

考研数学历年真题及详解

1995~2005

主编 黄庆怀



2006年 **考研系列**

▣ 把握命题规律与趋势

▣ 归纳核心考点和难点

▣ 查漏补缺，有的放矢推进复习

▣ 提高速度，熟练运用解答技巧



【数学三】

中国 社会 出版 社

考研数学历年真题及 数 学 三

(1995 ~ 2005)

主 编 黄庆怀

中 国 社 会 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学历年真题及详解·数学三/黄庆怀主编. —北京:
中国社会出版社, 2005. 4
(考研数学历年真题及详解)
ISBN 7-5087-0470-3

I. 考... II. 黄... III. 高等数学-研究生-入学
考试-解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 028356 号

从 书 名: 考研数学历年真题及详解
书 名: 考研数学历年真题及详解·数学三
主 编: 黄庆怀
责任编辑: 杨 晖 张国洪

出版发行: 中国社会出版社 邮政编码: 100032
通联发行: 北京市西城区二龙路甲 33 号新龙大厦
电话: 88516087 传真: 66016392
欢迎读者拨打免费热线 8008108114 或登录 www.bj114.com.cn 查询相关信息
经 销: 各地新华书店

印刷装订: 香河新华印刷有限公司
开 本: 787×1092 毫米 1/16
印 张: 11.375
字 数: 270 千字
版 次: 2005 年 4 月第 1 版
印 次: 2005 年 4 月第 1 次

书 号: ISBN 7-5087-0470-3/O·10
定 价: 70.80 元(全四册)

(凡中国社会版图书有缺漏页、残破等质量问题, 本社负责退换)

前 言

本套丛书共有四册，分别为《考研数学历年真题及详解·数学一》、《考研数学历年真题及详解·数学二》、《考研数学历年真题及详解·数学三》、《考研数学历年真题及详解·数学》，丛书以最新考试大纲为基础，并结合名校名师多年考研试题研究的经验和考研高分学的心得编著而成。

每本书均按照时间顺序成套题形式编排，收集了1995年到2005年11套全国硕士研究生考试数学试卷，每套试卷由三部分内容组成：第一部分是真题，第二部分是详细答案，第三部分是解析。答案部分不仅给出了试卷评分的标准答案，有些题还列出了多种不同的解，以扩展考生的解题思路，解析部分对每道真题进行了精辟的解说，不仅对每题所考知识和难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳和总结。

本书主要具有如下特点：

(1) 解答详细，突出重难点。对每一道题，包括选择题和填空题，都进行了详细的解。有些试题提供了多种解题方法，便于读者进一步理解。

(2) 难点归纳，理论知识和考试要点归纳有特色。有些试题的结论在一般教材上并没有为定理或结论，但在考研中却可以直接使用，这些内容本书在解析部分都进行了总结和分

需要特别说明的是：

历年考研试卷的每道题都是一道珍贵的典型例题，读者应该把每一道题认真地看懂、研，要做到举一反三，融会贯通；对于在解题过程中出现的问题和错误，更要下大工夫弄明，只有这样，才有可能考研中取得好成绩！

本书特别适用于硕士研究生入学考试中数学科目的考生，也适用于各大院校学习数学的生参考，对于参加职称考试、自考及其他相关专业人员来说，也是学习数学的一本不可多的复习资料。

由于题量较大，解答详细，错误、遗漏不可避免，诚请读者指正，不甚感激。

编 者

2005年4月

目 录

95 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(1)
95 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解及评析	(4)
96 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(14)
96 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解及评析	(17)
97 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(29)
97 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解及评析	(32)
98 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(44)
98 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解及评析	(47)
99 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(59)
99 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详题及评析	(62)
00 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(75)
00 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解及评析	(78)
01 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(90)
01 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解及评析	(93)
02 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(105)
02 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解及评析	(108)
03 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(120)
03 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解及评析	(124)
04 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(138)
04 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解及评析	(142)
05 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(157)
05 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解及评析	(161)

1995 年全国硕士研究生入学统一考试 经济数学三试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则 $f^{(n)}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设 $z = xyf(\frac{y}{x})$, $f(u)$ 可导, 则 $xz'_x + yz'_y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 $f'(\ln x) = 1+x$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $(A^*)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设 $X_1, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中参数 μ 和 σ^2 未知, 记 $= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $Q^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则假设 $H_0: \mu = 0$ 的 T 检验使用统计量 $T = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $f(x)$ 为可导函数, 且满足条件 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $f(1)$ 处的切线斜率为

- (A) 2. (B) -1. (C) $\frac{1}{2}$. (D) -2

【 】

(2) 下列广义积分发散的是

- (A) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$. (B) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.
(C) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. (D) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$.

