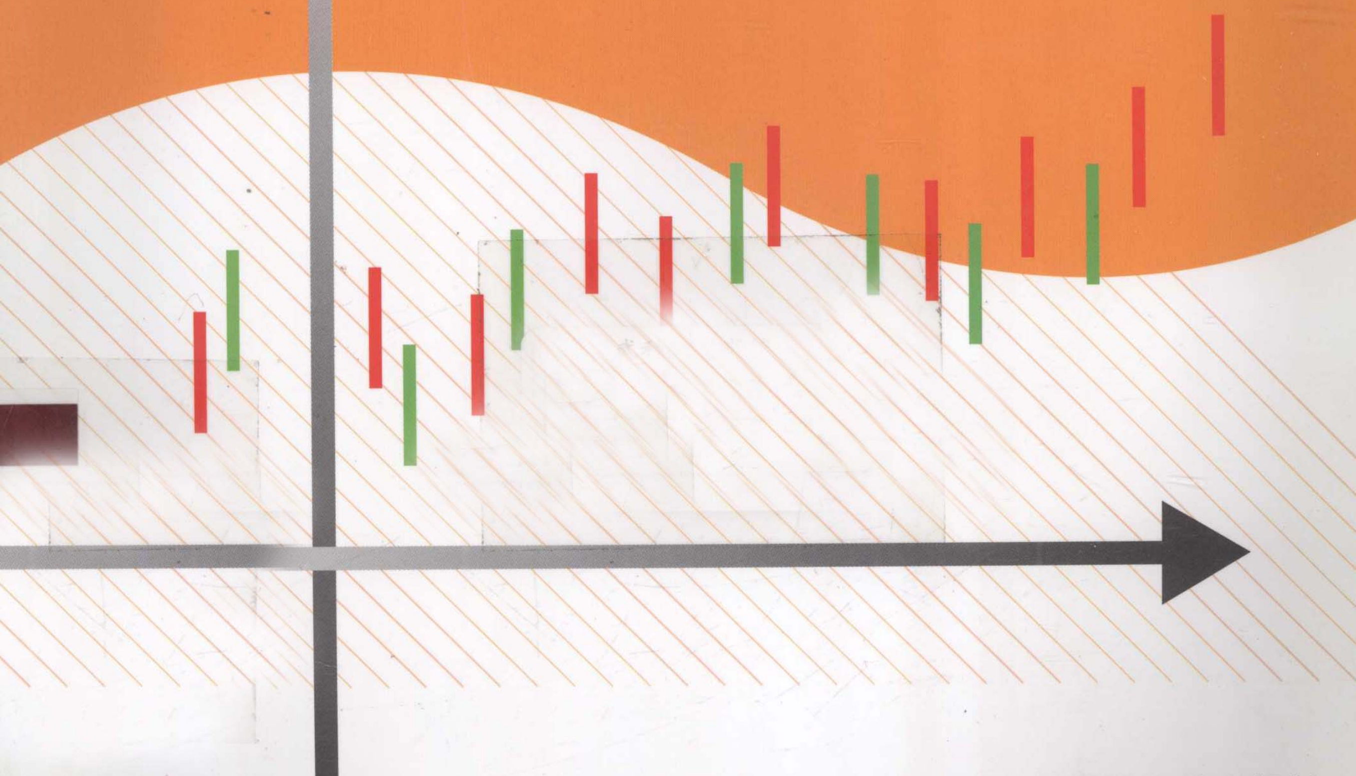
经济数学

——微积分

刘　群　杜瑞燕　主编



清华大学出版社

经济数学

——微积分

刘 群 杜瑞燕 主编

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

本书根据教育部最新颁布的高等学校经济管理类本科生微积分课程教学基本要求，参考研究生入学考试大纲，结合编者多年来在经济管理类专业微积分课程的教学实践、教学改革中所积累的经验编写而成. 全书共 8 章，内容包括坐标系与函数，极限与连续，函数的微分，导数的应用，不定积分，函数的积分，无穷级数，微分、差分方程.

