦金赛的 E 和韦伯的 W 分别是关于 Λ 的本土谢弗函数和外来谢弗函数.

对于真值为 0，1，…，m(m 不是 3 的整数倍)的任意的卢卡西维茨—塔尔斯基逻辑来说，都存在着比麦金赛的 E 更为简单的本土谢弗函数 D，

① McKinsey，1936.

② Quine，1937.

③ Hendry and Massey，1969.

其定义如下：

$$Dpq \overset{\text{def}}{=\!=} CpNq.$$

为了证明这一点，假设“0”是值总为 0 的公式的缩写. 如果只用 D 就可以写出这样的公式，那么就可以定义 N 和 C 如下：

$$Np \overset{\text{def}}{=\!=} Dp0,$$
$$Cpq \overset{\text{def}}{=\!=} DpNq.$$

现在只需证明如何用 D 来写出一个公式 0. 假设 ϕ^1 是 Dpp，ϕ^{k+1} 是 $D\phi^k\phi^k$. 对于 p 的每一个值，公式 $D\phi^m\phi^{m+1}(=Z)$ 即为关于值 0 的那个公式. 通过归纳可以证明这一点. 对于 p 的值 i，简单的验证就可以知道：如果 $\frac{1}{2}m \leqslant i$，那么 Z 的值为 0. 有了这一点，容易看到：如果 $i \leqslant \frac{1}{4}m$，那么 Z 的值也是 0. 由这两点可以推出：如果 $\frac{3}{8}m \leqslant i$，那么 Z 的值为 0；如果 $i \leqslant \frac{5}{16}m$，那么 Z 的值为 0；等等. 除了 $i = \frac{1}{3}m$ 这种情形，对于 i 的任意一个值，Z 的值都是 0. 除非 m 是 3 的整数倍，没有值 $i = \frac{1}{3}m$. 因此，对于我们所讨论的这些 $C-N$ 逻辑来说，Z 是恒具有值为 0 的公式. 所以联结词 D 是这些逻辑的本土谢弗函数. 当 $m = 3i$ 时，D 不是关于 $\{C, N\}$ 的谢弗函数.

N. M. 马丁在 1950 年所讨论的谢弗函数都是二元函数.[①] 而事实上，关于找出本土三元谢弗函数的问题比相应的二元问题要简单得多. 例如：

定理 1.1.1

下述定义的三元函数 $*$ 是对于任意 C. I. 刘易斯模态系统都成立的本土

① Martin, 1950.

谢弗函数：

$$*(p,q,r) \overset{\text{def}}{=} [\Box(p \equiv q) \supset (q \downarrow r)] \& [\sim \Box(p \equiv q) \supset \Box r].$$

证明：

$$p \downarrow q \overset{\text{def}}{=} *(p,p,q),$$
$$\sim p \overset{\text{def}}{=} p \downarrow p,$$
$$\Box p \overset{\text{def}}{=} *(\sim p,p,p).$$

证明完成.

而本土二元谢弗函数只在模态逻辑系统 *S5* 中被发现.[①] 对于一个联结词是某个模态系统的谢弗函数这一概念的确切意义，稍后进行说明.

有时候，还会遇到这样一种情形：关于函数集合 Δ 存在着度 $n>2$（而没有更小度）的本土谢弗函数；比方说，对于$\{\&, \supset\}$就没有一元或者二元的本土谢弗函数，但是存在着三元的本土谢弗函数，如

$$*(p,q,r) \overset{\text{def}}{=} (p \supset q) \& (p \supset r).$$

证明：

$$p \supset q \overset{\text{def}}{=} *(p,q,q),$$
$$t \overset{\text{def}}{=} p \supset p,$$
$$p \,\&\, q \overset{\text{def}}{=} *(t,p,q).$$

① Massey，1967.