【 】

(3) 设矩阵 $A_{m \times n}$ 的秩为 $r(A) = m < n$, E_m 为 m 阶单位矩阵, 下述结论中正确的是

- (A) A 的任意 m 个列向量必线性无关.
(B) A 的任意一个 m 阶子式不等于零.
(C) 若矩阵 B 满足 $BA = O$, 则 $B = O$.
(D) A 通过初等行变换, 必可以化为 (E_m, O) 的形式.

【 】

- (4) 设随机变量 X 和 Y 独立同分布, 记 $U = X - Y, V = X + Y$, 则随机变量 U 与 V 必然
 (A) 不独立. (B) 独立.
 (C) 相关系数不为零. (D) 相关系数为零.

【 】

- (5) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则随 σ 的增大, 概率 $P\{|X - \mu| < \sigma\}$
 (A) 单调增大. (B) 单调减小. (C) 保持不变. (D) 增减不定.

【 】

三、(本题满分 6 分)

设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}(1 - \cos x), & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt, & x > 0, \end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性和可导性.

四、(本题满分 6 分)

已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x) = \int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right) dt + e^{2x}$, 求 $f(x)$.

五、(本题满分 6 分)

将函数 $y = \ln(1 - x - 2x^2)$ 展成 x 的幂级数, 并指出其收敛区间.

六、(本题满分 5 分)

计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \min\{x, y\} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$.

七、(本题满分 6 分)

设某产品的需求函数为 $Q = Q(P)$, 收益函数为 $R = PQ$, 其中 P 为产品价格, Q 为需求量 (产品的产量), $Q(P)$ 是单调减函数. 如果当价格为 P_0 , 对应产量为 Q_0 时, 边际收益 $\left. \frac{dR}{dQ} \right|_{Q=Q_0} = a > 0$, 收益对价格的边际效应 $\left. \frac{dR}{dP} \right|_{P=P_0} = c < 0$, 需求对价格的弹性为 $E_P = b > 1$. 求 P_0 和 Q_0 .

八、(本题满分 6 分)

设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上连续, $g(x)$ 为偶函数, 且 $f(x)$ 满足条件 $f(x) + f(-x) = A$ (A 为常数).

(1) 证明 $\int_{-a}^a f(x) g(x) dx = A \int_0^a g(x) dx$;

(2) 利用(1)的结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx$.

九、(本题满分 9 分)

已知向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (II) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; (III) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$, 如果各向量组的秩分别为 $r(\text{I}) = r(\text{II}) = 3, r(\text{III}) = 4$. 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 的秩为 4.

十、(本题满分 10 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

- (1) 写出二次型 f 的矩阵表达式;
- (2) 用正交变换把二次型 f 化为标准型, 并写出相应的正交矩阵.

十一、(本题满分 8 分)

假如一厂家生产的每台仪器, 以概率 0.70 可以直接出厂; 以概率 0.30 需进一步调试, 经调后以概率 0.80 可以出厂; 以概率 0.20 定为不合格品不能出厂. 现该厂新生产了 $n (n \geq 2)$ 台器(假设各台仪器的生产过程相互独立). 求:

- (1) 全部能出厂的概率 α ;
- (2) 其中恰好有两件不能出厂的概率 β ;
- (3) 其中至少有两件不能出厂的概率 θ .

十二、(本题满分 8 分)

已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求 X 和 Y 的联合分布函数 $F(x, y)$.

1995 年全国硕士研究生入学统一考试 经济数学三试题详解及评析

一、填空题

(1) 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则 $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n 2 \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$.