本书可作为高等学校经济管理类各专业及其他相关专业微积分课程的教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学：微积分/刘群，杜瑞燕主编. --北京：清华大学出版社，2011. 8
ISBN 978-7-302-26407-1

Ⅰ. ①经…　Ⅱ. ①刘… ②杜…　Ⅲ. ①经济数学 ②微积分　Ⅳ. ①F224.0 ②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 160820 号

责任编辑：石　磊　陈　明
责任校对：刘玉霞
责任印制：何　芊
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社　总　机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质　量　反　馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：三河市兴旺装订有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　**印　张**：21.25　**字　数**：463 千字
版　　次：2011 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2011 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：35.00 元

产品编号：041452-01

前　　言

本书内容包括了一元与多元函数的微分学和积分学、级数、微分方程，共分为8章．书中注重知识体系的形成过程，对知识点的描述着重于易读易学，对相关部分的知识强调它们的共性与特性，增加了各部分知识的常见应用，对解题的方法尽可能给出普遍的规律．

本书与传统微积分教材在结构上有所区别，着力于一种新的思路，知识点的介绍有新颖之处，且内容涵盖了微积分课程教学所要求的所有内容，可作为经济管理类专业的学习教材或教学参考书．为便于读者检验自己对各章节内容理解的程度，每节都配有相应习题，每章配有总习题，书末附有习题答案．书中对于超出教学基本要求的内容及习题均采用*号标出．

参加本书编写工作的有东北大学秦皇岛分校的刘群、杜瑞燕、李红、徐延钦、张琨、王翠萍等教师，其中刘群与杜瑞燕对全书进行了统撰，李红在写作的前期做了大量的工作，徐延钦对全书的图形进行了细心的描绘，刘艳在排版的工作中做了不少的工作．在此一并表示感谢．

由于时间比较仓促，教材中一定存在不妥之处，希望广大读者批评指正．

编　者

2011年4月

目　录

预备知识　解析几何

解析几何把算术、代数、几何这几门分离的学科联系在一起，使看似独立的两个研究对象“形”和“数”统一起来. 它使数学成为一个双向工具. 一方面，几何概念可用代数形式表出，几何的目标可通过代数运算达到；反过来，代数语言可以从几何直观来解释，代数抽象可以有更好的几何意义. 更重要的是，解析几何把“变量”概念引进了数学，在数学史上产生了一项划时代的变革. 17 世纪以来数学的巨大发展，在很大程度上应归功于解析几何.

0.1　空间直角坐标系

要用代数语言来研究几何问题，首先要建立点和数之间的对应关系，这就需要用到坐标系的概念，下面给出空间直角坐标系.

我们在平面解析几何中知道，直线上点和数的对应关系是通过数轴建立起来的，即 $M \leftrightarrow x$，数轴将直线分为两个部分(图 0-1).

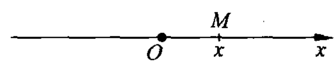


图 0-1

平面上点和数的对应关系是通过平面直角坐标系建立起来的，即 $M \leftrightarrow (x, y)$，平面直角坐标系将平面分为四个部分，称为四个**象限**(图 0-2).

下面研究空间上点和数的关系.

过平面直角坐标系的原点 O 作一垂直于 xOy 平面的直线为 Oz 轴，并要求 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的方向组成右手系，则 $Oxyz$ 构成一个空间直角坐标系. 其中三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样确定的平面称为**坐标面**，分别为 xOy 坐标面，yOz 坐标面及 zOx 坐标面. 坐标面把空间分为八个部分，称为八个**卦限**(图 0-3).

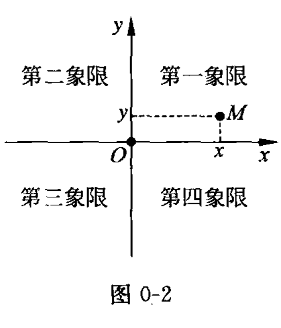


图 0-2

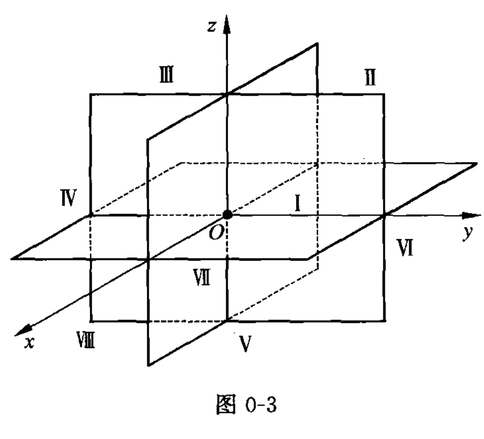


图 0-3

各卦限的符号如表 0-1 所示.