[详解] $f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1+x} - 1$,

于是 $f'(x) = 2 \cdot (-1)(1+x)^{-2}$,

$f''(x) = 2(-1)(-2)(1+x)^{-3}$,

...

$f^{(n)}(x) = 2(-1)^n n! (1+x)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n 2 \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}.$

[评析] 高阶导数的计算, 直接化成真分式, 这样再求导容易一些.

(2) 设 $z = xyf(\frac{y}{x})$, $f(u)$ 可导, 则 $xz'_x + yz'_y = \underline{2z}$.

[详解] 因为

$$z'_x = yf(\frac{y}{x}) + xy \cdot f'(\frac{y}{x}) \cdot (-\frac{y}{x^2}) = yf(\frac{y}{x}) - \frac{y^2}{x} f'(\frac{y}{x}),$$

$$z'_y = xf(\frac{y}{x}) + xyf'(\frac{y}{x}) \cdot \frac{1}{x} = xf(\frac{y}{x}) + yf'(\frac{y}{x}),$$

于是 $xz'_x + yz'_y = xyf(\frac{y}{x}) - y^2 f'(\frac{y}{x}) + xyf(\frac{y}{x}) + y^2 f'(\frac{y}{x}) = 2xyf(\frac{y}{x}) = 2z.$

[评析] 本题直接利用复合函数求导公式:

$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$ 或是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

(3) 设 $f'(\ln x) = 1+x$, 则 $f(x) = \underline{x + e^x + C}$.

[详解] 令 $\ln x = t$, 则 $x = e^t$,

于是由题设有

$$f'(t) = 1 + e^t, \text{ 即 } f'(x) = 1 + e^x,$$

故 $f(x) = \int (1 + e^x) dx = x + e^x + C.$

【评析】 本题应该采用换元法,再求不定积分,即先把 $f'(x)$ 的表达式求出,然后进行积分即可.

$$(4) \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, A^* \text{ 是 } A \text{ 的伴随矩阵,则 } (A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

【详解】 因为 $AA^* = |A|E$, 从而

$$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|} A = \frac{1}{10} A = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

【评析】 对于 A^* 的问题,如果先求 A^* ,再求 $(A^*)^{-1}$,那么计算量就很大,一般地,应从公式 $AA^* = A^*A = |A|E$ 着手进行讨论分析.

(5) 设 $X_1, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本,其中参数 μ 和 σ^2 未知,记 $= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, Q^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则假设 $H_0: \mu = 0$ 的 T 检验使用统计量 $T = \frac{\bar{X}}{Q} \sqrt{n(n-1)}$.

【详解】 T 统计量定义为 $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$,

这里 $\mu = 0, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} Q^2$,

代入 T 统计量得 $T = \frac{\bar{X}}{S} \sqrt{n} = \frac{\bar{X}}{Q} \sqrt{n(n-1)}$.

【评析】 对于单正总体方差未知时,关于均值的检验统计量的选取问题,具体到本题,应先写出规范的 T 检验统计量,再化为 $\bar{X}, Q$ 表示.

二、选择题

(1) 设 $f(x)$ 为可导函数,且满足条件 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线斜率为

- (A) 2. (B) -1. (C) $\frac{1}{2}$. (D) -2.

【答】 应选(D).

【 】

【详解】 本题实际上要求 $f'(1)$, 由题设

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{-x} = \frac{1}{2} f'(1) = -1,$$

得 $f'(1) = -2$.

【评析】 本题直接利用导数定义计算即可.

(2) 下列广义积分发散的是

(A) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$.

(B) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

(C) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

(D) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$.

【 】

【答】 应选(A).

【详解】 由于 $x = 0$ 是 $\frac{1}{\sin x}$ 的间断点, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = 1$,

根据极限判敛法便知 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$ 发散.

【评析】 对于本题, 实际上, 有

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \bigg|_{-1}^0 + \arcsin x \bigg|_0^1 = \pi,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = -\frac{1}{\ln x} \bigg|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}.$$

因此, (A) 项为正确答案.

(3) 设矩阵 $A_{m \times n}$ 的秩为 $r(A) = m < n$, E_m 为 m 阶单位矩阵, 下述结论中正确的是

(A) A 的任意 m 个列向量必线性无关.

(B) A 的任意一个 m 阶子式不等于零.

(C) 若矩阵 B 满足 $BA = O$, 则 $B = O$.

(D) A 通过初等行变换, 必可以化为 (E_m, O) 的形式.

【 】

【答】 应选(C).

【详解】 (A)、(B) 中“任意”应改为“存在”; (D) 中若改为通过初等变换(包括行、列变换), 则必可化为 (E_m, O) 的形式. 只有(C) 为正确答案. 事实上, 由 $BA = O$, 有 $A^T B^T = O$, 即 B^T 的每列均为 $A^T x = 0$ 的解, 而 A^T 是列满秩的, 所以 $A^T x = 0$ 只有零解, 从而 B^T 的每列均为零, 即 $B = O$.

【评析】 如果本题利用分块矩阵的运算,容易知道由 $AB = 0$,可以解得 B 的列向量为 $AX = 0$ 的解向量.

- (4) 设随机变量 X 和 Y 独立同分布,记 $U = X - Y, V = X + Y$,则随机变量 U 与 V 必然
 (A) 不独立. (B) 独立.
 (C) 相关系数不为零. (D) 相关系数为零.

【 】

【答】 应选(D).

【详解】 因为

$$\begin{aligned}\text{cov}(U, V) &= E(U - \bar{U})(V - \bar{V}) = E(X - Y - \bar{X} + \bar{Y})(X + Y - \bar{X} - \bar{Y}) \\ &= E(X - \bar{X})^2 - E(Y - \bar{Y})^2,\end{aligned}$$

由于 X 和 Y 同分布,故 $E(X - \bar{X})^2 = E(Y - \bar{Y})^2$,即 $\text{cov}(U, V) = 0$,
 故(D) 为正确答案.

【评析】 本题直接按有关计算公式计算即可.但注意,独立性一般要通过联合分布与边缘分布的关系来确定.

- (5) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,则随 σ 的增大,概率 $P\{|X - \mu| < \sigma\}$
 (A) 单调增大. (B) 单调减小. (C) 保持不变. (D) 增减不定.

【 】

【答】 应选(C).

【详解】 由于 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1),$$

$$P\{|X - \mu| < \sigma\} = P\{|Y| < 1\}.$$

可见此概率不随 σ 和 μ 的变代而变化.

【评析】 对于一般正态分布,一般的解题方法是将其转化为标准正态分布,即就很快可以得出正确答案.

三、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}(1 - \cos x), & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt, & x > 0, \end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性和可导性.

【详解】 (1) 由

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x^2}(1 - \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2}{1} = 1,$$

可知 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$.

于是,函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

(2) 分别求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的左、右导数.

$$\begin{aligned} f_-'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \left[\frac{2(1 - \cos x)}{x^2} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(1 - \cos x) - x^2}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sin x - 2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\cos x - 2}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{3} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_+'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2 - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x \sin x^2}{2} = 0. \end{aligned}$$

由于左、右导数都等于0,可见 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导,且 $f'(0) = 0$.

【评析】 对于连续性、可导性,变上限积分等多个知识点的考查问题,直接按定义讨论分析分段点 $x = 0$ 处的左、右极限和左、右导数即可.

四、已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x) = \int_0^{3x} f(\frac{t}{3}) dt + e^{2x}$, 求 $f(x)$.

【详解】 两端同时对 x 求导数,得一阶线性微分方程

$$f'(x) = 3f(x) + 2e^{2x}, \text{ 即 } f'(x) - 3f(x) = 2e^{2x}.$$

解此方程,有

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\int Q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right) e^{-\int p(x) dx} = \left(\int 2e^{2x} \cdot e^{-3x} dx + C \right) e^{3x} \\ &= \left(2 - \int e^{-x} dx + C \right) e^{3x} = (-2e^{-x} + C) e^{3x} = Ce^{3x} - 2e^{2x}, \end{aligned}$$

由于 $f(0) = 1$, 可得 $C = 3$,

于是 $f(x) = 3e^{3x} - 2e^{2x}$.