表 0-1 卦限的符号

符号 卦限 坐标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
X	+	−	−	+	+	−	−	+
Y	+	+	−	−	+	+	−	−
Z	+	+	+	+	−	−	−	−

假设 M 为空间上的一点,过 M 作各坐标轴的垂直平面,分别交轴 Ox,Oy,Oz 于点 x,y,z,则 M 确定一组唯一数(x,y,z). 反之,已知一组数(x,y,z),在三轴上分别过点$(x,0,0)$,$(0,y,0)$和$(0,0,z)$作对应的坐标平面 yOz,zOx,xOy 的平行平面,三平面交于唯一一点 M. 此时空间直角坐标系将空间上的点 M(几何)与一个三元数组(x,y,z)(数)建立了一一对应关系 $M\leftrightarrow(x,y,z)$.

0.2 向量及其运算

在建立了点和数之间的关系后,如何用代数的运算来研究几何图形的性质呢? 我们要用到的工具就是向量. 向量是个双面工具,它既有几何表达形式又有代数表达形式. 下面分别讨论.

0.2.1 向量的概念

定义 0.1 只有大小的量称为**数量**(或**标量**).

例如,质量、温度、面积、体积都是数量.

定义 0.2 既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**).

例如,力、速度、加速度都是向量.

0.2.2 几何表达式

向量在几何上用一条有向线段表示,如图 0-4 所示. $\overrightarrow{AB}$表示由 A 到 B 的有向线段.

有向线段$\overrightarrow{AB}$的长度(用刻度表示)称作向量的**大小**,也称作向量的**模**,记为$|\overrightarrow{AB}|$.

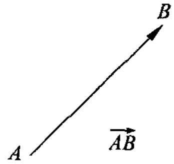


图 0-4

有向线段$\overrightarrow{AB}$的方向(用箭头表示)即是向量的**方向**.

长度和方向完全一致的两向量表示同一向量,否则为不同向量. 也就是说,将两向量的起点放在同一点,若终点重合,则两向量相同. 这种和起点无关的向量称为**自由向量**,是本门课的研究对象,一般用 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 表示.

在直角坐标系中,以 O 为起点,已知点 M 为终点的向量$\overrightarrow{OM}$称为**向径**.

1. 向量的加法

(1) 平行四边形法则

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形,则以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的公共起点为起点的对角线向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**,记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 0-5 所示.

上述作出两向量之和的方法叫做**平行四边形法则**.

(2) 三角形法则

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为 $\boldsymbol{b}$ 的起点,则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点所表示的向量即等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 0-6 所示.

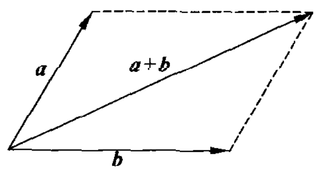


图 0-5

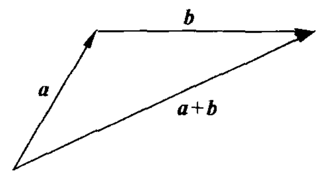


图 0-6

这种作出两向量之和的方法即是**三角形法则**.

(3) 折线法则

多个向量相加的法则如下:将各向量的首尾相接,则起点到终点所表示的向量即为它们的和,如图 0-7 所示,我们称之为**折线法则**.

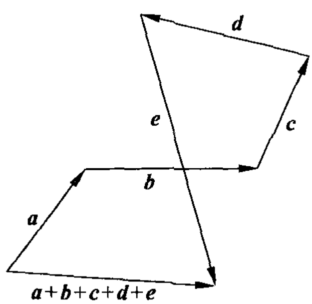


图 0-7

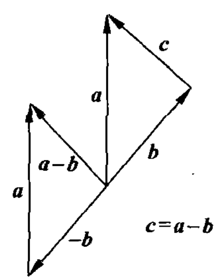


图 0-8

加法运算规则

① 交换律

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a};$$

② 结合律

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记作 $-\boldsymbol{a}$.