【评析】 直接由积分等式两边对 x 求导后,得出一微分方程,但对于已知条件中的变上限积分,在求导时不需先作代换 $\frac{t}{3} = u$.

五、将函数 $y = \ln(1 - x - 2x^2)$ 展成 x 的幂级数,并指出其收敛区间.

【详解】 $\ln(1 - x - 2x^2) = \ln(1 - 2x)(1 + x) = \ln(1 + x) + \ln(1 - 2x)$.

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots,$$

其收敛区间为 $(-1, 1]$;

$$\ln(1 - 2x) = (-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{(-2x)^n}{n} + \cdots,$$

其收敛区间为 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

于是,有

$$\ln(1 - x - 2x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + (-1)^{n+1} \frac{(-2x)^n}{n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 2^n}{n} x^n,$$

其收敛区间为 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

[评析] 函数的幂级数展开一般用间接展开法,但应该注意的是:函数 $\ln(1-2x)(1+x)$ 的定义域为 $(1-2x)(1+x) > 0$, 所以 $\begin{cases} 1-2x > 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1-2x < 0 \\ 1+x < 0 \end{cases}$, 但是, $\begin{cases} 1-2x < 0 \\ 1+x < 0 \end{cases}$ 无解, 因此, 恒有 $\ln(1-2x)(1+x) = \ln(1-2x) + \ln(1+x)$.

六、计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \min\{x, y\} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$.

$$\begin{aligned} \text{[详解]} \quad I &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \int_{-\infty}^y x e^{-x^2} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^x y e^{-y^2} dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2y^2} dy - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} dx. \end{aligned}$$

换元, 令 $x = \frac{t}{2}$, $dx = \frac{dt}{2}$, 有

$$I = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

其中用到泊松积分 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$.

[评析] 广义二重积分, 对于被积函数含有绝对值等符号时, 应该先把积分区域适当分块去掉这些符号后再积分, 但对于本题, 为了去掉函数符号 $\min$, 应该用直线 $y = x$ 将整个平面分成两部分, 并适当选取二次积分次序, 以便积分.

七、设某产品的需求函数为 $Q = Q(P)$, 收益函数为 $R = PQ$, 其中 P 为产品价格, Q 为需求量 (产品的产量), $Q(P)$ 是单调减函数. 如果当价格为 P_0 , 对应产量为 Q_0 时, 边际收益 $\left. \frac{dR}{dQ} \right|_{Q=Q_0} = a > 0$, 收益对价格的边际效应 $\left. \frac{dR}{dP} \right|_{P=P_0} = c < 0$, 需求对价格的弹性为 $E_P =$

> 1 . 求 P_0 和 Q_0 .

[详解] 由收益函数 $R = PQ$ 对 Q 求导, 有

$$\frac{dR}{dQ} = P + Q \frac{dP}{dQ} = P + \left[-\frac{\frac{dP}{P}}{\frac{dQ}{Q}} \right] (-P) = P \left(1 - \frac{1}{E_P} \right),$$

$$\left. \frac{dR}{dQ} \right|_{Q=Q_0} = P_0 \left(1 - \frac{1}{b} \right) = a,$$

$$\text{得 } P_0 = \frac{ab}{b-1}.$$

由收益函数 $R = PQ$ 对 P 求导, 有

$$\frac{dR}{dP} = Q + P \frac{dQ}{dP} = Q - \frac{Q}{\frac{dP}{P}} (-Q) = Q(1 - E_P),$$

$$\left. \frac{dR}{dP} \right|_{P=P_0} = Q_0(1 - b) = c,$$

于是 $Q_0 = \frac{c}{1-b}$.

【评析】 本题属于经济应用题,其关键在于要求掌握弹性公式

$$E_P = \frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dP}{P}},$$

再由 $R = PQ$ 两边对 Q 以及 P 求导后,推出它们与弹性公式的联系.

八、设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上连续, $g(x)$ 为偶函数, 且 $f(x)$ 满足条件 $f(x) + f(-x) = A$ (A 为常数).

(1) 证明 $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx$;

(2) 利用(1)的结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx$.

【详解】 (1) $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)g(x)dx + \int_0^a f(x)g(x)dx$,
 $\int_{-a}^0 f(x)g(x)dx \xrightarrow{x=-t} - \int_a^0 f(-t)g(-t)dt = \int_0^a f(-x)g(x)dx$.

于是

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x)g(x)dx &= \int_0^a f(-x)g(x)dx + \int_0^a f(x)g(x)dx \\ &= \int_0^a [f(x) + f(-x)]g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx. \end{aligned}$$

(2) 取 $f(x) = \arctan e^x$, $g(x) = |\sin x|$, $a = \frac{\pi}{2}$. 则 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, $g(x)$ 为偶函数, 由于

$$(\arctan e^x + \arctan e^{-x})' = 0,$$

可见 $\arctan e^x + \arctan e^{-x} = A$,

令 $x = 0$, 得 $2\arctan 1 = A$,

故 $A = \frac{\pi}{2}$, 即 $f(x) + f(-x) = \frac{\pi}{2}$.

于是, 有

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

[评析] 对称区间上的定积分 $\int_{-a}^a F(x)dx$ 的一般分解为

$\int_{-a}^a F(x)dx = \int_{-a}^0 F(x)dx + \int_0^a F(x)dx$, 然后, 再对第一个积分作变换 $x = -t$, 从而求得对称区间的定积分的有关结论:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & f(x) \text{ 为偶数} \\ 0, & f(x) \text{ 为奇函数} \end{cases}$$

九、已知向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (II) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; (III) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$, 如果各向量组的秩为 $r(\text{I}) = r(\text{II}) = 3, r(\text{III}) = 4$. 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 的秩为 4.

[详解] 因 $r(\text{I}) = r(\text{II}) = 3$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 故存在数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使

$$\alpha_4 = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3, \quad (1)$$

设有数 k_1, k_2, k_3, k_4 , 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 + k_4 (\alpha_5 - \alpha_4) = 0.$$

将 (1) 代入上式, 化简得

$$(k_1 - \lambda_1 k_4) \alpha_1 + (k_2 - \lambda_2 k_4) \alpha_2 + (k_3 - \lambda_3 k_4) \alpha_3 + k_4 \alpha_5 = 0,$$

由 $r(\text{III}) = 4$ 知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 线性无关.

所以

$$\begin{cases} k_1 & -\lambda_1 k_4 = 0, \\ k_2 & -\lambda_2 k_4 = 0, \\ k_3 & -\lambda_3 k_4 = 0, \\ k_4 & = 0, \end{cases}$$

得 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关, 即其秩为 4.

[评析] 对于证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 的秩为 4, 即是证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关, 其基本方法是利用定义来求解的.

十、已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

(1) 写出二次型 f 的矩阵表达式;

(2) 用正交变换把二次型 f 化为标准型, 并写出相应的正交矩阵.

[详解] (1) f 的矩阵表达式为

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

(2) 二次型的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix},$$

A 的特征方程为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 4 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 36) = 0.$$

由此得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -6$. 对应的特征向量为

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

对应的单位特征向量为

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

由此可得正交矩阵

$$P = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

对二次型 f 作正交变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

则二次型 f 可以化为如下标准型

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2.$$

【评析】 本题可以用正交变换法与配方法来化二次型为标准型,但在用配方法时应注意:用配方法得到的标准形中的系数不一定为二次型相应矩阵的特征值.

十一、假如一厂家生产的每台仪器,以概率 0.70 可以直接出厂;以概率 0.30 需进一步调试,经调试后以概率 0.80 可以出厂;以概率 0.20 定为不合格品不能出厂.现该厂新生产了 n ($n \geq 2$) 台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立).求:

- (1) 全部能出厂的概率 α ;
- (2) 其中恰好有两件不能出厂的概率 β ;
- (3) 其中至少有两件不能出厂的概率 θ .

【详解】 对于新生产的每台仪器,引进事件: $A = \{\text{仪器需进一步调试}\}, B = \{\text{仪器能出厂}\}$, 则 $\bar{A} = \{\text{仪器能直接出厂}\}, AB = \{\text{仪器经调试后能出厂}\}.$