由向量的加法运算及负向量，可以引入向量的减法运算，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

将 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点放在同一点上，则由 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点所表示的向量即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，如图 0-8 所示.

2. 向量的数乘

设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，m 为一非零实数，规定 $m\boldsymbol{a}$ 是一向量，它的模

$$|m\boldsymbol{a}|=|m||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向当 $m>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $m<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

例如，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

数乘运算规则

① $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

② $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$；

③ $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

模为 1 的向量称为**单位向量**，记为 $\boldsymbol{a}^\circ$.

设 $\boldsymbol{a}$ 为任意非零向量，则 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ$，即 $\boldsymbol{a}^\circ$为与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量. 故

$$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

结论 两非零向量平行 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$（$\lambda$ 为非零常数）.

注 零向量与任何向量平行.

例 0.1 已知 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AD}$（图 0-9），求$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}$.

解 因为 M 为对角线的平分点，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MC}.$$

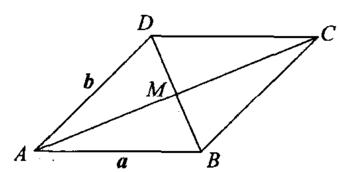


图 0-9

故

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\quad \overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

又

$$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=2\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{2MB},$$

所以

$$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\quad \overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).$$

0.2.3 向量的代数表达

1. 向量的坐标

(1) 向量间的夹角

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为空间中任意两向量，将它们平移至相交，则其正向之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$称为

两向量的夹角(图 0-10),记为$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

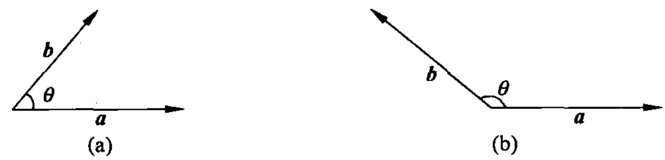


图 0-10

之所以要限制 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$,是因为在空间中,角度只与坐标系有关而与观测者的位置无关.

(2) 向量在轴上的投影

过向量$\overrightarrow{AB}$的两个端点 A 和 B,作两垂直于轴 u 的平面,设与轴 u 的两交点分别为 A' 和 B',有向线段的值 $A'B'$ 叫做向量$\overrightarrow{AB}$在轴 u 上的**投影**,记为 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$ 或$(\overrightarrow{AB})_u$,即 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=A'B'$,如图 0-11 所示.

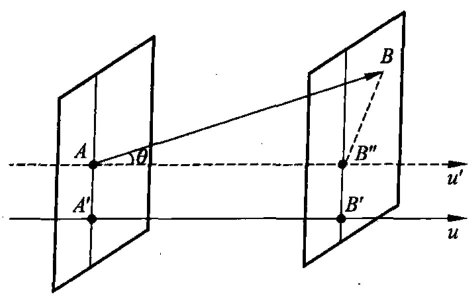


图 0-11

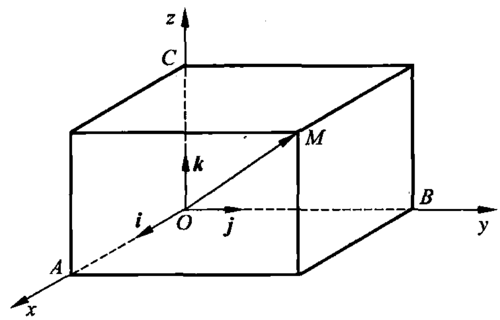


图 0-12

若 $(\widehat{\overrightarrow{AB},u})=\theta$,则 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$. 从中可以看出投影是个带有符号的数.

当 $\theta<\dfrac{\pi}{2}$时,$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}>0$;

当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$时,$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=0$;

当 $\theta>\dfrac{\pi}{2}$时,$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}<0$.

相等的向量在同一轴上的投影相同,因为它们的模和夹角相同.

(3) 向量的分解与向量的坐标

① 向量的分解

在空间中(图 0-12),设向径 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$在各坐标轴上的投影为

$$OA=x,\quad OB=y,\quad OC=z,$$

则有向线段$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$为三个向量,且由向量的加法运算得$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}$,这里$\overrightarrow{OA}$,